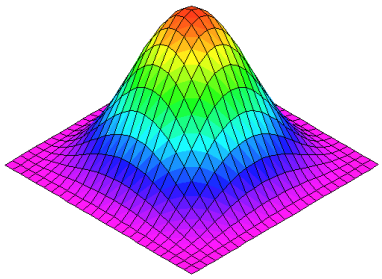
Approximation, Regression und Interpolation



Approximation, regression and interpolation

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 17. März 2016 – Letzte Revision: 13. Juni 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**
1.1 Hinweise zur Benutzung . . . 3
1.2 Bestand . . . 4

2 Interpolationen **8**
2.1 (Polynom)Interpolation nach Lagrange . . . 8
2.2 (Polynom)Interpolation nach Newton . . . 54

3 Regressionen **84**
3.1 Derivate . . . 84
3.1.1 Regression - polynomielle I . . . 84
3.1.2 Regression - polynomielle II . . . 84
3.1.3 Regression - exponentielle . . . 84
3.1.4 Regression - rationalfunktionelle I . . . 84
3.1.5 Regression - rationalfunktionelle II . . . 84
3.2 Elliptische . . . 122
3.2.1 Elliptische Regression nach der **M**ethode der **k**leinsten **Q**uadrate - MKQ . . . 122
3.2.2 Elliptische Regression nach der **H**auptkomponentenanalyse - HKA . . . 148
3.2.3 Elliptische Regression nach der **Si**ngulärwertzerlegung - SIG . . . 168
3.2.4 Elliptische Regression nach HKA - Drehen und Zentrieren der Ellipse . . . 190
3.2.5 Elliptische Regression nach MKQ - Drehen und Zentrieren der Ellipse . . . 212
3.2.6 Kreisregression nach der Reduktionsmethode . . . 236
3.3 Lineare . . . 278
3.3.1 Diskrete/Kontinuierliche, stückweise, lineare Regression . . . 278
3.3.2 (Lineare) Regression einer modifizierten Mitscherlich-Funktion . . . 350
3.3.3 Die Bilaterale-lineare-Regression - BLR . . . 390
3.3.4 Reduzierte lineare Regression . . . 420
3.4 Spezielle . . . 438
3.4.1 Resttermregression einer bilogarithmischen Funktion . . . 438
3.4.2 Polynomregression einer bilogarithmischen Funktion . . . 470
3.4.3 Die vollständige Regression der Lorentzfunktion . . . 490

3.4.4 Die unvollständige Regression der Normalfunktion 506
3.4.5 Die vollständige Regression der Normalfunktion 522
3.4.6 Die Regression der ordinatensymmetrischen Normalfunktion 534
3.4.7 Die Regression der Hill-Funktion 550

4 Approximationen 586
4.1 Konstanten 586
4.1.1 Approximation von π und $\ln 2$ über die Legendrepolynome 586
4.1.2 Approximation von π und $\ln 2$ über die Zernikepolynome 600
4.1.3 Approximation der Ω-Konstante über eine bilogarithmische Funktion 622
4.2 Variablen 644
4.2.1 Die Teilapproximation der positiven oberen Lambert-W-Funktion 644

5 Spezielle Betrachtungen 658
5.1 Elliptische 658
5.1.1 Elliptische Regression - MKQ - Punkte 658
5.1.2 Elliptische Regression - MKQ - Achsen und Winkel 682
5.1.3 Elliptische Regression - MKQ - Relationen und Vereinfachungen 702
5.1.4 Elliptische Regression - MKQ/HKA/SIG - Grafische Darstellungen 716
5.2 Sonstige 744
5.2.1 (Pearson-)Korrelationskoeffizient höherer Grade 744
5.2.2 Kleine Theorie über Interpolationsfehlerpolynome 762

Literatur

[001] In den einzelnen Kapiteln dediziert angegeben.

