

Laser Resonators Laserresonatoren

Übersetzung: Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 1. Oktober 2009 – Letzte Revision: 29. August 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Stabile Laserresonatoren	3
1.1	Einführung	3
1.2	Strahlenmatrix	4
1.3	Resonatorstabilität	8
2	Instabile Resonatoren für Hochleistungslaser	12
3	Originaltext	14

Literatur

[Pet] Peter W. Milonni, Joseph H. Eberly. Laser Physics.

1 Stabile Laserresonatoren

1.1 Einführung

Bis jetzt haben wir lediglich die Annahme getroffen, ein Laserresonator bestehe aus zwei hoch reflektierenden, flachen, parallelen Spiegeln, die in einer Entfernung L voneinander stehen. Die einzige wesentliche Eigenschaft eines solchen Resonators ist bis jetzt, dass sie in „Längsrichtung“ Lasermoden trennt in Frequenzen von $c/2L$. Wir haben uns bis jetzt nicht darum gekümmert, wie das Feld im Inneren des Resonators in Richtungen quer zu den Verbindungslinien der Zentren beider Spiegel variiert. In der Tat haben wir angenommen, dass das Feld an jeder Stelle gleich, senkrecht in der Ebene, zur so genannten optischen Achse sei. In diesem Kapitel gehen wir von realen Laserresonatoren aus. Wir werden einige der wichtigsten Merkmale der tatsächlichen Eigenschaften von Laserresonatoren beschreiben, beginnend mit einem relativ einfachen Ansatz auf der Grundlage der geometrischen Optik und nach und nach arbeiten wir unseren Weg bis zu einer Beschreibung auf Basis der Maxwell-Gleichungen vor.

[Pet]ff.

Die meisten unserer Abhandlungen über Laserresonatoren sind davon ausgegangen, dass das Lasermedium *passiv* sei. Das heißt, die elektromagnetischen Modi des Laserresonators wurden so angenommen, dass diese gleich seien wie die Modi eines *leeren* Resonators ohne ein verstärkendes Medium. Dies ist eine gute Näherung, wenn der Verstärkungskoeffizient und der Brechungsindex des Mediums im gesamten Medium möglichst gleichmäßig verteilt sind. Das ist natürlich eine nützliche Annäherung, denn es ermöglicht Berechnungen, unabhängig vom Lasermedium. Glücklicherweise ist es oft eine genaue Näherung.

Abbildung 14.1a zeigt ein Lichtstrahl senkrecht zu den Spiegel, ein Resonator mit flachen, parallelen Spiegeln. Der Strahl behält ständig seinen Weg auch nach mehreren aufeinander folgenden Reflexionen zwischen den Spiegeln. Wenn die Spiegel jedoch nicht perfekt parallel sind, die Strahlung wird schließlich aus dem Resonator entweichen, wie in Abbildung 14.1b gezeigt. Die falsch ausgerichteten Resonatoren nach Abbildung 14.1b erfordern einen größeren Gewinn der Laserschwingungen als bei dem Resonator in Abbildung 14.1a.

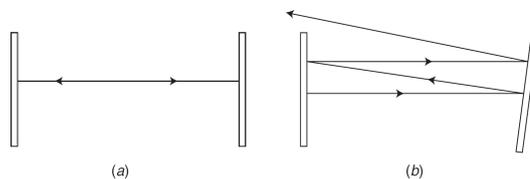


Abbildung 14.1 Ein Laser Resonator mit flachen, parallelen Spiegeln. Ein Lichtstrahl parallel zur optischen Achse bleibt in dem Resonator, wenn die Spiegel perfekt parallel sind (a). Sonst entweichen diese schließlich (b).

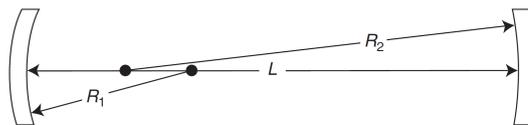


Abbildung 14.2 Ein Laserresonator mit zwei Spiegeln, gegeben durch dessen sphärischen Flächen mit den Krümmungsradien R_1 und R_2 .

Wir können davon ausgehen, dass ein Laserstrahl bei flachen Spiegeln selbst bei geringster Fehlstellung dieser irgendwann mal entweicht. Natürlich ist dies nicht wünschenswert, denn wir wollen einen praktisch nutzbaren und dauerhaften Laser. Abbildung 14.2 zeigt eine sehr häufig verwendete Art der Laserresonatoren, bestehend aus Spiegeln mit sphärischer Oberfläche. Dies ist die Art von Resonatoren bei den meisten kommerziell erhältlichen Lasern. In Abschnitt 14.3 werden sehen warum.

1.2 Strahlenmatrix

In der geometrischen Optik, der Beschreibung der Lichtwellenausbreitung wird der Begriff des Strahls genutzt. Man könnte ein Strahl definieren als die Normale auf jeden Punkt einer Wellenfront, so wie in Abbildung 14.3 gezeigt. Wir werden davon ausgehen, dass die Richtung eines Strahls in Richtung des Energieflusses zeigt. Das ist nicht die physikalische Bedeutung die „Länge“ von Strahlung sondern nur die Verdeutlichung der Richtung der Ausbreitung auf einen bestimmten Punkt bezogen. Wenn wir dieses Strahlenbild nutzen ignorieren wir jedoch die Polarisierung des Lichts Welle. Unser Strahlenbild ist eine grobe aber nützliche Darstellung der tatsächlichen Situation.

In diesem Abschnitt werden wir einen einfachen Formalismus für die Strahlenausbreitung erarbeiten. Dieser Formalismus erweist sich als geeignet für die Beschreibung eines *Gauß'schen* Lasers, wie in Abschnitt 14.5 beschrieben.

Im praktischen Bereich wird im Umgang mit Lichtwellen die Richtung, in die Strahlen sich mehr oder weniger in eine Richtung ausbreiten, als z -Richtung bezeichnet. Die Strahlen sehen wir in einem Punkt parallel zur z -Achse vereinigt. Jeder Punkt auf der Welle stellen wir uns vor als ein Strahl, mit seiner seitlichen Verschiebung $r(z)$, gemessen relativ zur z -Achse, und sein Winkel $r'(z)$ (siehe Abbildung 14.4).

$$r'(z) = \frac{d}{dz} \cdot r$$

Aufgrund der Annahme, der fast unidirektional Ausbreitung der Strahlung entlang der z -Achse, wird der Winkel $r'(z)$ wird sehr klein sein, so dass gilt (siehe auch Abbildung 14.4).

$$r'(\) = \tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$$

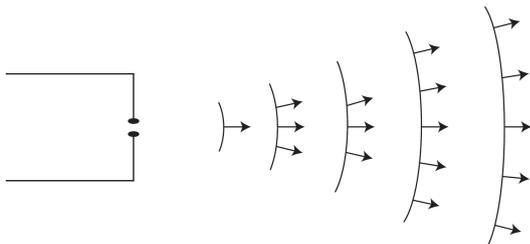


Abbildung 14.3 Strahlen einer Welle in Richtung der Ausbreitung.

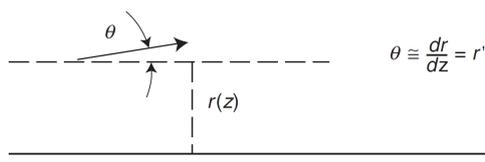


Abbildung 14.4 Ein Strahl zeichnet sich durch seinen seitlichen Abstand r und dessen Winkel r' aus, gemessen zur z -Achse.

Solche Strahlen werden *Paraxialstrahlen* genannt. Wir gehen davon aus, dass, wie es implizit in unserer Definition des Strahls genannt ist, die Größen Verschiebung r und Winkel r' zylindersymmetrisch zur z -Achse sind. Die Neigung eines Strahls wird positiv oder negativ, je nachdem, ob die Verschiebung r zu- oder abnehmend ist in Richtung der Ausbreitung.

