Methode einer Fehleranalyse für die Time- Bin- Konfiguration unter Laserbestrahlung

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.
www.Zenithpoint.de

Erstellt: 9. Mai 2012 – Letzte Revision: 20. August 2019

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[DIBZ12] M.Sc. Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler. Leistungen am Detektor (Arbeitsblätter zur Masterarbeit), 2012.

[NGZ01] Wolfgang Tittel Nicolas Gisin, Gregoire Ribordy and Hugo Zbinden. Quantum cryptography, 2001.

1 Herleitung der Grundannahme

Folgende Annahme wird getroffen für ein System mit einem quantitativen Maximum MAX und Minimum MIN.

$$MAX \geq MIN > 0$$

$\Rightarrow$

$$MAX - MIN \geq 0 > -MIN$$

Aus $0 > -MIN$ folgt $MIN \in R^+$ und daraus wiederum $MAX \in R^+$.

Aus $MAX - MIN \geq 0$ folgt die Vermutung $MAX - m \cdot MIN = 0$ und daraus dann:

$$MAX - m \cdot MIN \leq MAX - MIN$$

$\Rightarrow$

$$m \geq 1$$

Was die Vermutung bestätigt für $(m \in R) \geq 1$.

Weiterhin folgt:

$$MAX - MIN = (m - 1) \cdot MIN$$

$$MAX + MIN = (m + 1) \cdot MIN$$

Grundlage ist weiter die reale Time- Bin- Konfiguration mit κ ohne der Notwendigkeit der Phasenmanipulation.

$$P(\psi_K)(\kappa, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0) = \kappa^2 \cdot (2 - \kappa)^4$$

$$P(\psi_M)(\kappa, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0) = 4 \cdot \kappa^6 \cdot (2 - \kappa)^6$$

$$P(\psi_L)(\kappa, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0) = \kappa^4 \cdot (2 - \kappa)^2$$

2 Ableitungen der Grundannahme

2.1 Time- Bin- Kriterium TBK

$$MAX - m \cdot MIN = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{MAX}{MIN} = 1$$

Das Time- Bin- Kriterium ist somit definiert:

$$TBK = \frac{1}{m} \cdot \frac{MAX}{MIN}$$

$\Rightarrow$

$$(TBK - 1) \cdot m \cdot MIN = 0$$

Die Time- Bin- Konfiguration ist dann ideal, wenn gilt:

$$TBK = 1 \qquad m = 0 \qquad MIN = 0$$

Wobei $m = 0$ und $MIN = 0$ durch die Voraussetzungen ausgeschlossen sind.

2.2 Visibilität V

Aus der Grundannahme ist ableitbar:

$$MAX - m \cdot MIN = 0$$

$\Rightarrow$

$$MAX - MIN = (m - 1) \cdot MIN$$

Und:

$$MAX - m \cdot MIN = 0$$

$\Rightarrow$

$$MAX + MIN = (m + 1) \cdot MIN$$

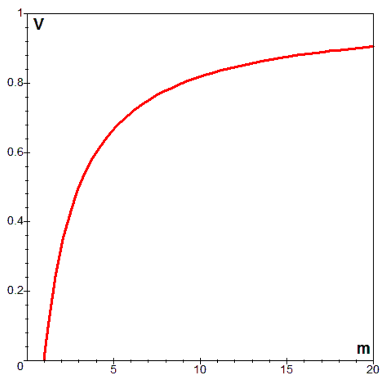
Aus der allgemeinen Annahme der Visibilität ist die Berechnung innerhalb der Time- Bin- Konfiguration ablesbar.

$$V = \frac{MAX - MIN}{MAX + MIN}$$

$\Rightarrow$

$$V = \frac{m - 1}{m + 1}$$

$\Rightarrow$



Grafische Darstellung der Visibilität V
in Abhängigkeit vom Leitwert m.

2.3 Abschätzung von m

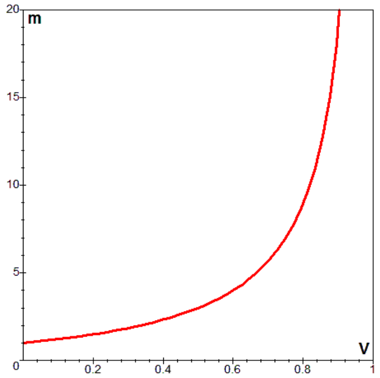
Aus der Berechnungsgrundlage von V ist m abschätzbar.

$$V = \frac{m-1}{m+1}$$

$\Rightarrow$

$$m = \frac{1+V}{1-V}$$

$\Rightarrow$



Grafische Darstellung des Leitwertes m
in Abhängigkeit von der Visibilität V.

2.4 Abschätzung der MAX- und MIN- Relation

Aus der allgemeinen Berechnungsgrundlage der Visibilität V ist die MAX- und MIN- Relation ableitbar.

$$V = \frac{MAX - MIN}{MAX + MIN}$$

$\Rightarrow$

$$1 + V = \frac{2 \cdot MAX}{MAX + MIN}$$

Sowie:

$$V = \frac{MAX - MIN}{MAX + MIN}$$

$\Rightarrow$

$$1 - V = \frac{2 \cdot MIN}{MAX + MIN}$$

Damit ist die Relation berechenbar:

$$\frac{MAX}{MIN} = \frac{1+V}{1-V}$$

2.5 Die korrigierte Visibilität V_{TBK}

Als Forderung soll ein Zusammenhang zwischen der allgemeinen und der korrigierten Visibilität bestehen.

$$V = \frac{TBK \cdot m - 1}{TBK \cdot m + 1} = TBK \cdot V_{TBK}$$

Die $MAX - MIN$- Relation wird eingesetzt.

