Laserresonatoren Stabilitätskriterien
ABCD-Matrix
Erweiterungen zum Haupttext

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 1. Oktober 2009 – Letzte Revision: 28. Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[Dip] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Laser Resonators, Laserresonatoren, Übersetzung.

[Pet] Peter W. Milonni, Joseph H. Eberly. Laser Physics.

1 Nachweis der Gültigkeit der N-ten $ABCD$-Matrix

Es ist gegeben: [Pet]ff.[Dip]ff.

$$AD - BC = 1$$

Und:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N = \frac{1}{\sin\theta} \cdot \begin{bmatrix} A \cdot \sin N \cdot \theta - \sin(N-1) \cdot \theta & B \cdot \sin N \cdot \theta \\ C \cdot \sin N \cdot \theta & D \cdot \sin N \cdot \theta - \sin(N-1) \cdot \theta \end{bmatrix}$$

Das Ergebnis für eine $2x2$-Matrix erfüllt ersten Ausdruck und wird manchmal auch „Sylvesters Theorem“ genannt. Es kann durch Induktion bewiesen werden. So gilt für die $ABCD^N$-Matzrix für $N = 1$ und wir versuchen zu zeigen, dass wenn es für ein festes, beliebiges N gilt, muss es auch für $N + 1$ richtig sein. Wenn wir dies zeigen können, ist das Sylvester Theorem bewiesen.

Nehmen wir an, dass $ABCD^N$ gilt, so ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{N+1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N$$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{N+1} = \frac{1}{\sin\theta} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \cdot \sin N \cdot \theta - \sin(N-1) \cdot \theta & B \cdot \sin N \cdot \theta \\ C \cdot \sin N \cdot \theta & D \cdot \sin N \cdot \theta - \sin(N-1) \cdot \theta \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{N+1} = \frac{1}{\sin\theta} \cdot \begin{bmatrix} \left(A^2 + BC\right) \cdot \sin N \cdot \theta - A \cdot \sin(N-1) \cdot \theta & B \cdot (A + D) \cdot \sin N \cdot \theta - B \cdot \sin(N-1) \cdot \theta \\ C \cdot (A + D) \cdot \sin N \cdot \theta - C \cdot \sin(N-1) \cdot \theta & \left(BC + D^2\right) \cdot \sin N \cdot \theta - D \cdot \sin(N-1) \cdot \theta \end{bmatrix}$$

Mit $AD - BC = 1$ sehen wir, dass das (1,1)- Element dieser Matrix ist:

$$\begin{aligned}
&\left(A^2 + BC\right) \cdot \sin N \cdot \theta - A \cdot \sin(N-1) \cdot \theta \\
&= \left(A^2 + AD - 1\right) \cdot \sin N \cdot \theta - A \cdot \sin(N-1) \cdot \theta \\
&= A \cdot (A + D) \cdot \sin N \cdot \theta - \sin N \cdot \theta - A \cdot \sin(N-1) \cdot \theta \\
&= 2A \cdot \cos\theta \cdot \sin N \cdot \theta - \sin N \cdot \theta - A \cdot \sin(N-1) \cdot \theta \\
&= 2A \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot \sin(N+1) \cdot \theta + \tfrac{1}{2} \cdot \sin(N-1) \cdot \theta\right) - \sin N \cdot \theta - A \cdot \sin(N-1) \cdot \theta \\
&= A \cdot \sin(N+1) \cdot \theta - \sin N \cdot \theta
\end{aligned}$$

Die verbleibenden drei Elemente aus $ABCD^{N+1}$ werden analog behandelt. Wir erhalten:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{N+1} = \frac{1}{\sin\theta} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \cdot \sin N \cdot \theta - \sin(N-1) \cdot \theta & B \cdot \sin N \cdot \theta \\ C \cdot \sin N \cdot \theta & D \cdot \sin N \cdot \theta - \sin(N-1) \cdot \theta \end{bmatrix}$$

Aber das ist nun mal die Gleichung $ABCD^N$ mit N ersetzt durch $N + 1$. So gilt $ABCD^N$ auch für $N = 1$, und wir haben gerade gezeigt, dass, wenn es gilt für alle N, dann muss es auch richtig sein für $N + 1$. Dies beweist das Theorem von Sylvester.

2 Nachweis der Gültigkeit der $ABCD$- und der Transformationsmatrix

Nachweis der Gültigkeit von $AD - BC = 1$ auf $ABCD^N$ und die Transformationsmatrix:

$$A^*D^* - B^*C^* = 1$$

Und:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N = \frac{1}{\cos\theta} \cdot \begin{bmatrix} A \cdot \sin N \cdot \theta - \sin(N-1) \cdot \theta & B \cdot \sin N \cdot \theta \\ C \cdot \sin N \cdot \theta & D \cdot \sin N \cdot \theta - \sin(N-1) \cdot \theta \end{bmatrix}$$

Der einfachste Weg dies zu überprüfen ist dadurch möglich, dass man die Strahlenmatrix $ABCD$ betrachtet. So ist diese ein Produkt von vier Matrizen, mit jeweils der Determinante eins. Da die Determinante eines Matrizenprodukts gleich ist dem Produkt der Einzeldeterminanten folgt daraus:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 \cdot R_1^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 \cdot R_2^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}^N = 1^N$$