1 Einleitung

1.1 Hinweise zur Benutzung

Vorliegend die gesammelten und zusammengefassten Arbeitsblätter über Regressions- und Interpolationsverfahren. Entstanden sind diese im Laufe der Jahre unter Praxisbedingungen innerhalb des Projektes SAW- 2012 am Max- Born- Instituts in Berlin und später (z.B. an der TU Berlin). [001]

Der Inhalt entbehrt jeglicher Vollständigkeit. Zwischen den Arbeitsblättern bestehen Unterschiede in den benutzten Zeichen und Symbolen, geschuldet dem gerade bearbeiteten Teilprojekt. Trotz größter Sorgfalt können (Tipp)Fehler vorkommen.

Es sei darauf hingewiesen, dass vorliegende Zusammenfassung keine wissenschaftliche Abschlussarbeit darstellt, sondern ein kleines Hilfsmittel für **meine** Tätigkeiten ist.

1.2 Bestand

Zum Stand der Revision sind folgende Arbeitsblätter im vorliegenden Dokument eingebunden.

Allgemeine und spezielle Regressionen, Interpolationen und Approximationen

- (Polynom)Interpolation nach Lagrange
  → allgemeine Darstellung – linear bis n-te
  → Koeffizientendarstellung – linear bis septisch
- (Polynom)Interpolation nach Newton
  → allgemeine Darstellung – linear bis n-te
  → Koeffizientendarstellung – linear bis septisch
- (Polynom)Regression
  → linear bis n-te Regression
  → potenzfunktionelle
  → exponentielle
  → rationalfunktionelle
  → sigmoide nach Mitscherlich
- Elliptische Regression
  → ungekippte Ellipse
  → gekippte Ellipse nach MKQ
- Elliptische Regression
  → gekippte Ellipse nach HKA
  → das Drehen und Zentrieren der Ellipse nach HKA
- Elliptische Regression
  → ungekippte (abszissen- und ordinatenparallele) Ellipse nach SIG
- Kreisregression
  → als Sonderfall der Elliptischen Regression
  → als Ergebnis der Minimierung des Fehlerpolynoms
- Diskrete, stückweise, lineare und kontinuierliche, stückweise, lineare Regression
- (Lineare) Regression einer modifizierten Mitscherlich- Funktion
- Reduzierte lineare Regression - Fehlen von Anstieg oder Inhomogenität. Hinzufügen eines definierten Punktes
- Resttermregression einer bilogarithmischen Funktion
- Polynomregression einer bilogarithmischen Funktion
- Die vollständige Regression der Lorentzfunktion
- Die unvollständige Regression der Normalfunktion
- Die vollständige Regression der Normalfunktion
- Die Regression der ordinatensymmetrischen Normalfunktion
- Die Regression der Hill-Funktion
- Approximation von Pi und ln2 ueber die Legendrepolynome
- Approximation von Pi und ln2 ueber die Zernikepolynome
- Approximation der Ω-Konstante über eine spezielle bilogarithmische Funktion
- Die Teilapproximation der positiven oberen Lambert W-Funktion

Spezielle Einzelbetrachtungen

- Elliptische Regression
  → Punkte
  → Achsen und Winkel
  → Relationen und Vereinfachungen
- Elliptische Regression
  → Grafische Darstellungen
- Pearson- Korrelationskoeffizient höherer Grade
  → linear bis biquadratisch
- Kleine Theorie über Interpolationsfehlerpolynome
  → allgemeines Verfahren
  → spezielle Verfahren - linear bis septisch

$$\oiint$$

2 Interpolationen

2.1 (Polynom)Interpolation nach Lagrange

(Polynom)Interpolation nach Lagrange

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 10. Juli 2014 - Letzte Revision: 21. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeindarstellung **3**
1.1 Polynominterpolation n- ten Grades . . . 3
1.2 Septische Interpolation . . . 4
1.3 Triquadratische Interpolation (Sextische Interpolation) . . . 5
1.4 Quintische Interpolation . . . 6
1.5 Biquadratische Interpolation . . . 7
1.6 Kubische Interpolation . . . 8
1.7 Quadratische Interpolation . . . 9
1.8 Lineare Interpolation . . . 10