Wir möchten nun herleiten die Veränderung von Verschiebung und Winkel eines Strahls an einem Punkt z bei der Verschiebung zu einem Punkt z' . Betrachten wir zum Beispiel den einfachsten Fall, der Ausbreitung im Vakuum von z_1 zu z_2 . Im Vakuum beobachtet man keine Richtungsänderung des Strahls, so das gilt (siehe Abbildung 14.5):

$$r(z_2) = r(z_1) + r'(z_1) \cdot (z_2 - z_1)$$

und

$$r'(z_2) = r'(z_1)$$

Die Gleichungen (14.2.3) und (14.2.4) können in Matrixnotation geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} r(z_2) \\ r'(z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z_2 - z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r(z_1) \\ r'(z_1) \end{bmatrix}$$

Ein Strahl ist vollständig durch die 2×1 -Matrix, oder dessen *Spaltenvektor* definiert.

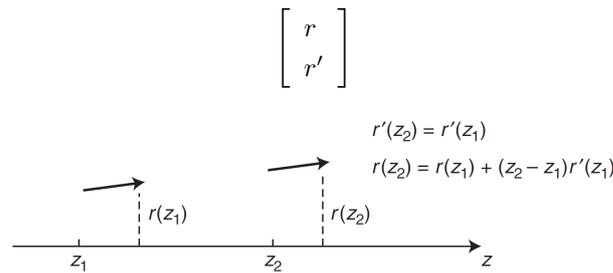


Abbildung 14.5 Die Transformation eines Strahls als Folge des freien Verschiebung über eine Entfernung von $z_2 - z_1$.

Die Gleichung (14.2.5) beschreibt die Relation des verschobenen Strahls (*final ray*)

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r_f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(z_2) \\ r'(z_2) \end{bmatrix}$$

auf den ersten Strahl (*initial ray*):

$$\begin{bmatrix} r_i \\ r_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(z_1) \\ r'(z_1) \end{bmatrix}$$

So, nach Gleichung (14.2.5) ist die Vakuumausbreitung eines Strahls gegeben über einen Abstand $d = z_2 - z_1$ durch die Matrixgleichung:

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r_f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_i \\ r_i' \end{bmatrix}$$

Bei gegebenen Ausgangsstrahl mit der Verschiebung r_i und dem Winkel r_i' sagt uns diese Gleichung, wie dieser Strahl sich verändert infolge der Ausbreitung über die Entfernung d .

Betrachten wir nun das interessante Beispiel der Transformation eines Paraxialstrahls durch eine dünne Linse der Brennweite f (Abbildung 14.6). Unmittelbar auf der rechten Seite der Linse besitzen die Strahlen eine seitliche Verschiebung r_f , welche gleich ist wie die ursprüngliche Verschiebung r_i auf der linken Seite:

$$r_f = r_i$$

Die Neigung des Strahls wird jedoch geändert durch die Linse. Über die Gleichung (14.2.10) für dünne Linsen erhalten wir mit der Objekt- und Bildentfernungen, sowie mit der Brennweite des Objektivs (Abb. 14.6):

$$r_f' = r_i' - \frac{r_i}{f}$$

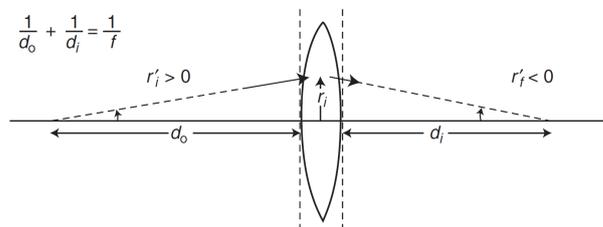


Abbildung 14.6 Die Strahlentransformation an einer dünnen Linse.

In Matrixnotation können die Gleichungen (14.2.9) und (14.2.10) in folgende Form geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r_f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_i \\ r_i' \end{bmatrix}$$

Ein weiteres Beispiel ist von Interesse für uns, nämlich den Fall für sphärischen Spiegel mit dem Krümmungsradius R . Die Verschiebung des Strahls ist die gleiche, unmittelbar vor und nach der

Reflexion aus dem Spiegel i. e. S. $r_f = r_i$. Die Neigung des Strahls nach Reflexion, jedoch ist (Abbildung 14.7)

$$r'_f = r'_i - \frac{2r_i}{R}$$

In Matrixnotation ist die Strahltransformation am sphärischen Spiegel durch die Gleichung (14.2.13) gegeben:

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix}$$

Es ist eine Festlegung der Bezeichnung von r' , dass $r' > 0$ gilt mit zunehmender Ausbreitung, sonst jedoch $r' < 0$. Diese Konvention für den Krümmungsradius R eines sphärischen Spiegels kann leicht geprüft werden, R ist positiv für einen konkaven Spiegel (Abbildung 14.7) und negativ für eine konvexen Spiegel. Auch die Brennweite f einer Linse ist positiv für eine Sammellinse (Abbildung 14.6) und negativ für eine Streulinse. Diese Aussage kann überprüft werden durch die Skizzen, wie sie in Abbildung 14.6 und 14.7. gezeigt sind. So gelten (14.2.11) und (14.2.13) auch für unterschiedliche Streulinsen und konvexe Spiegel, bzw. sofern f und R als negativ angenommen werden, für die anderen Fälle.

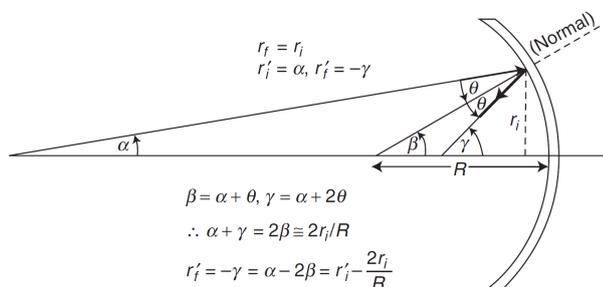


Abbildung 14.7 Paraxialstrahltransformation von einer sphärischen Spiegelfläche mit dem Krümmungsradius R . Das Verhältnis zwischen r'_f und r'_i wird durch die Anwendung des trigonometrischen Satzes erreicht, dass ein äußerer Winkel eines Dreiecks gleich ist der Summe der zwei gegenüberliegenden inneren Winkel, sowie der Näherung $\beta \approx 2r_i/R$ für Paraxialstrahlen.

Wir haben bisher die Transformation eines Strahls an drei verschiedenen „optischen Elementen“ betrachtet, erstens im leeren Raum mit der Länge d , zweitens an einer dünnen Linse mit der Brennweite f und drittens an einem sphärischen Spiegel mit dem Krümmungsradius R . Im Allgemeinen kann demnach die Strahltransformation an einem optischen Element beschrieben werden über die Matrixgleichung:

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix}$$

Die 2×2 -Matrix auf der rechten Seite der Gleichung ist der so genannte *Strahlmatrix* oder auch *ABCD-Matrix* für ein optisches Element. Die Gleichungen (14.2.8), (14.2.11) und (14.2.13) beschreiben die Strahlmatrizen durch die Länge d bei der Ausbreitung über ein Vakuum, an einer dünnen Linse mit der Brennweite f und einem sphärischen Spiegel mit dem Krümmungsradius R .

