Laserresonatoren Stabilitätskriterien
Erweiterung Nachweise zum Haupttext

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 1. Oktober 2009 – Letzte Revision: 24. Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[Dip] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Laser Resonators, Laserresonatoren, Übersetzung.

[Pet] Peter W. Milonni, Joseph H. Eberly. Laser Physics.

---

1 Das Stabilitätskriterium $\cos\theta$

Herleitung der Tatsache, dass $\cos\theta$ das Stabilitätskriterium des Resonators darstellt. [Pet]ff.[Dip]ff.

Gegeben ist als äußerer Drehwinkel einer Rotation:

$$\cos\theta = \frac{A+D}{2}$$

Demgegenüber der innere Drehwinkel einer Rotationsmatrix:

$$2\cdot\cos\theta = A+D = \lambda_1+\lambda_2$$

Der Ausdruck $2\cdot\cos\theta$ kann in die komplexe Ebene verschoben werden:

$$2\cdot\cos\theta = e^{-j\cdot\theta}+e^{+j\cdot\theta} = \lambda_1+\lambda_2$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1 = e^{-j\cdot\theta} \qquad \lambda_2 = e^{+j\cdot\theta}$$

$\Rightarrow$

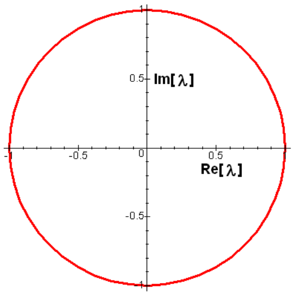
$$\lambda_1 = \cos\theta - j\cdot\sin\theta \qquad \lambda_2 = \cos\theta + j\cdot\sin\theta$$

Real-und Imaginäranteil wird separiert:

$$\mathrm{Re}\ [\lambda_1] = +\cos\theta \qquad \mathrm{Re}\ [\lambda_2] = +\cos\theta$$

$$\mathrm{Im}\ [\lambda_1] = -\sin\theta \qquad \mathrm{Im}\ [\lambda_2] = +\sin\theta$$

Beide Funktionen bilden im kartesischen Diagramm den Einheitskreis ab.



Die Eigenwerte zerlegt in Real-und Imaginäranteil zerlegt grafisch dargestellt.

Es ist diese Funktion, die innerhalb stabil gegen einen Grenzwert konvergiert, auf dem Rand grenzstabil ebenfalls konvergiert, außerhalb (instabil) divergiert, ins Unendliche strebt.

Daher kann über die Eigenwerte das Stabilitätskriterium für $\cos\theta$ ermittelt werden. (Grenz)Stabil ist die Rotation dann, wenn gilt:

$$-1 \leq \lambda_1 \leq +1 \qquad -1 \leq \lambda_2 \leq +1$$

$\Rightarrow$

$$-2 \leq \lambda_1+\lambda_2 \leq +2$$

$\Rightarrow$

$$-2 \leq 2\cdot\cos\theta \leq +2$$

$\Rightarrow$

$$-1 \leq \cos\theta \leq +1$$

2 Das Stabilitätskriterium g-Parameter

Herleitung der g-Parameter aus dem Stabilitätskriterium.

Vorhergehend ist bekannt für eine (grenz)stabile Rotation:

$$-1 \leq \cos\theta \leq +1$$

$\Rightarrow$

$$-1 \leq \frac{A+D}{2} \leq +1$$

Die Werte von A und D sind bekannt:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{2L}{R_2} & 2L-\frac{2L^2}{R_2} \\ \frac{4L}{R_1R_2}-\frac{2}{R_1}-\frac{2}{R_2} & 1-\frac{2L}{R_2}-\frac{4L}{R_1}+\frac{4L^2}{R_1R_2} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$A = 1-\frac{2L}{R_2} \qquad D = 1-\frac{2L}{R_2}-\frac{4L}{R_1}+\frac{4L^2}{R_1R_2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{A+D}{2} = 1-\frac{2L}{R_1}-\frac{2L}{R_2}+\frac{2L^2}{R_1R_2}$$

$\Rightarrow$

$$-1 \leq 1-\frac{2L}{R_1}-\frac{2L}{R_2}+\frac{2L^2}{R_1R_2} \leq +1$$

Für die Ermittlung der g-Parameter braucht nun lediglich umgestellt werden:

$$0 \leq 2-\frac{2L}{R_1}-\frac{2L}{R_2}+\frac{2L^2}{R_1R_2} \leq +2$$

$\Rightarrow$

$$0 \leq 1-\frac{L}{R_1}-\frac{L}{R_2}+\frac{L^2}{R_1R_2} \leq +1$$

$\Rightarrow$

$$0 \leq \left(1-\frac{L}{R_1}\right)\cdot\left(1-\frac{L}{R_2}\right) \leq +1$$

$\Rightarrow$

$$0 \leq g_1 \cdot g_2 \leq +1$$

Mit:

$$g_1 = 1-\frac{L}{R_1} \qquad g_2 = 1-\frac{L}{R_2}$$

Damit ist die Stabilitätsbedingung des Resonators über die g-Parameter bestimmt.

$\LaTeX\,2_\varepsilon$