$$V_{TBK} = m \cdot \frac{MIN}{MAX} \cdot V = m \cdot \frac{MIN}{MAX} \cdot \frac{MAX - MIN}{MAX + MIN}$$

$\Rightarrow$

$$V_{TBK} = \frac{V}{TBK}$$

2.6 Der Korrektor $m_\bullet$

Der Korrektor ist definiert mit:

$$m_\bullet = \frac{MAX_{\bullet,\kappa=1}}{MIN_{\bullet,\kappa=1}}$$

$\Rightarrow$

$$m_{SZS} = 3 \qquad\qquad m_Z = 1$$

2.7 Entscheidungskriterien

2.7.1 $Z > S_1 + S_2$

Gesucht sind im Definitionsbereich von κ liegende Lösungen von:

$$P(\psi_M) = P(\psi_K) + P(\psi_L)$$

$\rightarrow$

$$\kappa_1 = 0,636 \qquad \kappa_2 = 1,364$$

2.7.2 $Z > S_1$ oder $Z > S_2$

Gesucht sind im Definitionsbereich von κ liegende Lösungen von:

$$P(\psi_M) = P(\psi_K) \qquad P(\psi_M) = P(\psi_L)$$

$\rightarrow$

$$\kappa_3 = 0,597 \qquad \kappa_4 = 1,403$$

2.7.3 MAX_{SZS} und MIN_{SZS} sind ununterscheidbar

Soll dann gelten, wenn:

$$\frac{MAX_{SZS}}{MIN_{SZS}} = 1,05$$

$\Rightarrow$

$$\kappa_5 = 0,254 \qquad \kappa_6 = 1,746$$

Bei:

$$TBK_{SZS} = 0,35 > \frac{1}{3} = TBK_{SZS,min}$$

2.7.4 Der TBI- und der NOTBI- Bereich

Das Vorliegen einer funktionierenden Time-Bin-Konfiguration **TBI** liegt dann vor, wenn gilt:

$$\kappa_1 \approx \kappa_3 \approx 0,6 < \kappa_{\mathbf{TBI}} < 1,4 \approx \kappa_4 \approx \kappa_2$$

Dementsprechend ist der Bereich einer nichtfunktionierenden Time-Bin-Konfiguration **NOTBI** bekannt, wenn gilt:

$$\kappa_{min} = 0 \leq \kappa_{\mathbf{NOTBI}} < 0,25 \approx \kappa_5 \qquad \kappa_6 \approx 1,75 < \kappa_{\mathbf{NOTBI}} \leq 2 = \kappa_{max}$$

2.8 Erweiterungen

2.8.1 TBK + V + SNR

Es gibt einen Zusammenhang zwischen dem Signal- Rauschverhältnis SNR und dem TBK.

$$SNR_{SZS} = \frac{P(\psi_M)}{P(\psi_K) + P(\psi_L)} = \frac{MAX_{SZS} - MIN_{SZS}}{MIN_{SZS}} = 3 \cdot TBK_{SZS} - 1$$

Es existieren exponierte Punkte.

$$SNR_{SZS,max} = 3db \qquad \text{bei} \qquad \kappa = 1$$

Sowie:

$$SNR_{SZS} = 0db \qquad \text{bei} \qquad \kappa_1 = 0,636 \qquad \text{und} \qquad \kappa_2 = 1,364$$

Ein Zusammenhang ist bekannt.

$$SNR_{SZS} = (3 \cdot TBK_{SZS} + 1) \cdot V_{SZS}$$

2.8.2 TBK + V + $QBER$

Nach [NGZ01] gibt es einen proportionalen Zusammenhang zwischen dem Quantenbitfehlerhäufigkeit $QBER$ und der Visibilität V.

$$QBER \propto 1 - V = 1 - V_{TBK,Z} \cdot TBK_Z$$

2.8.3 $P(\psi_M)$

Der Zentralimpuls ist erweitert beschreibbar.

$$P(\psi_M)(\kappa, \varphi_1, \varphi_2 = 0) = 4 \cdot \kappa^6 \cdot (2-\kappa)^6 \cdot \cos^2 \frac{\varphi_1}{2} = 4 \cdot V_{TBK,Z} \cdot \cos^2 \frac{\varphi_1}{2} = \frac{4}{TBK_Z} \cdot \cos^2 \frac{\varphi_1}{2}$$

3 Anwendung über den Koppelkoeffizienten κ

[DIBZ12]

3.1 Für die Impulse S_1, S_2 und Z - Methode SZS

Mit:

$$MAX_{SZS} = (2-\kappa)^2 \cdot \kappa^2 \cdot \left(\kappa^2 + 4 \cdot (2-\kappa)^4 \cdot \kappa^4 + (2-\kappa)^2\right)$$

Und:

$$MIN_{SZS} = (2-\kappa)^2 \cdot \kappa^2 \cdot \left(\kappa^2 + (2-\kappa)^2\right)$$

Folgt:

$$V_{SZS} = 2 \cdot \frac{(2-\kappa)^4 \cdot \kappa^4}{\kappa^2 + 2 \cdot (2-\kappa)^4 \cdot \kappa^4 + (2-\kappa)^2}$$

Mit:

$$MAX_{SZS\_\kappa=1} = 6$$

Und:

$$MIN_{SZS\_\kappa=1} = 2$$

⇒

$$m = 3$$

⇒

$$TBK_{SZS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{MAX_{SZS}}{MIN_{SZS}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\kappa^2 + 4 \cdot (2-\kappa)^4 \cdot \kappa^4 + (2-\kappa)^2}{\kappa^2 + (2-\kappa)^2}$$

⇒

$$V_{TBK_{SZS}} = 6 \cdot \frac{(2-\kappa)^4 \cdot \kappa^4}{\kappa^2 + 2 \cdot (2-\kappa)^4 \cdot \kappa^4 + (2-\kappa)^2} \cdot \frac{(2-\kappa)^2 + \kappa^2}{\kappa^2 + 4 \cdot (2-\kappa)^4 \cdot \kappa^4 + (2-\kappa)^2}$$

3.2 Für den Zentralimpuls Z - Methode Z

Für die Messung am Zentralimpuls sind zwei Annahmen notwendig.