Lassen Sie uns überprüfen, welcher Art die Auswirkungen auf einen Strahl sind, wenn nach einem offenen Abschnitt der Länge d eine dünne Linse der Brennweite f folgt. Ein Strahl besitzt die Werte r_i und r'_i zunächst, dann nach dem offenen Abschnitt ist die Verschiebung r und die Neigung r' gegeben durch die Gleichung (14.2.8):

$$\begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix}$$

Dies ergibt die „anfängliche“ Strahlverschiebung und -steigung unmittelbar vor dem Durchgang durch die Linse. Die „endgültige“ Strahlverschiebung und -steigung ist daher (14.2.11)

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} r_f \\ r_{f'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_i \\ r_{i'} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} r_f \\ r_{f'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ -1/f & 1 - d/f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_i \\ r_{i'} \end{bmatrix}$$

Die Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & d \\ -1/f & 1 - d/f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ist daher die Strahlmatrix für kombinierte optische Systeme, bestehend aus einem offenen Abschnitt der Länge d , gefolgt von einer dünnen Linse der Brennweite f . Es ist das Produkt der Strahlmatrizen für eine offene Strecke und einer Linse. Daraus folgt, dass, wenn wir eine beliebige Anzahl von optischen Elementen in einigen Folge reihen, so ist die Strahlmatrix für das System mit allen den optischen Elementen das Matrixprodukt der einzelnen Strahlmatrizen der optischen Einzelemente. Da das Matrixprodukt $M_1 \cdot M_2$ in der Regel nicht das gleiche wie das Produkt von $M_2 \cdot M_1$ ist. Die Reihenfolge der Matrizen mit der das Produkt gebildet wird ist wichtig. Somit ist das Strahlenmatrixsystem gegeben durch die Strahlenmatrix des ersten optischen Elements, multipliziert *auf der linken Seite* durch die Strahlenmatrix des zweiten optischen Elements, multipliziert *auf der linken Seite* durch die Strahlenmatrix des dritten Element usw. Der Leser kann nun leicht zeigen, dass zum Beispiel die Strahlenmatrix für ein System, bestehend aus einem offenen Abschnitt gefolgt von einer dünnen Linse sich unterscheidet von der Strahlenmatrix für eine dünne Linse, gefolgt von einem offenen Abschnitt (Problem 14.1). Das bedeutet, dass die Auswirkungen des Systems auf einen Strahl unterschiedlich sind.

1.3 Resonatorstabilität

Eine der einfachsten, aber auch eine der wichtigen Fragen im Zusammenhang mit einem Laserresonator ist, ob dieser *stabil* ist oder nicht. Um zu verdeutlichen was das bedeutet, stellt man sich vor wie ein beliebiger (paraxialer) Strahl hin und her läuft zwischen den zwei Spiegeln eines Resonators. Wenn der Strahl nach wie vor innerhalb des Resonators nach einer ausreichend großen Zahl von Reflexionen ist, ist der Resonator stabil. Wenn, wie auch immer der Strahl nach einer noch so großen Anzahl von Reflexionen entweicht, ist der Resonator instabil. Die Abbildung 14.1b zum Beispiel zeigt einen falsch ausgerichteten Spiegel, der Resonator ist instabil. Im Allgemeinen kann das Kriterium für die Stabilität eines Laserresonators ausgedrückt werden durch die Krümmungsradien der Spiegel und durch den Abstand zwischen diesen. Wir werden nun herleiten das Stabilitätskriterium mit Hilfe der *ABCD*-Matrix.

Betrachten Sie den skizzierten Resonator in Abbildung 14.2 bestehend aus Spiegeln mit den Radien R_1 und R_2 getrennt durch einen Abstand L . Wie dort dargestellt, sind die Spiegel konkav. Unsere Analyse wird sich aber auch auf den Fall von konvexen Spiegeln erstrecken, wobei daran erinnert sei, dass ein konvexer Spiegel durch die Konvention einen negativen Krümmungsradius besitzt. Außerdem stellen wir fest, dass auch ein flacher Spiegel als ein sphärischer Spiegel mit einem unendlichen Krümmungsradius angesehen werden kann.

Stellen Sie sich vor, ein Strahl startet am linken Spiegel der Abbildung 14.2. Nach einer Rundreise durch den Resonator hat die Strahlung sich durch den geraden Abschnitt der Länge L , einem sphärischen Spiegel mit dem Krümmungsradius R_2 , zurück den geraden Abschnitt der Länge L und schließlich am sphärischen Spiegel mit dem Krümmungsradius R_1 fortbewegt. Die unten stehende Strahlmatrix beschreibt die Strahltransformation infolge einer Rundreise durch den Resonator:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{2L}{R_2} & 2L - \frac{2L^2}{R_2} \\ \frac{4L}{R_1 R_2} - \frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2} & 1 - \frac{2L}{R_2} - \frac{4L}{R_1} + \frac{4L^2}{R_1 R_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nach N -Rundreisen durch den Resonator gilt dann mit dem ersten Strahl (Verschiebung r_i und Neigung r'_i) transformiert zum finalen Strahl mit der Verschiebung r_N und der Neigung r'_N .

$$\begin{bmatrix} r_N \\ r'_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N \cdot \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix}$$

Wobei die Strahlmatrix (*ABCD*) definiert ist durch (14.3.1). Der Strahlmatrix (14.3.1) besitzt folgende Determinante¹:

$$AD - BC = 1$$

Es wird der Winkel θ definiert und genutzt:

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \cdot (A + D)$$

Es kann gezeigt werden (siehe dazu weiter unten den Einschub Nachweis)² das:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N = \frac{1}{\sin \theta} \cdot \begin{bmatrix} A \cdot \sin N \cdot \theta - \sin(N-1) \cdot \theta & B \cdot \sin N \cdot \theta \\ C \cdot \sin N \cdot \theta & D \cdot \sin N \cdot \theta - \sin(N-1) \cdot \theta \end{bmatrix}$$

¹Der einfachste Weg dies zu überprüfen ist dadurch möglich, dass man die Strahlenmatrix (14.3.1) betrachtet. So ist diese ein Produkt von vier Matrizen, mit jeweils der Determinante eins. Da die Determinante eines Matrizenprodukts gleich ist dem Produkt der Einzeldeterminanten folgt daraus (14.3.3)

²Einschub Nachweis: Das Ergebnis (14.3.5) für eine 2×2 -Matrix erfüllt (14.3.3) und wird manchmal auch „Sylvesters Theorem“ genannt. Es kann durch Induktion bewiesen werden. So gilt (14.3.5) für $N = 1$ und wir versuchen zu zeigen, dass wenn es für ein festes, beliebiges N gilt, muss es auch für $N + 1$ richtig sein. Wenn wir dies zeigen können, ist das Sylvester Theorem bewiesen.

Nehmen wir an, dass (14.3.5) gilt, so ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{N+1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N$$

Es folgt jetzt aus Gleichung (14.3.2):

$$\begin{bmatrix} r_N \\ r_N' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \cdot \sin N \cdot \theta - \sin(N-1) \cdot \theta & B \cdot \sin N \cdot \theta \\ C \cdot \sin N \cdot \theta & D \cdot \sin N \cdot \theta - \sin(N-1) \cdot \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_i \\ r_i' \end{bmatrix}$$

wobei durch (14.3.4) und (14.3.1) der Term $\cos \theta$ definiert wird:

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{2L}{R_2} + 1 - \frac{2L}{R_2} - \frac{4L}{R_1} + \frac{4L^2}{R_1 R_2} \right)$$

⇒

$$\cos \theta = 1 - \frac{2L}{R_1} - \frac{2L}{R_2} + \frac{2L^2}{R_1 R_2}$$

Die Gleichung (14.3.9) gibt die Verschiebung und die Neigung eines Strahls nach N Rundreisen durch den Resonator an. Wir beobachten, dass r_N (und r_N') endlich bleiben solange θ ein realer Wert ist. Wenn θ eine komplexe Zahl ist, dann wird $\sin N \cdot \theta = (e^{+j \cdot N \cdot \theta} - e^{-j \cdot N \cdot \theta}) / 2j$ sehr groß für große N und in der Tat divergiert $N \rightarrow \infty$. Mit anderen Worten, wenn θ nicht rein real ist, die Verschiebung r_N selbst divergiert, i. e. S. der Strahl wird aus dem Resonator entweichen. Damit ist die Voraussetzung für die Stabilität eines Resonator gegeben, was für θ bedeutet, es muss real sein bzw. es gilt $|\cos \theta| \leq 1$, aus (14.3.10) folgt:

