- **Herleitung der Tatsache, dass „cosθ" das Stabilitätskriterium des Resonators darstellt:**

Gegeben ist als äußerer Drehwinkel einer Rotation:

$$\cos\theta = \frac{A+D}{2} \qquad \textbf{II}$$

Demgegenüber der innere Drehwinkel einer Rotationsmatrix:

$$2\cos\theta = A + D = \lambda_1 + \lambda_2 \qquad \textbf{III}$$

Der Ausdruck „2cosθ" kann in die komplexe Ebene verschoben werden:

$$2\cos\theta = e^{-j\cdot\theta} + e^{+j\cdot\theta} = \lambda_1 + \lambda_2$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1 = e^{-j\cdot\theta} \qquad \lambda_2 = e^{+j\cdot\theta}$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1 = \cos\theta - j\cdot\sin\theta \qquad \lambda_2 = \cos\theta + j\cdot\sin\theta$$

Real- und Imaginäranteil wird separiert:

$$\mathrm{Re}[\lambda_1] = \cos\theta \qquad \mathrm{Re}[\lambda_2] = \cos\theta$$

$$\mathrm{Im}[\lambda_1] = -\sin\theta \qquad \mathrm{Im}[\lambda_2] = \sin\theta$$

Beide Funktionen bilden im kartesischen Diagramm den Einheitskreis ab.

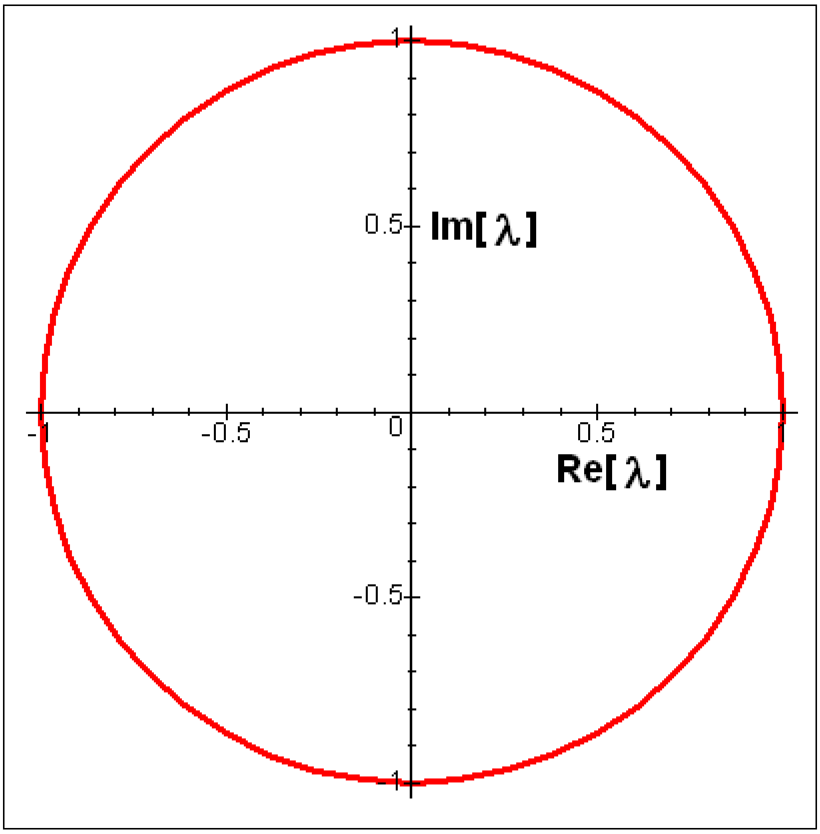

Abb. 1: Die Eigenwerte zerlegt in Real- und Imaginäranteil zerlegt grafisch dargestellt.

Aus den Regeln der Analysis über Mannigfaltigkeiten ist bekannt, dass Funktionen innerhalb des Einheitenkreises (stabil) gegen einen Grenzwert konvergieren, auf dem Kreisrand (grenzstabil) ebenfalls konvergieren, außerhalb (instabil) divergieren, ins Unendliche streben.

Daher kann über die Eigenwerte das Stabilitätskriterium für „cosθ“ ermittelt werden. (Grenz)Stabil ist die Rotation dann, wenn gilt:

$$-1 \leq \lambda_1 \leq +1$$
$$-1 \leq \lambda_2 \leq +1$$

$\Rightarrow$

$$-2 \leq \lambda_1 + \lambda_2 \leq +2$$

$\Rightarrow$

$$-2 \leq 2\cos\theta \leq +2$$

$\Rightarrow$

$$-1 \leq \cos\theta \leq +1 \qquad \textbf{IV}$$

- **Herleitung der g- Parameter aus dem Stabilitätskriterium:**

Über IV ist bekannt für eine (grenz)stabile Rotation:

$$-1 \le \cos\theta \le +1 \qquad \textbf{IV}$$

$\Rightarrow$

$$-1 \le \frac{A+D}{2} \le +1$$

Die Werte von „A“ und „D“ sind bekannt aus 14.3.1:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\dfrac{2L}{R_2} & 2L-\dfrac{2L^2}{R_2} \\ \dfrac{4L}{R_1R_2}-\dfrac{2}{R_1}-\dfrac{2}{R_2} & 1-\dfrac{2L}{R_2}-\dfrac{4L}{R_1}+\dfrac{4L^2}{R_1R_2} \end{bmatrix} \qquad (14.3.1)$$

$\Rightarrow$

$$A = 1-\frac{2L}{R_2}$$

$$D = 1-\frac{2L}{R_2}-\frac{4L}{R_1}+\frac{4L^2}{R_1R_2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{A+D}{2} = 1-\frac{2L}{R_2}-\frac{2L}{R_1}+\frac{2L^2}{R_1R_2}$$

$\Rightarrow$

$$-1 \le 1-\frac{2L}{R_2}-\frac{2L}{R_1}+\frac{2L^2}{R_1R_2} \le +1$$

Für die Ermittlung der g- Parameter braucht nun lediglich umgestellt werden:

$$0 \le 2-\frac{2L}{R_2}-\frac{2L}{R_1}+\frac{2L^2}{R_1R_2} \le +2$$

$\Rightarrow$

$$0 \le 1-\frac{L}{R_2}-\frac{L}{R_1}+\frac{L^2}{R_1R_2} \le +1$$

$\Rightarrow$

$$0 \le \left(1-\frac{L}{R_1}\right)\cdot\left(1-\frac{L}{R_2}\right) \le +1$$

$\Rightarrow$

$$0 \le g_1 \cdot g_2 \le +1$$

Mit:

$$g_1 = 1-\frac{L}{R_1} \qquad g_2 = 1-\frac{L}{R_2}$$

Damit ist die Stabilitätsbedingung des Resonators über die g- Parameter bestimmt.