Mit:

$$MAX_Z = 4 \cdot (2-\kappa)^6 \cdot \kappa^6$$

Und:

$$MIN_Z = 0$$

Folgt:

$$V_Z = 1$$

Da $MAX \geq MIN > 0$ gelten muss, kann diese Annahmen nicht weiter genutzt werden.

Mit:

$$MAX_Z = 4$$

Und:

$$MIN_Z = 4 \cdot (2-\kappa)^6 \cdot \kappa^6$$

⇒

$$MIN_{Z\_\kappa=1} = 4$$

⇒

$$m = 1$$

⇒

$$TBK_Z = \frac{1}{1} \cdot \frac{MAX_Z}{MIN_Z} = \frac{1}{(2-\kappa)^6 \cdot \kappa^6}$$

⇒

$$V_{TBK_Z} = (2-\kappa)^6 \cdot \kappa^6$$

Der Einstieg in die Auswertungskette erfolgt somit über das TBK mit MIN und MAX aus den realen Messwerten.

4 Beispiel I - SZS

4.1 Numerisch

Messung der drei Impulse simultan - SZS- Methode

Aus 9 Messungen sind die Mittelwerte für die realen MAX- und MIN bekannt.

$$\overline{MAX} = 3,160\,[\text{mW}] \qquad \overline{MIN} = 2,032\,[\text{mW}]$$

Das TBK ist berechenbar.

$$TBK_{SZS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3,160}{2,032} = 0,518$$

Über die Beziehung zwischen TBK und κ sind die Werte für κ_1 und κ_2 zu ermitteln.

$$\kappa_1 = 0,515 \qquad \kappa_2 = 1,485$$

Mit den κ- Werten sind die genormten Leistungen der beiden Satelliten S_1, S_2 und des Zentralimpulses Z bekannt.

$$S_1 = 1,290 \qquad Z = 0,800 \qquad S_2 = 0,155$$

Aus diesen Werten wiederum sind das genormte Minimum bzw. Maximum darstellbar.

$$MAX = 2,245 \qquad MIN = 1,445$$

Die Visibilitäten können nun ermittelt werden.

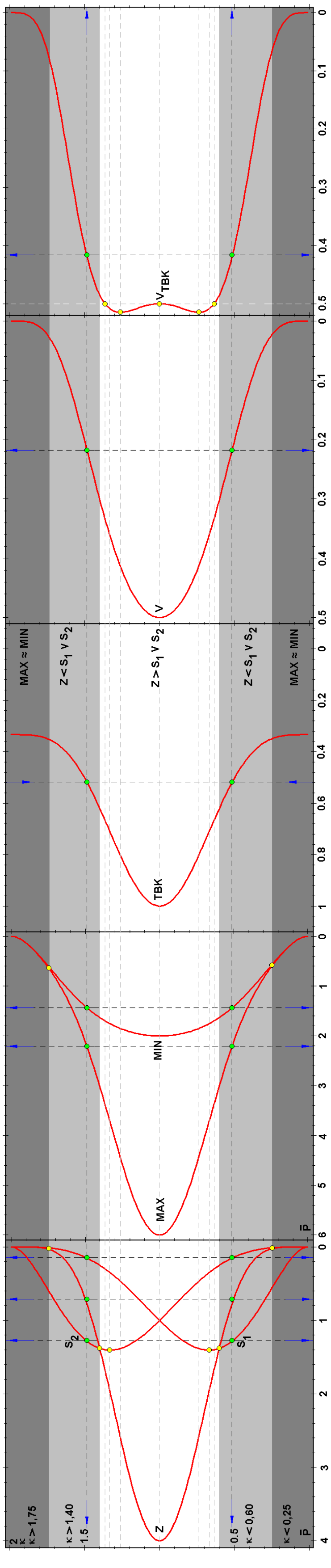
$$V_{SZS} = \frac{2,245 - 1,445}{2,245 + 1,445} = \frac{3,160 - 2,032}{3,160 + 2,032} = 0,217 \qquad V_{TBK_{SZS}} = \frac{0,217}{0,518} = 0,419$$

Als Kontrollmittel kann das TBK nochmals aus den genormten Werten ermittelt und verglichen werden.

$$TBK_{SZS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2,245}{1,445} = 0,518$$

4.2 Grafisch

Für das gewählte Beispiel die grafische Auswertung folgend.