⇒

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{N+1} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \cdot \sin N \cdot \theta - \sin(N-1) \cdot \theta & B \cdot \sin N \cdot \theta \\ C \cdot \sin N \cdot \theta & D \cdot \sin N \cdot \theta - \sin(N-1) \cdot \theta \end{bmatrix}$$

⇒

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{N+1} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} (A^2 + BC) \cdot \sin N \cdot \theta - A \cdot \sin(N-1) \cdot \theta & B \cdot (A + D) \cdot \sin N \cdot \theta - B \cdot \sin(N-1) \cdot \theta \\ C \cdot (A + D) \cdot \sin N \cdot \theta - C \cdot \sin(N-1) \cdot \theta & (BC + D^2) \cdot \sin N \cdot \theta - D \cdot \sin(N-1) \cdot \theta \end{bmatrix}$$

Mit (14.3.3) und (14.3.4) sehen wir, dass das (1,1)- Element dieser Matrix ist:

$$\begin{aligned} & (A^2 + BC) \cdot \sin N \cdot \theta - A \cdot \sin(N-1) \cdot \theta \\ &= (A^2 + AD - 1) \cdot \sin N \cdot \theta - A \cdot \sin(N-1) \cdot \theta \\ &= A \cdot (A + D) \cdot \sin N \cdot \theta - \sin N \cdot \theta - A \cdot \sin(N-1) \cdot \theta \\ &= 2A \cdot \cos \theta \cdot \sin N \cdot \theta - \sin N \cdot \theta - A \cdot \sin(N-1) \cdot \theta \\ &= 2A \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sin(N+1) \cdot \theta + \frac{1}{2} \cdot \sin(N-1) \cdot \theta \right) - \sin N \cdot \theta - A \cdot \sin(N-1) \cdot \theta \\ &= A \cdot \sin(N+1) \cdot \theta - \sin N \cdot \theta \end{aligned}$$

Die verbleibenden drei Elemente aus (14.3.6) werden analog behandelt. Wir erhalten:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{N+1} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \cdot \sin N \cdot \theta - \sin(N-1) \cdot \theta & B \cdot \sin N \cdot \theta \\ C \cdot \sin N \cdot \theta & D \cdot \sin N \cdot \theta - \sin(N-1) \cdot \theta \end{bmatrix}$$

Aber das ist nun mal die Gleichung (14.3.5) mit N ersetzt durch $N + 1$. So gilt (14.3.5) auch für $N = 1$, und wir haben gerade gezeigt, dass, wenn es gilt für alle N , dann muss es auch richtig sein für $N + 1$. Dies beweist das Theorem von Sylvester.

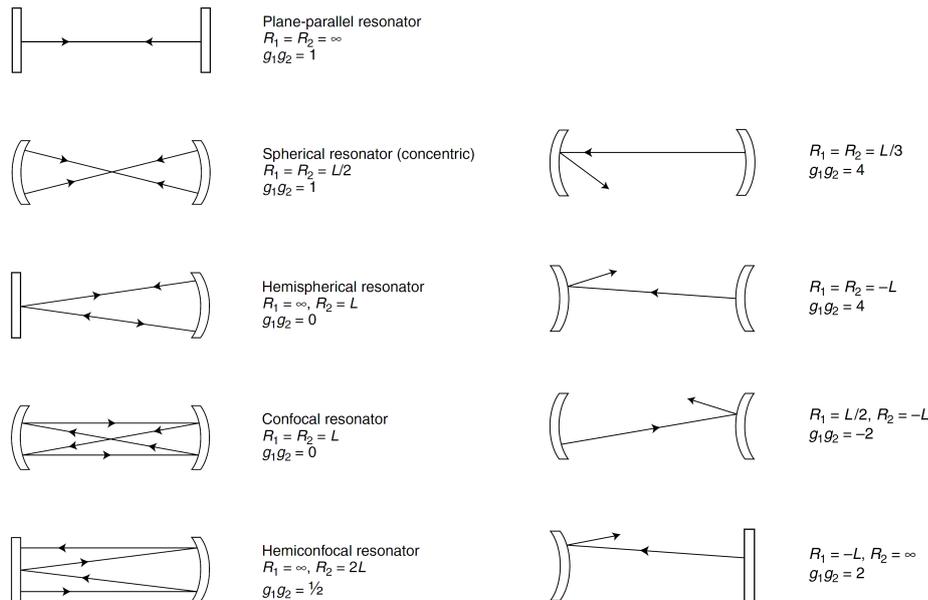


Abbildung 14.8 Beispiele für stabile Resonatoren. Abbildung 14.9 Beispiele für instabilen Resonatoren.

$$\begin{aligned}
 & -1 \leq 1 - \frac{2L}{R_1} - \frac{2L}{R_2} + \frac{2L^2}{R_1 R_2} \leq +1 \\
 \Rightarrow & \\
 & -2 \leq -\frac{2L}{R_1} - \frac{2L}{R_2} + \frac{2L^2}{R_1 R_2} \leq 0 \\
 \Rightarrow & \\
 & 0 \leq 1 - \frac{L}{R_1} - \frac{L}{R_2} + \frac{L^2}{R_1 R_2} \leq 1
 \end{aligned}$$

Diese Stabilitätsbedingung wird in der Laserliteratur genutzt:

$$0 \leq g_1 \cdot g_2 \leq 1$$

Wobei:

$$g_1 = 1 - \frac{L}{R_1} \quad g_2 = 1 - \frac{L}{R_2}$$

Diese nennt man die *g-Parameter* des Resonators. Wenn die *g-Parameter* so groß sind, dass die Gleichung (14.3.12) erfüllt ist, ist der Resonator stabil. Wenn $g_1 \cdot g_2 < 0$ oder $g_1 \cdot g_2 > 1$ ist der Resonator instabil.

Der Strahlmatrixansatz ermöglicht es uns, sofort prüfen, ob eine bestimmter Resonator stabil ist, also ohne dass eine Spur an Strahlung, wie in Abbildung 14.1b dargestellt, entweicht. Ob ein bestimmter Resonator stabil oder instabil ist, hängt nur ab von den Radien der Spiegelkrümmungen dem Abstand zwischen diesen. Die Abbildungen 14.8 und 14.9 zeigen Beispiele für stabile und instabile Resonatoren. Der Leser kann leicht selbst überprüfen, für jeden Fall, ob der Resonator stabil oder instabil ist (Problem 14.2).

Unsere Analyse der Stabilität hat Reflexionen an perfekten Spiegeln angenommen. In der Realität wird natürlich eine gewisse Menge an Energie aus dem Inneren des Lasers entweichen, da die Spiegel nur unvollkommen reflektieren. Wir haben bereits festgestellt (Kapitel 10), dass die Auskopplung durch einen (oder durch beide) Spiegel eben ein Verlustmechanismus darstellt. Zusätzlich zu solchen Verlustmechanismen kommen Streuung oder Absorption dazu. Ein Laser mit instabilen Resonatoren haben große Verluste durch den Verlust von Strahlung *nach* den Spiegeln, wie gezeigt an den Strahlenbildern in den Abbildungen 14.1b und 14.9. Infolge dieser zusätzlichen Verlustfaktoren, erfordern instabile Resonatoren typischerweise Lasermedien mit einem höheren Gewinn um die Laserstrahlung erhalten zu können. Das soll nicht heißen, dass instabile Resonatoren grundsätzlich vermieden werden sollten. Im Gegenteil, instabile Resonatoren bieten verschiedene Vorteile für bestimmte leistungsstarke Laser (Abschnitt 14.13). In handelsüblichen Geräten wie kommerzielle He-Ne-Laser sind jedoch stabile Resonatoren die Regel.

