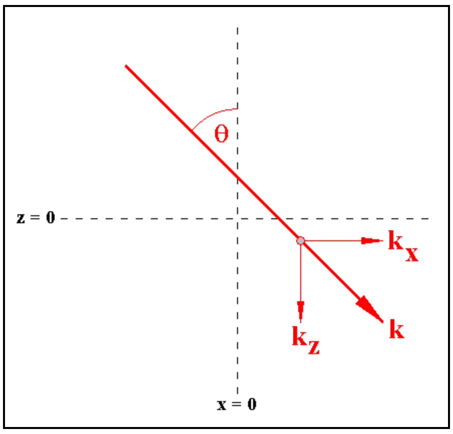
Herleitung des Photonen- Wellenvektors „k_x"

Der Wellenvektor eines Photons im Vakuum ist definiert durch:

$$k_{VAC} = \frac{\omega}{c}$$

Je nach Einfallsrichtung des Photons bezogen auf ein fixes Koordinatensystem lässt sich der Wellenvektor aufspalten in seine orthogonalen Vektoren:



Abbild 1: Die Zerlegung eines Wellenvektors in seine zwei orthogonalen Vektoren im zweidimensionalen Koordinatensystem. Quelle: Eigene Zeichnung.

Die orthogonalen Vektoren lassen sich mathematisch wie folgt beschreiben:

$$k_X = k \cdot \sin\theta \quad k_Z = k \cdot \cos\theta$$

Befindet sich der x- Anteil des Wellenvektors oberhalb der Grenze „z = 0" in einem angenommenen Medium 1, dann ändert sich die Berechnungsgrundlage infolge der Brechzahl dieses Mediums:

$$k_{VAC} = \frac{\omega}{c} \rightarrow k_{MED} = \frac{\omega}{c} \cdot n_1$$

$\Rightarrow$

$$k_{MED;X} = \frac{\omega}{c} \cdot n_1 \cdot \sin\theta$$

Infolge des Zusammenhanges zwischen Brechzahl und Permittivität gilt letztendlich:

$$n = \sqrt{\varepsilon}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{k_{MED;X} = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \sin\theta}$$

Herleitung des Elektronen- Oszillators in einem Medium.

Elektronen in ortsfesten (hier angenommen) Atomen werden durch eine einfallende elektromagnetische Welle zu transversalen Schwingungen angeregt.

Für die elektromagnetische Welle wird angenommen:

$$\psi = E_0 \cdot e^{j\cdot(\omega\cdot t - k\cdot z)}$$

Die Bewegung eines Elektrons kann mathematisch beschrieben werden durch:

$$\psi_e = \frac{m}{e} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} x + \gamma \cdot \frac{\partial}{\partial t} x + \omega_0^2 \cdot x \right)$$

Dabei ist „$\omega_0^2 \cdot x$“ der Resonanzterm des Elektrons, „$\gamma \cdot \partial/\partial t \cdot x$“ der Dämpfungsterm, der Rest der allgemeine Bewegungsterm. Beide „ψ“ werden gleichgesetzt, was einer Kopplung zu einem gemeinsamen schwingfähigen System gleichkommt.

$$\frac{m}{e} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} x + \gamma \cdot \frac{\partial}{\partial t} x + \omega_0^2 \cdot x \right) - E_0 \cdot e^{j\cdot(\omega\cdot t - k\cdot z)} = 0$$

Es liegt eine inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung vor. Der Störterm ist hier die anregende, einfallende elektromagnetische Welle. Die exakte Lösung dieser DGL wird nicht explizit aufgezeigt. Die folgende Lösung ist in entsprechender Literatur einzusehen.

$$x = x_0 \cdot e^{j\cdot\omega\cdot t}$$

Wobei für „x_0“ gegeben ist:

$$x_0 = -E_0 \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 + j \cdot \omega \cdot \gamma - \omega^2}$$

Werden nun die Maximalamplitude „E_0“, sowie die Elektronenmasse „m“ und dessen Ladung „e“ aus dem Ausdruck ausgeklammert, erhält man den atomaren Oszillator „$O(\omega)$“ eines Elektrons:

$$\boxed{O(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 + j \cdot \omega \cdot \gamma - \omega^2}}$$

Der imaginäre Anteil bedeutet eine Phasenverschiebung und Dämpfung.