$\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}^N = \frac{1}{\cos\theta} \cdot \begin{vmatrix} A \cdot \sin N \cdot \theta - \sin(N-1) \cdot \theta & B \cdot \sin N \cdot \theta \\ C \cdot \sin N \cdot \theta & D \cdot \sin N \cdot \theta - \sin(N-1) \cdot \theta \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos\theta} \cdot \begin{vmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}^N = \frac{1}{\cos\theta} \cdot \cos\theta$$

Was gleichzeitig die folgende Determinante für $N \to \infty$ erklärt:

$$A^*D^* - B^*C^* = \cos\theta$$

Da für vorliegenden Fall der Drehwinkel θ der Transformationsmatrix Null sein soll, muss gelten:

$$\theta = 0$$

$\Rightarrow$

$$\cos\theta = 1$$

$\Rightarrow$

$$A^*D^* - B^*C^* = 1$$

Hinweis:

Die Zulässigkeit der getrennten Betrachtung des Drehwinkels θ der Transformationsmatrix und des Winkels θ der Stabilitätsbedingung ist aus Gründen der Matrixoptik und der Algebra erklärt.

Gleichzeitig definiert die Determinante die $ABCD$-Matrix als Drehmatrix (Transformationsmatrix) welche orthogonal ist.

Eine orthogonale Matrix ist in der linearen Algebra, einem Teilgebiet der Mathematik, eine quadratische, reelle Matrix, deren Zeilen- und Spaltenvektoren paarweise orthonormal zueinander sind. Sie stellen Kongruenzabbildungen, also Spiegelungen und Drehungen, dar.

Orthogonale Matrizen, deren Determinante 1 ist, entsprechen Drehungen, orthogonale Matrizen, deren Determinante -1 ist, entsprechen in der Ebene Spiegelungen an einer Ursprungsgeraden und im

Raum Ebenenspiegelungen oder Drehspiegelungen.

Die $ABCD$-Matrix für eine optische Komponente, beschränkt auf vorliegende, lautet allgemein:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & B^* \\ C^* & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$1 = \frac{A + D}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\cos\theta = \frac{A + D}{2}$$

Das definiert den Drehwinkel des Strahles **außerhalb** der Transformationsmatrix.

3 Zusammenhang zwischen Spur der Matrix und deren Eigenwerten

Die $ABCD$-Matrix ist gegeben:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte sind berechnebar:

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} - \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\det\begin{bmatrix} A-\lambda & B \\ C & D-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$

$$(A-\lambda)\cdot(D-\lambda) - BC = 0$$

$\Rightarrow$

$$\lambda^2 - (A+D)\cdot\lambda + AD - BC = 0$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_{1;2} = \frac{A+D}{2} \pm \sqrt{\frac{(A+D)^2}{2} - AD + BC}$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A + D$$

Die Spur ist berechenbar:

$$\mathrm{Sp}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = A + D$$

Das ist der allgemeine Zusammenhang zwischen Spur und Eigenwerten einer Matrix M.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{Sp}\,(M)$$

Aus der Algebra ist für eine Drehmatrix folgende Eigenschaft hergeleitet:

$$\mathrm{Sp}\,(M) = 1 + 2\cdot\cos\theta$$

$\Rightarrow$

$$A + D = \lambda_1 + \lambda_2 = 1 + 2\cdot\cos\theta$$

Das definiert den Drehwinkel des Strahles **innerhalb** der Transformationsmatrix.

4 Zusammenhang des inneren Drehwinkels der Transformationsmatrix mit dem äußeren

Es ist gegeben:

$$\cos\theta = 1$$
$$\cos\theta = \frac{A+D}{2}$$
$$1 + 2\cdot\cos\theta = A + D = \lambda_1 + \lambda_2$$

$\cos\theta = 1$ und $\cos\theta = (A+D)/2$ ergeben keinen Widerspruch für die einzelne optische Komponente und sind gültig.

$\cos\theta = 1$ und $\lambda_1 + \lambda_2$ ergeben einen (scheinbaren) Widerspruch. Bedenkt man jedoch, dass $\cos\theta = 1$ für den (horizontal) hinlaufenden Strahl gilt:

$$\theta = 0$$

$\Rightarrow$

$$\cos\theta = 1$$

Dementsprechend gilt für den (horizontal) rücklaufenden Strahl:

$$\theta = \pi \equiv 180^\circ$$

$\Rightarrow$

$$1 + 2\cdot\cos\theta = -1$$

Unter Beachtung dieser Tatsache und Beachtung von $\cos\theta = 1$ und $\cos\theta = (A+D)/2$ lässt sich $\lambda_1 + \lambda_2$ somit auch erklären über:

$$\frac{A+D}{2} = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} = \cos\theta$$

$\Rightarrow$

$$A + D = \lambda_1 + \lambda_2 = 2\cdot\cos\theta$$

Damit besteht kein Widerspruch mehr zwischen den getrennt betrachteten Drehwinkeln, die Integrität von $ABCD^N$ ist wieder hergestellt und nutzbar.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^N = \frac{1}{\cos\theta}\cdot\begin{bmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix}$$

Hinweis:

Die hier vorliegenden Vereinfachungen und Annahmen basieren ausschließlich auf die Randbedingung vorliegender Aufgabenstellung. Mathematisch streng genommen, sind oben angewandten Matrizenoperationen in Hinblick auf die Regeln der Algebra nicht allgemeingültig.

$\LaTeX\,2_\varepsilon$