5 Beispiel II - Z

5.1 Numerisch

Messung des Zentralimpulses - Z- Methode

Die gleichen Interferometerkerne wie in Beispiel I. Jedoch mit anderer Laserquelle und empfindlicheren Detektoren. Die Elektronik ist in der Lage, den Zentralimpuls einzeln zu messen.

$$\overline{MAX} = 0,408\,[\mu\text{W}] \qquad \overline{MIN} = 0,105\,[\mu\text{W}]$$

Das TBK ist berechenbar.

$$TBK_Z = \frac{1}{1} \cdot \frac{0,408}{0,105} = 3,886$$

$\Rightarrow$

$$V_{TBK_Z} = \frac{1}{TBK_Z} = 0,257$$

Über die Beziehung zwischen TBK und κ sind die Werte für κ_1 und κ_2 zu ermitteln.

$$\kappa_1 = 0,550 \qquad \kappa_2 = 1,450$$

Mit den κ- Werten sind die genormten Leistungen der beiden Satelliten S_1, S_2 und des Zentralimpulses Z bekannt.

$$S_1 = 1,337 \qquad Z = 1,029 \qquad S_2 = 0,192$$

Aus diesen Werten wiederum sind das genormte Minimum bzw. Maximum darstellbar.

$$MAX = 2,558 \qquad MIN = 1,529$$

Das Time- Bin- Kriterium für drei Impulse ist zu berechnen.

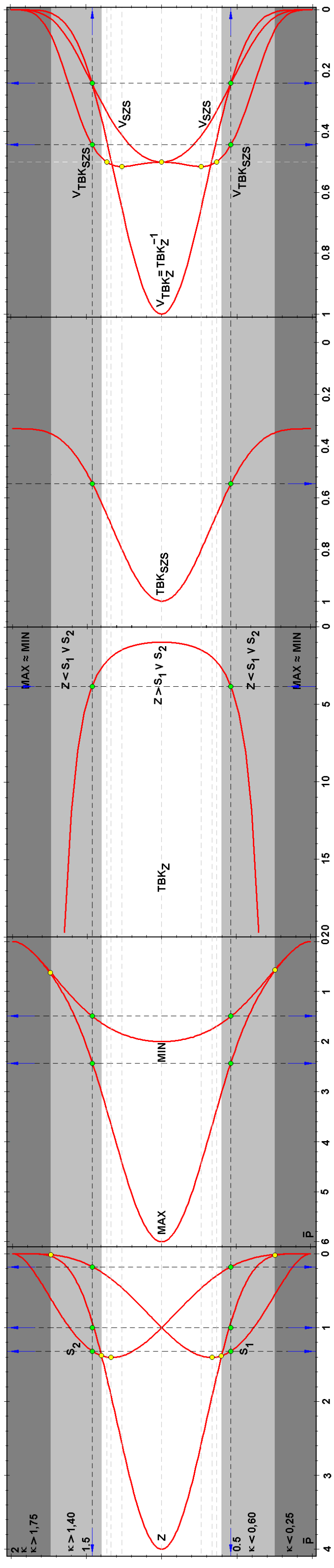
$$TBK_{SZS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2,558}{1,529} = 0,558$$

Die Visibilitäten können nun ermittelt werden.

$$V_{SZS} = \frac{2,558 - 1,529}{2,558 + 1,529} = 0,252 \qquad V_{TBK_{SZS}} = \frac{0,252}{0,558} = 0,452$$

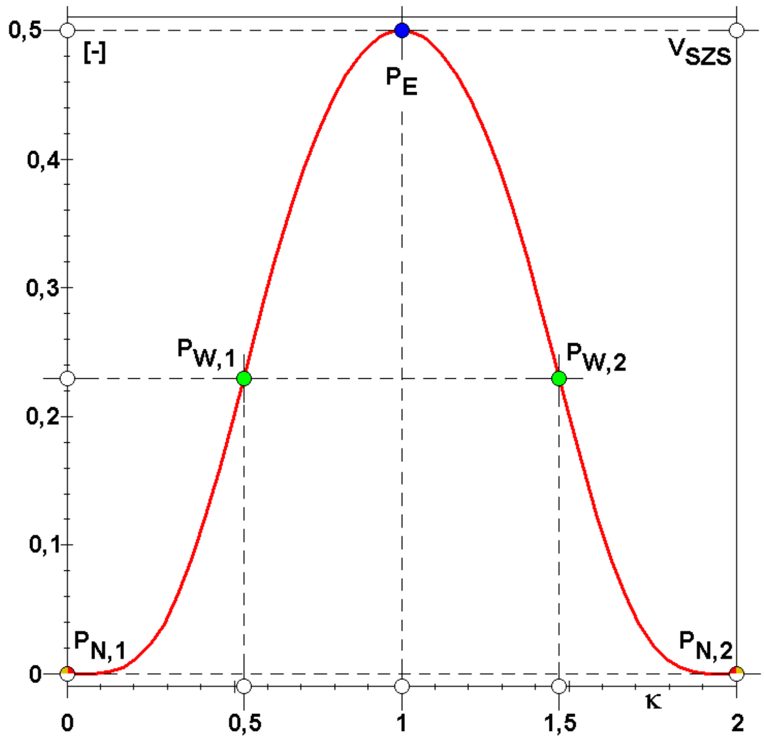
5.2 Grafisch

Für das gewählte Beispiel die grafische Auswertung folgend.