Herleitung des Oberflächen- Plasmon- Wellenvektors

Die Herleitung erfolgt über die elektromagnetischen Wellengleichungen in x-Richtung in zwei verschiedenen Medien (Medium 1 oberhalb „z = 0“ und Medium 2 unterhalb). [J. R Sambles et. al. „Optical excitation of surface plasmons: an introduction. Gleichungen 3a bis 3d “]

$$
\begin{aligned}
E_1 &= (E_{X1};0;E_{Z1})\cdot e^{j\cdot(k_X\cdot x-\omega\cdot t)}\cdot e^{j\cdot k_{Z1}\cdot z}\\
H_1 &= (0;H_{Y1};0)\cdot e^{j\cdot(k_X\cdot x-\omega\cdot t)}\cdot e^{j\cdot k_{Z1}\cdot z}\\
E_2 &= (E_{X2};0;E_{Z2})\cdot e^{j\cdot(k_X\cdot x-\omega\cdot t)}\cdot e^{j\cdot k_{Z2}\cdot z}\\
H_2 &= (0;H_{Y2};0)\cdot e^{j\cdot(k_X\cdot x-\omega\cdot t)}\cdot e^{j\cdot k_{Z2}\cdot z}
\end{aligned}
$$

Nach Anwendung des folgenden Maxwellschen Ausdrucks erhält man:

$$\nabla\cdot E = 0$$

$\Rightarrow$

$$E_{Z1} = -E_{X1}\cdot\frac{k_X}{k_{Z1}} \quad E_{Z1} = -E_{X2}\cdot\frac{k_X}{k_{Z2}}$$

Für die magnetischen Felder erfolgt analog mit dem Faradayschen Gesetz der elektromagnetischen Induktion:

$$\nabla\wedge E = -\mu\cdot\frac{\partial}{\partial t}H$$

$\Rightarrow$

$$H_{Y1} = \omega\cdot\varepsilon_1\cdot\varepsilon_0\cdot\frac{E_{X1}}{k_{Z1}} \quad H_{Y2} = \omega\cdot\varepsilon_2\cdot\varepsilon_0\cdot\frac{E_{X2}}{k_{Z2}}$$

Beim Medienübergang an der Stelle „z = 0“ muss für einen stetigen Übergang des elektrischen und des magnetischen Feldes gelten (sonst könnte es zu keiner Anregung eines Oberflächen- Plasmons kommen).

$$H_{Y1} = H_{Y2} \quad E_{X1} = E_{X2}$$

$\Rightarrow$

$$H = \omega\cdot\varepsilon_1\cdot\varepsilon_0\cdot\frac{E}{k_{Z1}} \quad H = \omega\cdot\varepsilon_2\cdot\varepsilon_0\cdot\frac{E}{k_{Z2}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\varepsilon_1}{k_{Z1}} = \frac{\varepsilon_2}{k_{Z2}}$$

Für die „k_z“ sind die Überlegungen aus „Herleitung des Photonen- Wellenvektors „k_x““ verfügbar

$$\varepsilon\cdot k^2 = k_X^2 + k_Z^2$$

$\Rightarrow$

$$k_{Z1} = \sqrt{\varepsilon_1\cdot k^2 - k_X^2} \quad k_{Z2} = \sqrt{\varepsilon_2\cdot k^2 - k_X^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1 \cdot k^2 - k_X^2} = \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_2 \cdot k^2 - k_X^2}$$

Durch Umstellung und Vereinfachung ergibt sich dann endgültig für den Wellenvektors des Oberflächen- Plasmons:

$$k_X^2 = k^2 \cdot \frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{k_{SP;X} = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}}$$

Die Anregungsbedingung für ein Oberflächen- Plasmon

Bedingung aus dem Realteil der komplexen Brechzahl

Der Wellenvektor des einfallenden Lichtes an der Grenzfläche Prisma (Glas) zu Metall (Gold):

$$k_x = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\varepsilon_P} \cdot sin\theta$$

Der Wellenvektor des Oberflächen- Plasmons an der Grenzfläche Metall (Gold) zu Prisma (Glas):

$$k_{SP} = \frac{\omega}{c} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_P \cdot \varepsilon_G}{\varepsilon_P + \varepsilon_G}}$$