Die planparallelen Resonatoren der Abbildung 14.1 sind nicht praktisch geeignet für Laser, weil sie leicht instabil werden mit nur einer leichten Fehlstellung der Spiegel. Die Resonatoren der meisten Laser haben mindestens eine sphärische Spiegelfläche. Der hemisphärische Resonator in Abbildung 14.8 zum Beispiel, ist vielleicht das am häufigsten verwendete Design für He-Ne-Laser.

2 Instabile Resonatoren für Hochleistungslaser

Unser Schwerpunkt auf stabile Laserresonatoren soll nicht zu bedeuten, dass *instabile* Resonatoren keine praktische Bedeutung haben. Im Gegenteil, instabile Resonatoren besitzen bestimmte Vorteile und sie sind von wesentlicher Bedeutung für die Konstruktion von vielen wichtigen leistungsstarken Lasern.

Stabile Resonatoren haben ein paar Nachteile, bei der Nutzung leistungsstarker Geräte. Ein großer Nachteil ist, dass der Arbeitsbereich der stabilen Resonatoren sind in der Regel sich konzentrieren in sehr dünnen, nadelähnlichen Regionen innerhalb der Resonator. Daher wird ein sehr großer Teil der Verstärkungswirkung des Mediums nicht genutzt, was natürlich ein Problem darstellt, wenn eine hohe Leistung aus dem Laser erwünscht ist. Eine Mode mit Gaußscher Verteilung in einem stabilen Resonator, zum Beispiel, hat eine Strahlgröße von $\sqrt{\lambda \cdot L/\pi}$ [siehe Gleichung (14.7.21)]. Für CO₂-Laser mit $\lambda = 10,6\mu\text{m}$ und $L = 1\text{m}$:

$$\sqrt{\frac{\lambda \cdot L}{\pi}} = 1,8\text{mm}$$

Was eine typische „Strahlgröße“ für Moden Gaußscher Verteilung mit stabilen Resonatoren darstellt.

Instabile Resonatoren jedoch beinhalten in der Regel eine viel größere Menge an Moden und können somit besser das Medium als Verstärker nutzen. Abbildung 14.33 zeigt ein wichtiges praktisches Beispiel für einen instabile Resonator, einen so genannten positiven, (weil $g_1 \cdot g_2 > 1$) kofokalen Resonator. Wie bereits erwähnt, das innere Feld füllt einen großen Teil des Laserraumes aus und kann durch den Einsatz größerer Spiegel verbreitert werden. Die „Vergrößerung“ M ist nur eine Funktion von den g -Parametern der Spiegel.

Iterative Berechnungen der Fox-Li-Art zeigen, dass die Art und Weise der instabilen Resonatoren, wie in Abbildung 14.33 gezeigt, deutlich nichtgausscher Art sind. In erster Näherung, die niedrigste, ausgekoppelte Mode hat eine fast einheitliche Intensität auf den Spiegeln. Der ausgegebene Strahl für diesen Resonator wird in Abbildung 14.33 gezeigt und ist ein gleichförmiger (doughnutartiger) Ring im *nahen Bereich* des Resonators.

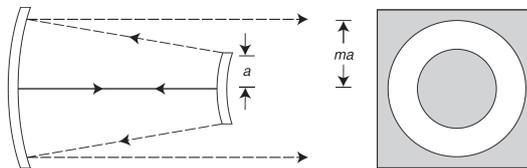


Abbildung 14.33 Eine positive, ($g_1 \cdot g_2 > 1$) kofokaler, instabiler Resonator. Der Nahfeldbereich ergibt einen gebündelten, ringförmigen Strahl.

Im Fernfeldbereich hat dieser Strahl hat eine zentralen, hellen Fleck auf Achse. Im Randbereich ist ein Airymuster zu erkennen mit einer Konzentration der Intensität im zentralen Lichtfleck.

Instabile Resonatoren bieten weitere Vorteile zusätzlich zu ihrer großen Anzahl an Moden. Zum Beispiel neigen sie dazu, sich zu rentieren, wenn größere Leistungen vorhanden sind, diese auf den niedrigsten Verlustmodus zu verteilen als auf mehreren (oder viele) andere Modi. Diese Eigenschaft teilen nicht im Allgemein alle stabile Laserresonatoren ist aber ein wichtiger Vorteil in vielen Anwendungen. Darüber hinaus instabile Laserresonatoren nutzen *die gesamte reflektierende Optik*. Das heißt, die Leistung geht nicht durch alle Spiegel gleichmäßig hindurch, sondern entweicht lediglich um die Spiegelkanten. Bei hoher Leistung, sind Spiegelschäden ist ein wichtiger Aspekt, da die Spiegel sich oft ohne große Schwierigkeiten hier wasserkühlen lassen. Dieses Problem der Spiegelbeschädigungen sowie thermische Verzerrung sind nicht so einfach unüberwindbar in stabilen Laserresonatoren, bei Nutzung einer transmissiven Auskopplung über halbdurchlässige Gläser.

Die fundamentale Theorie der instabilen Laserresonatoren ist nicht schwieriger als die der stabilen Laserresonatoren. Aus diesem Grund und weil stabile Resonatoren häufiger genutzt werden, werden wir hier nicht in jedem Detail die Modenmerkmale instabiler Resonatoren getrennt beschreiben.

Alle Rechte und Pflichten bei den Artikelautor(en).
Übersetzung: Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.
Im Zweifel gilt die englische Fassung.
Keine kommerzielle Nutzung!

3 Originaltext

Dokument nächste Seite folgend.

ℒ_Tℒ_EX 2_ε

14 LASER RESONATORS

14.1 INTRODUCTION

Until now we have supposed a laser resonator to consist of two highly reflecting, flat, parallel mirrors separated by some distance L . The only important property of such a resonator for our purposes thus far is that it has “longitudinal” modes separated in frequency by $c/2L$. We have not concerned ourselves with how the field inside the resonator varies in directions transverse to the line joining the centers of the mirrors. In fact we have assumed the field to be uniform in any plane perpendicular to this so-called optical axis. In this chapter we will consider laser resonators more realistically. We will consider some of the important characteristics of actual laser resonators, beginning with a rather simple approach based on geometrical optics, and gradually working our way up to a description based on Maxwell’s equations.

Most of our treatment of laser resonators will assume that the laser medium is *passive*. That is, the electromagnetic modes of the laser resonator will be assumed to be the same as the modes of an *empty* resonator having no gain medium. This is a good approximation if the gain coefficient and refractive index of the medium are fairly uniform throughout the medium. This is obviously a useful approximation, because it allows us to consider laser resonators independently of the laser medium. Fortunately it is often an accurate approximation.

Figure 14.1*a* shows a light ray normal to the mirrors of a resonator with flat, parallel mirrors. The ray keeps retracing its path on successive reflections from the mirrors. If the mirrors are not perfectly parallel, however, the ray will eventually escape from the resonator, as indicated in Figure 14.1*b*. The misaligned resonator of Figure 14.1*b* requires greater gain for laser oscillation than the resonator of Figure 14.1*a*. We might find, for instance, that a laser with flat mirrors turns off

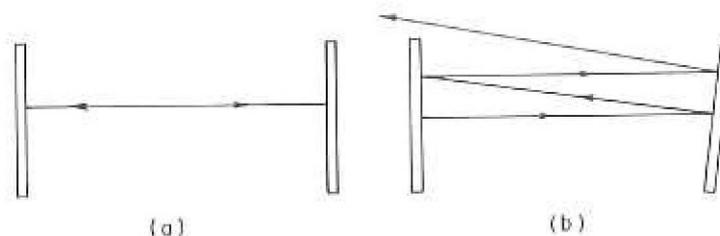


Figure 14.1 A laser resonator with flat, parallel mirrors. A light ray parallel to the optical axis remains inside the resonator if the mirrors are perfectly parallel (*a*). Otherwise it eventually escapes (*b*).