6 Anhang - Grafische Darstellung ausgewählter Größen

6.1 V_{SZS}

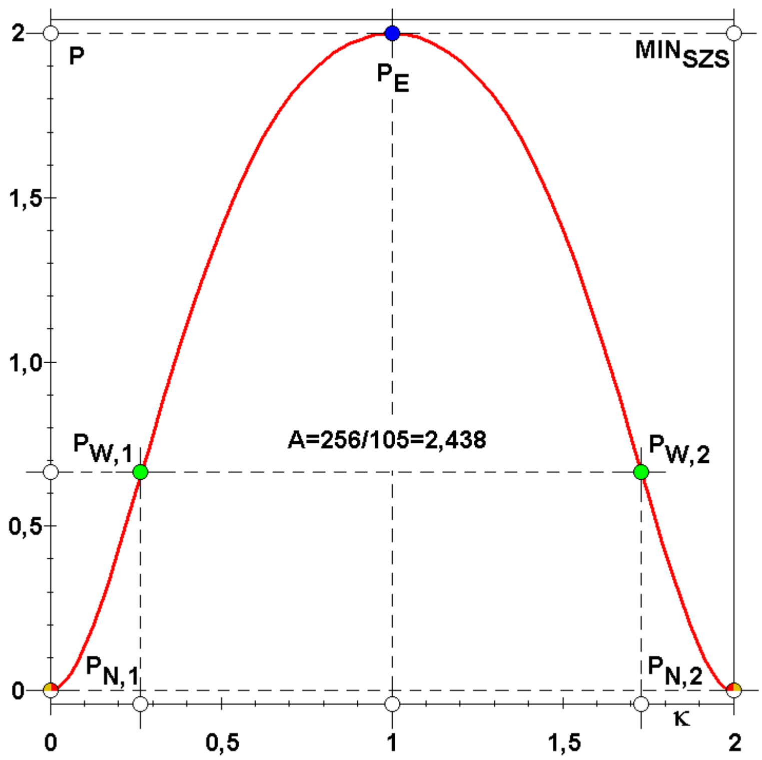


- **Nullstellen:**
  $P_{N,1}\,(0\,;\;0)$
  $P_{N,2}\,(2\,;\;0)$

- **Wendestellen:**
  $P_{W,1}\,(0,527\,;\;0,229)$
  $P_{W,2}\,(1,473\,;\;0,229)$

- **Extrema:**
  $P_E\,(1\,;\;0,5)$

6.2 MIN_{SZS}



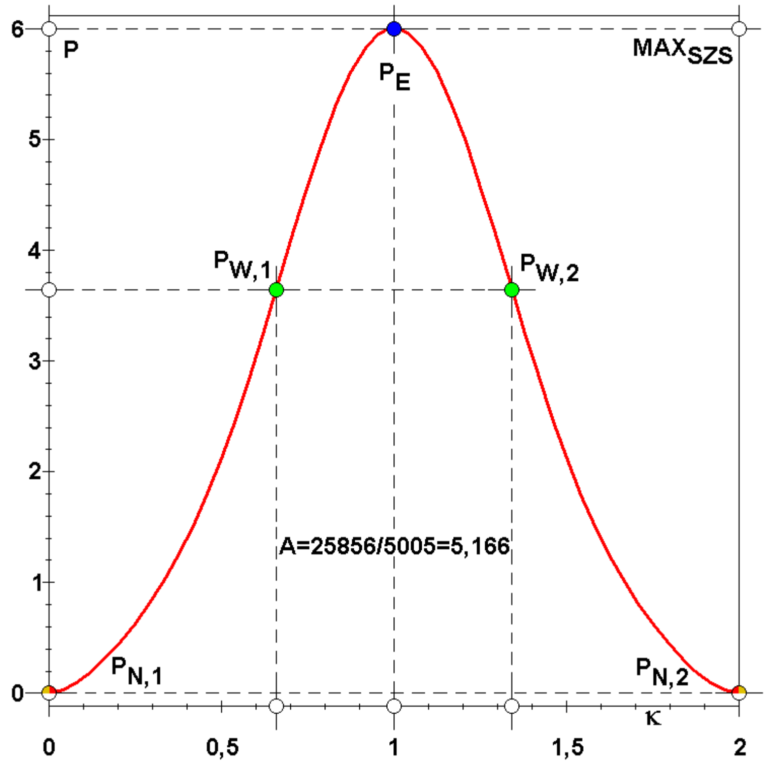
- **Nullstellen:**
  $P_{N,1}\,(0\,;\;0)$
  $P_{N,2}\,(2\,;\;0)$

- **Wendestellen:**
  $P_{W,1}\,(0,274\,;\;0,684)$
  $P_{W,2}\,(1,726\,;\;0,684)$

- **Extrema:**
  $P_E\,(1\,;\;2)$

- **Flächenwerte:**
  $\int_0^2 MIN_{SZS}\,d\kappa = \frac{256}{105} = 2,438$

6.3 MAX_{SZS}



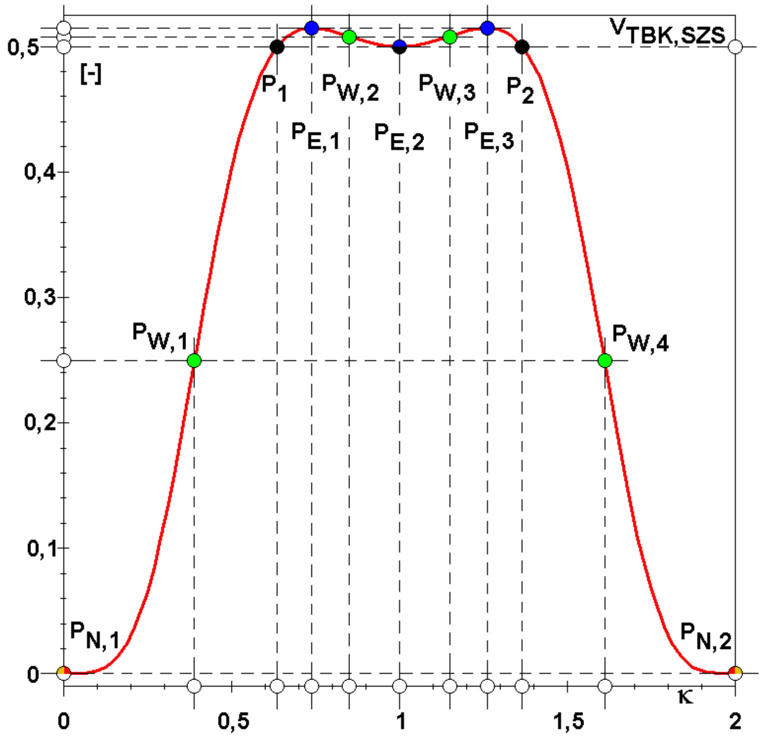
- **Nullstellen:**
  $P_{N,1}\,(0\,;\;0)$
  $P_{N,2}\,(2\,;\;0)$