Für die Anregung eines Oberflächen- Plasmons müssen Betrag und Richtung der Wellenvektoren gleich sein, damit Energie- und Impulsübertragung von Photonen in Oberflächenplasmonen möglich ist:

$$k_x = k_{SP}$$

$\Rightarrow$

$$sin^2\theta = \frac{\varepsilon_G}{\varepsilon_P + \varepsilon_G}$$

Der Winkel „θ" ist begrenzt und für Anregungsbedingungen real. Daher gilt:

$$0° \leq \theta \leq 90°$$

$\Rightarrow$

$$1 \geq sin^2\theta \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$\varepsilon_P + \varepsilon_G \geq \varepsilon_G \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$\boldsymbol{-\varepsilon_P \leq 0 \leq \varepsilon_G}$$

Letzteres ist die 1. Anregungsbedingung für Oberflächen- Plasmonen. Damit Oberflächen- Plasmonen an einer Grenzschicht existieren können, müssen die Realanteile der Dielektrizitätskonstante der beiden Medien von unterschiedlichen Vorzeichen sein. Dies ist bei vielen Dielektrikum- Metallkombinationen (zum Beispiel Luft/Metall) im mittleren und fernen Infrarot der Fall.

Bedingung aus dem Imaginärteil der komplexen Brechzahl

Betrachtung eines Elektrons als Oszillator. So ist dieser definiert im Dielektrikum als.

$$O_D(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 + j \cdot \omega \cdot \delta_D - \omega^2}$$

Das Elektron liegt in ein Dielektrikum gebunden vor und besitzt daher eine Resonanzfrequenz „ω_0“. Außerdem ist der Oszillator gedämpft mit der Stärke „δ_D“.

Bei einem Leiter liegen die Elektronen ungebunden vor daher gilt „$\omega_0 = 0$“.

$$O_L(\omega) = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot \delta_L - \omega^2}$$

Für den Fall des angeregten Plasmons liegen beide Oszillatoren gekoppelt vor.

$$\frac{1}{\omega_0^2 + j \cdot \omega \cdot \delta_D - \omega^2} = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot \delta_L - \omega^2}$$

$\Rightarrow$

$$\omega_0^2(\omega) = j \cdot \omega \cdot \left(\delta_L(\omega) - \delta_D(\omega)\right)$$

In den Dämpfungsfaktor wird der imaginäre Anteil der Absorptionskonstante eingesetzt.

$$\delta(\omega) = j \cdot \alpha(\omega)$$

$\Rightarrow$

$$\omega_0^2(\omega) = \omega \cdot \left(\alpha_D(\omega) - \alpha_L(\omega)\right)$$

Da sowohl der linke wie auch der rechte Term positive Werte verlangt, muss für den Klammerausdruck gelten:

$$\alpha_D(\omega) - \alpha_L(\omega) > 0$$

$\Rightarrow$

$$\boldsymbol{\alpha_D(\omega) > \alpha_L(\omega)}$$

Letzteres ist die 2. Anregungsbedingung für Oberflächen- Plasmonen. Damit Oberflächen- Plasmonen an einer Grenzschicht existieren können, muss die Absorption des Dielektrikums größer sein, als die des Metalls. Für die zu nutzende Frequenz muss das Metall durchsichtig werden. Dies ist dann der Fall, wenn gilt:

$$\omega \gg \delta_L$$

Dies entspricht einem stark entdämpften Oszillator.

Die Brechzahl des Metalls ist definiert durch:

$$n^2 = 1 + \omega_P^2 \cdot O(\omega)_L$$

Für obigen Ausdruck vereinfacht sich „n":

$$n \approx \sqrt{1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2}}$$

Für einen imaginären Wurzelausdruck ist das betrachtete Metall ein starker Absorber, für einen reellen Ausdruck wird es durchsichtig. Daher:

$$1 - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} > 0$$

$\Rightarrow$

$$\omega > \omega_P$$

Ist das eingestrahlte Licht größer als die Plasmafrequenz „ω_P" ist die 3. Anregungsbedingung erfüllt.

$$\omega(\rho) > e \cdot \sqrt{\frac{\rho}{\varepsilon_0 \cdot m}}$$

Die Plasmafrequenz hängt ausschließlich von der Elektronendichte „ρ" ab. Für zum Beispiel Kupfer beträgt die Mindestwellenlänge.

$$\lambda > \lambda_P = 120nm$$

Kupfer wird demnach erst im hohen Ultraviolettbereich transparent.