Figure 14.2 A laser resonator with mirrors that are spherical surfaces with radii of curvature R_1 and R_2 .

(i.e., laser action ceases) at the slightest misalignment of the mirrors. Obviously this is undesirable if we wish to construct a practical and durable laser. Figure 14.2 shows a much more commonly used type of laser resonator, consisting of mirrors with spherical surfaces. This is the type of resonator used in most commercially available lasers. In Section 14.3 we will see why.

14.2 THE RAY MATRIX

In geometrical optics light propagation is described in terms of rays. We may define a ray at each point on a wave as an arrow drawn normal to the wave front, (Figure 14.3). We will assume that the direction of a ray is the direction of energy flow. There is no physical significance to the “length” of a ray; a ray merely represents a direction of propagation at a given point. When we adopt this ray picture we are ignoring the polarization of the light waves. Our ray picture is a crude but useful representation of the actual physical situation.

In this section we will develop a convenient formalism for ray propagation. This formalism will turn out to be appropriate for the description of *Gaussian* laser beams, which are discussed in Section 14.5.

In situations of practical interest we are dealing with light waves traveling more or less in a single direction, which we will call the z direction. The rays we envision point almost parallel to the z axis. At any point on the wave we imagine a ray having a lateral displacement $r(z)$, measured from the z axis, and a slope (Figure 14.4)

$$r'(z) = \frac{dr}{dz} \quad (14.2.1)$$

Because of our assumption of nearly unidirectional propagation along z , the slope $r'(z)$ of a ray will be very small, so that (Figure 14.4)

$$r'(z) = \tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta \quad (14.2.2)$$



Figure 14.3 Rays drawn on a wave represent the direction of propagation.



Figure 14.4 A ray is characterized by its displacement r and slope r' measured from some z axis.

Such rays are called *paraxial rays*. We will assume, as is implicit in our definition of the ray displacement r and slope r' , that we have cylindrical symmetry about the z axis. The slope of a ray is taken to be positive or negative depending whether the displacement r is increasing or decreasing in the direction of propagation.

We would like to relate the displacement and slope of a ray at a point z to the displacement and slope at a point z' . Consider, for example, the simple case of vacuum propagation from z_1 to z_2 . In vacuum there is nothing to change the direction of a ray, so we have (Figure 14.5):

$$r(z_2) = r(z_1) + r'(z_1)(z_2 - z_1) \tag{14.2.3}$$

and

$$r'(z_2) = r'(z_1) \tag{14.2.4}$$

In matrix notation we may write Eqs. (14.2.3) and (14.2.4) as

$$\begin{bmatrix} r(z_2) \\ r'(z_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z_2 - z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(z_1) \\ r'(z_1) \end{bmatrix} \tag{14.2.5}$$

A ray is completely characterized by the 2×1 matrix, or *column vector*,

$$\begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix}$$

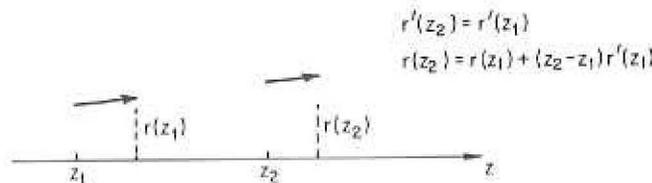


Figure 14.5 The transformation of a ray as a result of free propagation over a distance $z_2 - z_1$.

and Eq. (14.2.5) relates the *final ray*

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(z_2) \\ r'(z_2) \end{bmatrix} \quad (14.2.6)$$

to the *initial ray*

$$\begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(z_1) \\ r'(z_1) \end{bmatrix} \quad (14.2.7)$$

Thus, according to Eq. (14.2.5), the vacuum propagation of a ray through a distance $d = z_2 - z_1$ is described by the matrix equation

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix} \quad (14.2.8)$$

Given the initial ray with displacement r_i and slope r'_i , this equation tells us how that ray is modified by propagation through a distance d .

Consider next the more interesting example of the transformation of a (paraxial) ray by a thin lens of focal length f (Figure 14.6). Immediately to the right of the lens the ray's lateral displacement r_f is the same as the initial displacement r_i immediately to the left:

$$r_f = r_i \quad (14.2.9)$$

The slope of the ray, however, is changed by the lens. From the thin lens equation relating the object and image distances with the focal length of the lens, we obtain (Figure 14.6)

$$r'_f = r'_i - \frac{r_i}{f} \quad (14.2.10)$$

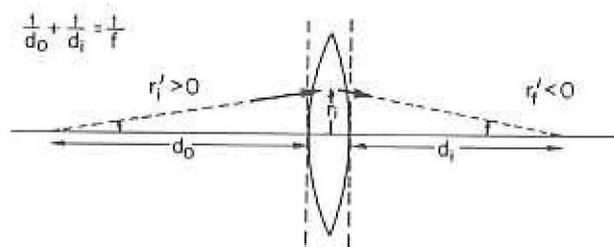


Figure 14.6 Ray transformation by a thin lens.

In matrix notation, Eqs. (14.2.9) and (14.2.10) take the form

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r_f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r_i' \end{bmatrix} \quad (14.2.11)$$

One more example will be of interest to us, namely, the case of a spherical mirror with radius of curvature R . The displacement of the ray is the same immediately before and after reflection from the mirror, i.e., $r_f = r_i$. The slope of the ray after reflection, however, is (Figure 14.7)

$$r_f' = r_i' - \frac{2r_i}{R} \quad (14.2.12)$$

In matrix notation, therefore, the ray transformation by the spherical mirror is given by the equation

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r_f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r_i' \end{bmatrix} \quad (14.2.13)$$

There is a sign convention for r' , namely, $r' > 0$ if r is increasing with propagation, $r' < 0$ otherwise. With this in mind, our sign convention for the radius of curvature R of a spherical mirror is easily checked: R is positive for a concave mirror (Figure 14.7) and negative for a convex mirror. Similarly the focal length f of a lens is positive for a converging lens (Figure 14.6) and negative for a diverging lens. These statements may be verified by making sketches like those in Figures 14.6 and 14.7. Thus (14.2.11) and (14.2.13) apply also to diverging lenses

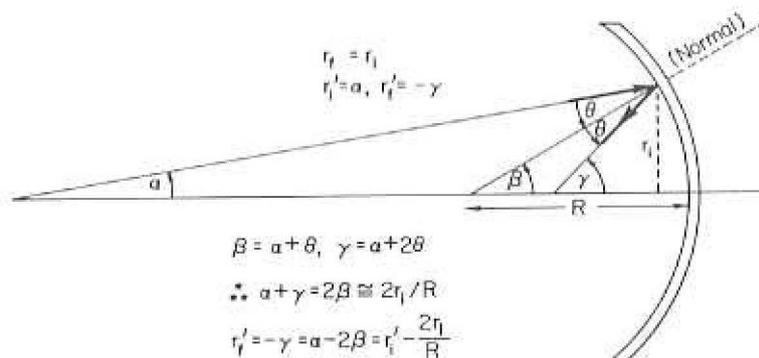


Figure 14.7 Paraxial ray transformation by a spherical mirror surface with radius of curvature R . The relation between r_i' and r_f' is obtained by applying the trigonometric theorem that an exterior angle of a triangle equals the sum of the two opposite interior angles, and the approximation $\beta \approx 2r_i/R$ that holds for paraxial rays.

and convex mirrors, respectively, provided f and R are taken to be negative in those cases.