- **Wendestellen:**
  $P_{W,1}\,(0{,}670\,;\;3{,}768)$
  $P_{W,2}\,(1{,}330\,;\;3{,}768)$

- **Extrema:**
  $P_E\,(1\,;\;6)$

- **Flächenwerte:**
  $\int_0^2 MAX_{SZS}\,d\kappa = \frac{25856}{5005} = 5{,}166$

6.4 $V_{TBK,SZS}$



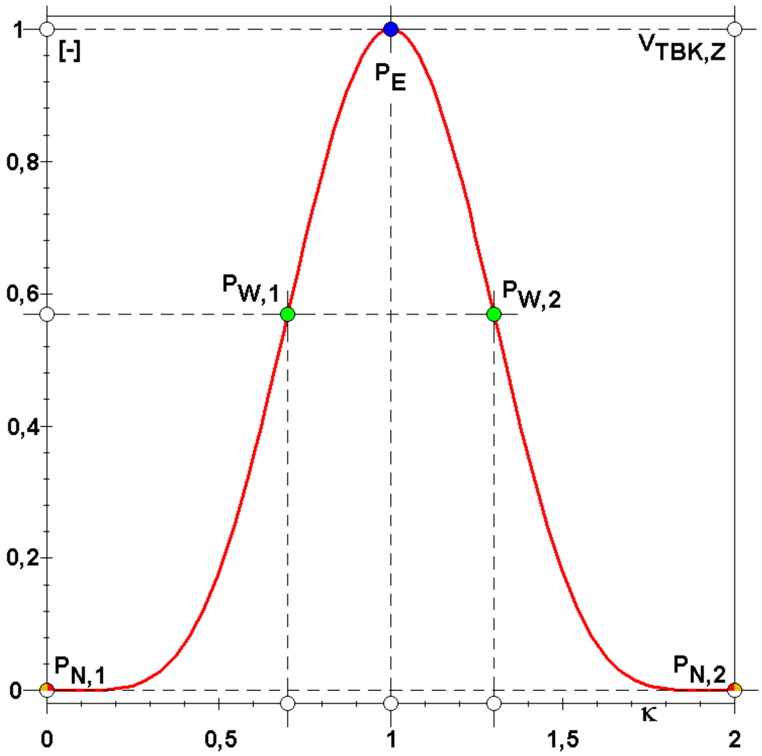
- **Nullstellen:**
  $P_{N,1}\,(0\,;\;0)$
  $P_{N,2}\,(2\,;\;0)$

- **Wendestellen:**
  $P_{W,1}\,(0,389\,;\;0,247)$
  $P_{W,2}\,(0,846\,;\;0,508)$
  $P_{W,3}\,(1,154\,;\;0,508)$
  $P_{W,4}\,(1,611\,;\;0,247)$

- **Extrema:**
  $P_{E,1}\,(0,740\,;\;0,515)$
  $P_{E,2}\,(1,000\,;\;0,500)$
  $P_{E,3}\,(1,260\,;\;0,515)$

- **spezielle Punkte:**
  $P_1\,(0,636\,;\;0,500)$
  $P_2\,(1,364\,;\;0,500)$

6.5 $V_{TBK,Z}$

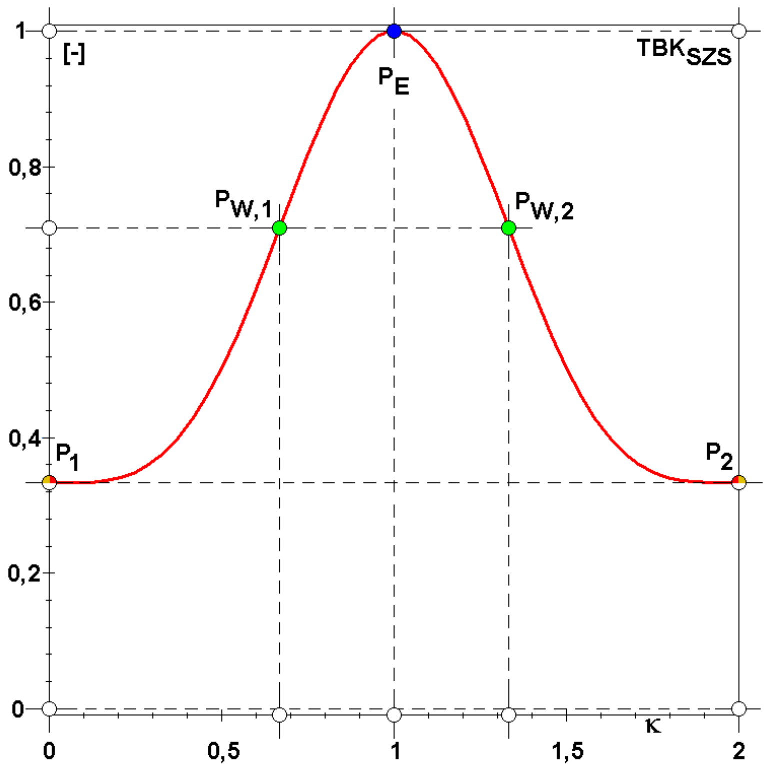


- **Nullstellen:**
  $P_{N,1}\,(0\,;\,0)$
  $P_{N,2}\,(2\,;\,0)$

- **Wendestellen:**
  $P_{W,1}\,(0,698\,;\,0,564)$
  $P_{W,2}\,(1,302\,;\,0,564)$

- **Extrema:**
  $P_E\,(1\,;\,1)$

6.6 TBK_{SZS}

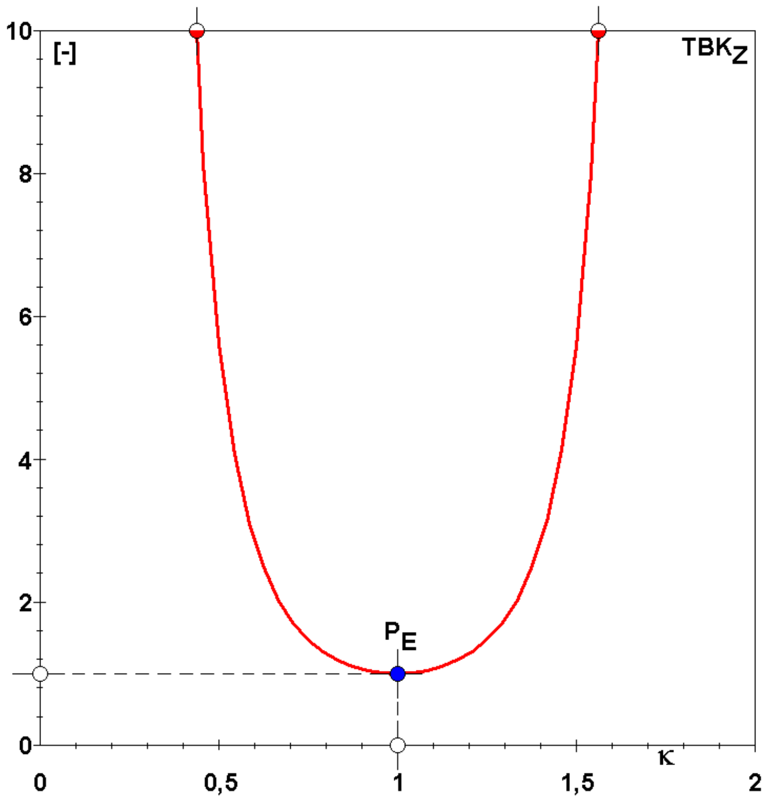


- **spezielle Punkte:**
  $P_1\left(0\,;\;0,33\overline{3}\right)$
  $P_2\left(2\,;\;0,33\overline{3}\right)$

- **Wendestellen:**
  $P_{W,1}\,(0,671\,;\;0,713)$
  $P_{W,2}\,(1,329\,;\;0,713)$

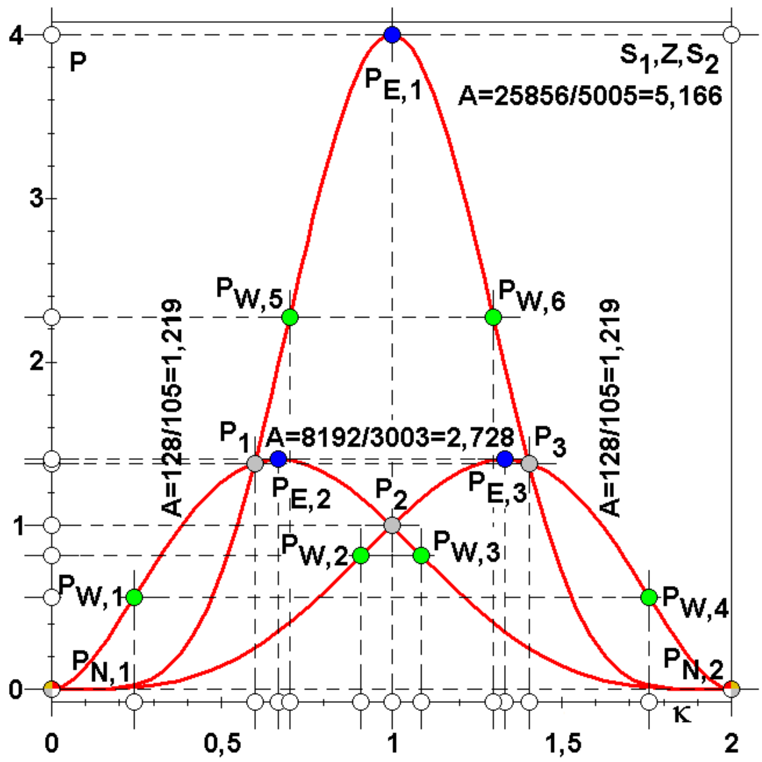
- **Extrema:**
  $P_E\,(1\,;\;1)$

6.7 TBK_Z



- **Extrema:**
  $P_E\,(1\ ;\ 1)$

6.8 S_1 und Z und S_2



- **Nullstellen:**
  $P_{N,1}\,(0\,;\,0)$
  $P_{N,2}\,(2\,;\,0)$

- **Wendestellen:**
  $P_{W,1}\,(0,245\,;\,0,570)$
  $P_{W,2}\,(0,912\,;\,0,818)$
  $P_{W,3}\,(1,088\,;\,0,818)$
  $P_{W,4}\,(1,755\,;\,0,570)$
  $P_{W,5}\,(0,698\,;\,2,258)$
  $P_{W,6}\,(1,302\,;\,2,258)$