We have considered thus far the transformation of a ray by three different "optical elements"—empty space of length d , a thin lens of focal length f , and a spherical mirror of radius of curvature R . In general an optical element will transform a ray according to the matrix equation

$$\begin{bmatrix} r_f \\ r'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix} \quad (14.2.14)$$

The 2×2 matrix on the right-hand side of this equation is called the *ray matrix*, or *ABCD matrix*, for the optical element. Equations (14.2.8), (14.2.11), and (14.2.13) give the ray matrices for a straight section of length d , a thin lens of focal length f , and a spherical mirror of radius of curvature R , respectively.

Let us consider the effect on a ray of an open path section of length d followed by a thin lens of focal length f . If a ray has displacement r_i and slope r'_i initially, then after the open section of propagation it has displacement r and slope r' given by Eq. (14.2.8):

$$\begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix} \quad (14.2.15)$$

This gives the "initial" ray displacement and slope immediately before passage through the lens. The "final" ray displacement and slope are therefore given by Eq. (14.2.11):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r_f \\ r'_f \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ r' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & d \\ -1/f & 1 - d/f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14.2.16)$$

The matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & d \\ -1/f & 1 - d/f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14.2.17)$$

is therefore the ray matrix for the combined optical system consisting of an open section of length d followed by a thin lens of focal length f . It is the product of

the ray matrices for an open section and a lens. It follows that if we have any number of optical elements in some sequence, then the ray matrix for the system comprising all these elements is the matrix product of the ray matrices of the individual elements. Since the matrix product $M_1 M_2$ is in general not the same as $M_2 M_1$, the order of the matrices in the product is important. Thus the system ray matrix is the ray matrix of the first optical element encountered, multiplied *on the left* by the ray matrix of the second optical element, multiplied *on the left* by the ray matrix of the third element, etc. The reader may easily show, for instance, that the ray matrix for the system consisting of an open section followed by a thin lens is different from the ray matrix for a thin lens followed by an open section (Problem 14.1). This means, of course, that the effects of the two systems on a ray are different.

14.3 RESONATOR STABILITY

One of the simplest but most important questions concerning a laser resonator is whether it is *stable*. To see what this means, consider an arbitrary (paraxial) ray bouncing back and forth between the mirrors of a resonator. If the ray remains within the resonator, the resonator is said to be stable. If, however, the ray escapes from the resonator after a sufficiently large number of reflections, the resonator is unstable. Figure 14.1*b*, for example, shows that a misaligned flat-mirror resonator is unstable. In general a stability criterion for a laser resonator can be expressed in terms of the radii of curvature of the mirrors and the distance separating the mirrors. We will now derive this stability criterion with the aid of the *ABCD* matrix.

Consider the resonator sketched in Figure 14.2, consisting of mirrors of radii of curvature R_1 and R_2 , separated by a distance L . As drawn, the mirrors are concave. Our analysis, however, will apply also to the case of convex mirrors if we recall that a convex mirror by convention has a negative radius of curvature. We note also that a flat mirror may be regarded as a spherical mirror surface with an infinite radius of curvature.

Imagine a ray starting at the left mirror of Figure 14.2. After a round trip through the resonator, this ray will have been transformed by a straight section of length L , a spherical mirror of radius of curvature R_2 , another straight section of length L , and finally a spherical mirror of radius of curvature R_1 . The ray matrix describing the ray transformation by a round trip through the resonator is

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{2L}{R_2} & 2L - \frac{2L^2}{R_2} \\ \frac{4L}{R_1 R_2} - \frac{2}{R_1} - \frac{2}{R_2} & 1 - \frac{2L}{R_2} - \frac{4L}{R_1} + \frac{4L^2}{R_1 R_2} \end{bmatrix} \quad (14.3.1) \end{aligned}$$

After N round trips through the resonator, therefore, the initial ray with displacement r_i and slope r_i' is transformed to the ray with displacement r_N and slope r_N' given by

$$\begin{bmatrix} r_N \\ r_N' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N \begin{bmatrix} r_i \\ r_i' \end{bmatrix} \quad (14.3.2)$$

where the ray ($ABCD$) matrix is defined by (14.3.1). The ray matrix (14.3.1) has determinant¹

$$AD - BC = 1 \quad (14.3.3)$$

Using this fact, and defining an angle θ by

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(A + D) \quad (14.3.4)$$

it may be shown (see below) that

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N = \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} A \sin N\theta - \sin(N-1)\theta & B \sin N\theta \\ C \sin N\theta & D \sin N\theta - \sin(N-1)\theta \end{bmatrix} \quad (14.3.5)$$

- The result (14.3.5) for a 2×2 matrix satisfying (14.3.3) is sometimes called "Sylvester's theorem." It may be proved by induction: it obviously holds for the case $N = 1$, and so we try to show that if it holds for a single given (but arbitrary) N it must hold also for $N + 1$. If we can show this, Sylvester's theorem is proved.

Thus let us assume that (14.3.5) holds, so that

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{N+1} &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \sin N\theta - \sin(N-1)\theta & B \sin N\theta \\ C \sin N\theta & D \sin N\theta - \sin(N-1)\theta \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} (A^2 + BC) \sin N\theta - A \sin(N-1)\theta & B(A+D) \sin N\theta - B \sin(N-1)\theta \\ C(A+D) \sin N\theta - C \sin(N-1)\theta & (BC + D^2) \sin N\theta - D \sin(N-1)\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14.3.6)$$

1. The simplest way to check this is to note that the ray matrix (14.3.1) is a product of four matrices, each having determinant equal to one. Since the determinant of the product of matrices is equal to the product of the determinants, (14.3.3) follows.

Using (14.3.3) and (14.3.4), we see that the (1, 1) element of this matrix is

$$\begin{aligned}
 & (A^2 + BC) \sin N\theta - A \sin (N-1)\theta \\
 &= (A^2 + AD - 1) \sin N\theta - A \sin (N-1)\theta \\
 &= A(A + D) \sin N\theta - \sin N\theta - A \sin (N-1)\theta \\
 &= 2A \sin N\theta \cos \theta - \sin N\theta - A \sin (N-1)\theta \\
 &= 2A \left[\frac{1}{2} \sin (N+1)\theta + \frac{1}{2} \sin (N-1)\theta \right] - \sin N\theta - A \sin (N-1)\theta \\
 &= A \sin (N+1)\theta - \sin N\theta
 \end{aligned} \tag{14.3.7}$$

The remaining three matrix elements of (14.3.6) may be evaluated similarly. We obtain

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{N+1} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} A \sin (N+1)\theta - \sin N\theta & B \sin (N+1)\theta \\ C \sin (N+1)\theta & D \sin (N+1)\theta - \sin N\theta \end{bmatrix} \tag{14.3.8}$$

But this is just Eq. (14.3.5) with N replaced by $N+1$. Thus (14.3.5) is true for $N=1$, and we have just shown that if it is true for any N , then it must be true also for $N+1$. This proves Sylvester's theorem. ■

It now follows from Eq. (14.3.2) that

$$\begin{bmatrix} r_N \\ r'_N \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin \theta} \begin{bmatrix} A \sin N\theta - \sin (N-1)\theta & B \sin N\theta \\ C \sin N\theta & D \sin N\theta - \sin (N-1)\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r'_i \end{bmatrix} \tag{14.3.9}$$

where, from (14.3.4) and (14.3.1),

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2L}{R_2} + 1 - \frac{2L}{R_2} - \frac{4L}{R_1} + \frac{4L^2}{R_1 R_2} \right) \\
 &= 1 - \frac{2L}{R_1} - \frac{2L}{R_2} + \frac{2L^2}{R_1 R_2}
 \end{aligned} \tag{14.3.10}$$