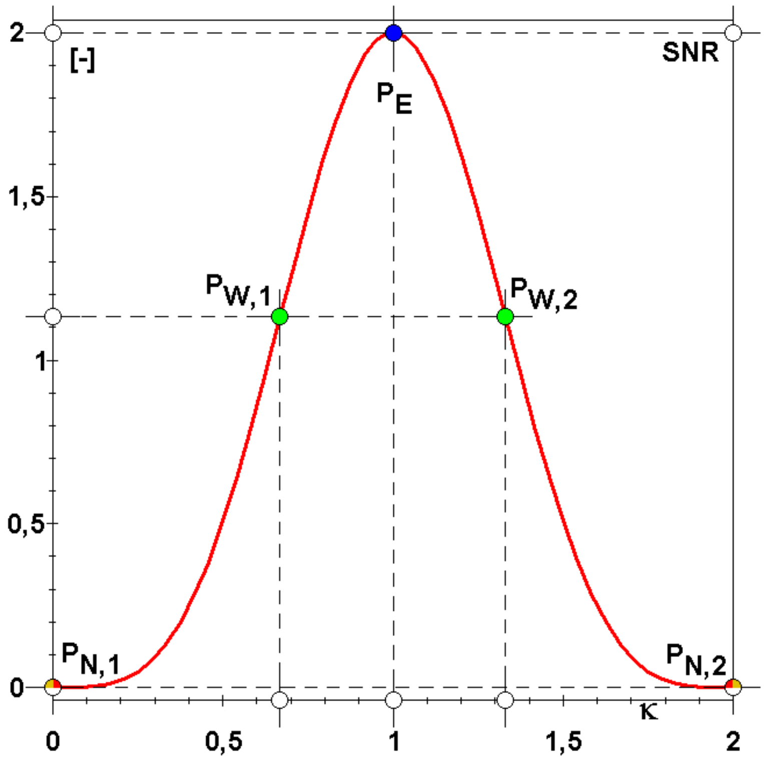
- **Extrema:**
  $P_{E,1}\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1024}{729}\right) = \left(0,66\overline{6}\,,\,1,405\right)$
  $P_{E,2}\,(1\,;\,4)$
  $P_{E,3}\left(\frac{4}{3}\,;\,\frac{1024}{729}\right) = \left(1,33\overline{3}\,,\,1,405\right)$

- **spezielle Punkte:**
  $P_1\,(0,597\,;\,1,381)$
  $P_2\,(1,000\,;\,1,000)$
  $P_3\,(1,403\,;\,1,381)$

- **Flächenwerte:**
  $\int_0^2 S_1 \, d\kappa = \frac{128}{105} = 1,219$
  $\int_0^2 Z \, d\kappa = \frac{8192}{3003} = 2,728$
  $\int_0^2 S_2 \, d\kappa = \frac{128}{105} = 1,219$

- **Summe der Flächenwerte:**
  $\int_0^2 S_1 \, d\kappa + \int_0^2 Z \, d\kappa + \int_0^2 S_2 \, d\kappa = \frac{25856}{5005} = 5,166$

6.9 SNR

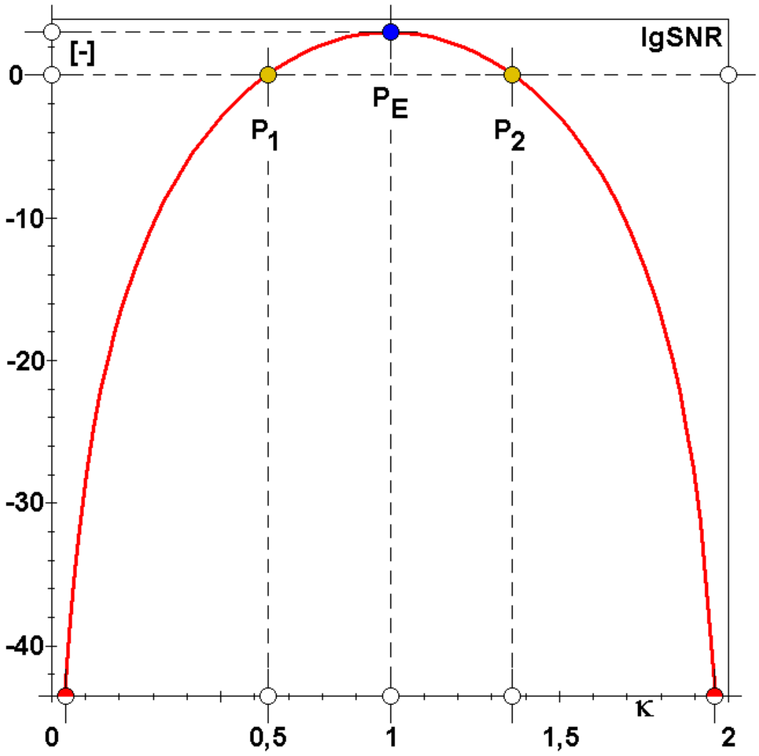


- **Nullstellen:**
  $P_{N,1}\,(0\,;\;0)$
  $P_{N,2}\,(2\,;\;0)$

- **Wendestellen:**
  $P_{W,1}\,(0,671\,;\;1,139)$
  $P_{W,2}\,(1,329\,;\;1,139)$

- **Extrema:**
  $P_E\,(1\,;\;2)$

6.10 $lgSNR$



- **Nullstellen:**
  $P_{N,1}\,(0,636\,;\,0)$
  $P_{N,2}\,(1,364\,;\,0)$

- **Extrema:**
  $P_E\,(1\,;\,3)$

–

LaTeX 2_ε