Equation (14.3.9) gives the ray displacement and slope after N round trips through the resonator. We observe that r_N (and r'_N) stays finite as long as θ is real. If θ is a complex number, however, then $\sin N\theta = (e^{iN\theta} - e^{-iN\theta})/2i$ can be very large for large N , and in fact diverges as $N \rightarrow \infty$. In other words, if θ is not purely real, r_N itself will diverge, i.e., the ray will escape from the confines of the resonator. Thus the condition for resonator stability is for θ to be real, which means that $|\cos \theta| \leq 1$, or, from (14.3.10),



plane-parallel resonator
 $R_1 = R_2 = \infty$
 $g_1 g_2 = 1$



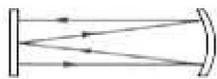
spherical resonator (concentric)
 $R_1 = R_2 = L/2$
 $g_1 g_2 = 1$



hemispherical resonator
 $R_1 = \infty, R_2 = L$
 $g_1 g_2 = 0$



confocal resonator
 $R_1 = R_2 = L$
 $g_1 g_2 = 0$



hemiconfocal resonator
 $R_1 = \infty, R_2 = 2L$
 $g_1 g_2 = 1/2$

Figure 14.8 Examples of stable resonators.

$$\begin{aligned}
 -1 &\leq 1 - \frac{2L}{R_1} - \frac{2L}{R_2} + \frac{2L^2}{R_1 R_2} \leq 1 \\
 -2 &\leq -\frac{2L}{R_1} - \frac{2L}{R_2} + \frac{2L^2}{R_1 R_2} \leq 0 \\
 0 &\leq 1 - \frac{L}{R_1} - \frac{L}{R_2} + \frac{L^2}{R_1 R_2} \leq 1
 \end{aligned} \tag{14.3.11}$$

This stability condition is usually written in the laser literature as

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1 \tag{14.3.12}$$

where

$$g_i = 1 - \frac{L}{R_i} \tag{14.3.13a}$$

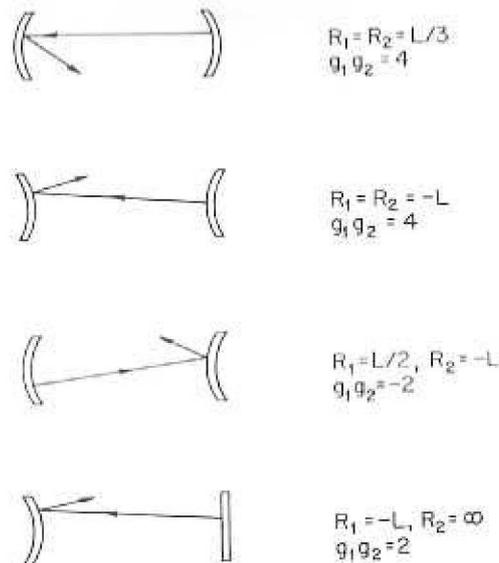


Figure 14.9 Examples of unstable resonators.

and

$$g_2 = 1 - \frac{L}{R_2} \quad (14.3.13b)$$

These are called the g parameters of the resonator. If the g parameters are such that (14.3.12) is satisfied, the resonator is stable. If $g_1 g_2 < 0$ or $g_1 g_2 > 1$, however, the resonator is unstable.

The ray-matrix approach allows us to check immediately whether a given resonator is stable, without having to perform a ray trace such as that shown in Figure 14.1b. Whether a given resonator is stable or unstable depends only on the radii of curvature of the mirrors and the distance separating them. Figures 14.8 and 14.9 show examples of stable and unstable resonators, respectively. The reader may easily check in each case whether the resonator is stable or unstable (Problem 14.2).

Our stability analysis has assumed perfect mirror reflectivities. In reality, of course, some energy will be taken from the intracavity laser field because of imperfect mirror reflectivities. We have already noted (Chapter 10) that transmissive output coupling through one (or both) of the mirrors is one such loss mechanism. In addition to such loss mechanisms as output coupling, scattering, or absorption, a laser with an unstable resonator will have a large loss associated with the escape of radiation *past* the mirrors, as indicated by ray tracing as in Figures 14.1b and 14.9. Because of this additional loss factor, unstable resonators typically require media with higher gain to sustain laser oscillation. This is not to say that

unstable resonators should always be avoided. On the contrary, unstable resonators offer several advantages for certain high-power lasers (Section 14.13). In more familiar devices such as commercial He-Ne lasers, however, stable resonators are usually employed.

The plane-parallel resonator of Figure 14.1 is not used for practical lasers because it becomes unstable with only slight misalignment of the mirrors. The resonators of most lasers have at least one spherical mirror surface. The hemispherical resonator of Figure 14.8, for instance, is perhaps the most commonly used design for He-Ne lasers.

14.13 UNSTABLE RESONATORS FOR HIGH-POWER LASERS

Our emphasis on stable laser resonators should not be taken to imply that *unstable* resonators have no practical applications. On the contrary, unstable resonators enjoy certain advantages, and they are essential to the design of many important high-power lasers.

Stable resonators have some drawbacks if one wants to build a high-power device. A major disadvantage is that the modes of stable resonators tend to be concentrated in very thin, needlelike regions within the resonator. Therefore they do not overlap a very large portion of the gain medium, and this obviously presents a problem if high power extraction from the medium is desired. A Gaussian beam mode of a stable resonator, for instance, has a spot size on the order of $(\lambda L/\pi)^{1/2}$ [see Eq. (14.7.21)]. For a CO₂ laser with $\lambda = 10.6 \mu\text{m}$ and $L = 1 \text{ m}$,

$$(\lambda L/\pi)^{1/2} = 1.8 \text{ mm} \quad (14.13.1)$$

a typical sort of beam "size" for Gaussian beam modes of stable resonators.

Unstable resonators, however, typically have much larger mode volumes, and can therefore make better use of the available gain region. Figure 14.33 shows an important practical example of an unstable resonator, the so-called positive-branch (because $g_1 g_2 > 1$) confocal resonator. As indicated, the intracavity field fills a large portion of the cavity, and can be made larger simply by using larger mirrors. The "magnification" M is a function only of the g parameters of the mirrors.

Iterative computations of the Fox-Li type reveal that the modes of unstable resonators like that shown in Figure 14.33 are distinctly non-Gaussian. To a first approximation the lowest-loss mode has a nearly uniform intensity profile on the mirrors. The output beam for the resonator shown in Figure 14.33 is a collimated annular (doughnut-shaped) beam in the *near field* close to the resonator. In the far

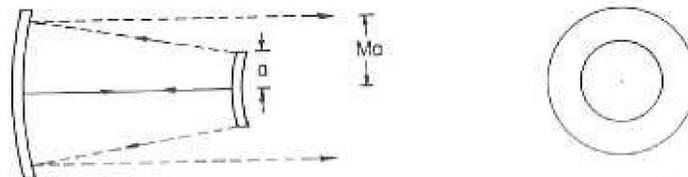


Figure 14.33 A positive-branch ($g_1 g_2 > 1$) confocal unstable resonator. The near-field output is a collimated, annular beam.

field this output beam has a central bright spot on axis. In the limit of large magnification this far field approaches an Airy pattern, with most of the intensity concentrated in the central bright spot.

Unstable resonators offer other advantages in addition to their large mode volumes. For instance, they tend to yield higher output powers when operating on the lowest-loss transverse mode rather than on several (or many) modes. This property is not generally shared by stable-resonator lasers, and it is an important advantage in many applications. In addition, unstable-resonator lasers use *all-reflective optics*. That is, the output does not pass through any mirrors but simply spills around the mirror edges. At high power levels, where mirror damage is an important consideration, the mirrors can often be water-cooled without much difficulty. Obviously the problem of mirror damage and thermal distortion is not so easily surmountable in stable laser resonators employing transmissive output coupling.

The theory of unstable-resonator lasers does not differ in any fundamental way from that of stable-resonator lasers. For this reason, and because stable resonators are more common, we will not consider in any detail the mode characteristics of unstable resonators.