2 Koeffizientendarstellung **11**
2.1 Septische Interpolation . . . 11
2.2 Triquadratische Interpolation (Sextische Interpolation) . . . 25
2.3 Quintische Interpolation . . . 33
2.4 Biquadratische Interpolation . . . 38
2.5 Kubische Interpolation . . . 41
2.6 Quadratische Interpolation . . . 43
2.7 Lineare Interpolation . . . 44

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Allgemeindarstellung

1.1 Polynominterpolation n- ten Grades

Es soll eine Interpolation mit Datenpunkten $P_i\left(\lambda_i; X_i\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ_i eine Wellenlänge darstellt und X_i die dazu gehörige Ortskoordinate. [001]

Gegeben sind nichtäquidistante Datenpunkte beliebiger Anzahl $P_i\left(x_i; y_i\right)$. Zu diesen Punkten existiert ein Polynom der Form

$$P\left(x\right) = y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$$

das alle P_i auf dem Polynom exakt erfasst. Nach Lagrange ist $P\left(x\right)$ definiert durch:

$$P\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot L_i\left(x\right)$$

Wobei $L_i\left(x\right)$ die Lagrangschen Fundamentalpolynome darstellt. Diese werden beschrieben mittels:

$$L_i\left(x\right) = \prod_{\substack{k \neq i \\ i = 0 \ldots n}} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

1.2 Septische Interpolation

[001] Es soll eine Interpolation mit Datenpunkten $P_n(\lambda_n; X_n)$ durchgeführt werden. Wobei λ_i eine Wellenlänge darstellt und X_i die dazu gehörige Ortskoordinate.

Gegeben sind nichtäquidistante Datenpunkte $P_i(x_i; y_i)$. Zu diesen Punkten existiert ein Polynom der Form

$$P(x) = y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_6 \cdot x^6 + a_7 \cdot x^7$$

das alle P_i auf dem Polynom exakt erfasst. Nach Lagrange ist $P(x)$ definiert durch:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{7} y_i \cdot L_i(x)$$

Wobei $L_i(x)$ die Lagrangschen Fundamentalpolynome darstellt. Diese werden beschrieben mittels:

$$n = 7$$

$\Rightarrow$

$$L_0 = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)\cdot(x-x_7)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)\cdot(x_0-x_4)\cdot(x_0-x_5)\cdot(x_0-x_6)\cdot(x_0-x_7)}$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)\cdot(x-x_7)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)\cdot(x_1-x_4)\cdot(x_1-x_5)\cdot(x_1-x_6)\cdot(x_1-x_7)}$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)\cdot(x-x_7)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)\cdot(x_2-x_4)\cdot(x_2-x_5)\cdot(x_2-x_6)\cdot(x_2-x_7)}$$

$$L_3 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)\cdot(x-x_7)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)\cdot(x_3-x_4)\cdot(x_3-x_5)\cdot(x_3-x_6)\cdot(x_3-x_7)}$$

$$L_4 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)\cdot(x-x_7)}{(x_4-x_0)\cdot(x_4-x_1)\cdot(x_4-x_2)\cdot(x_4-x_3)\cdot(x_4-x_5)\cdot(x_4-x_6)\cdot(x_4-x_7)}$$

$$L_5 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_6)\cdot(x-x_7)}{(x_5-x_0)\cdot(x_5-x_1)\cdot(x_5-x_2)\cdot(x_5-x_3)\cdot(x_5-x_4)\cdot(x_5-x_6)\cdot(x_5-x_7)}$$

$$L_6 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_7)}{(x_6-x_0)\cdot(x_6-x_1)\cdot(x_6-x_2)\cdot(x_6-x_3)\cdot(x_6-x_4)\cdot(x_6-x_5)\cdot(x_6-x_7)}$$

$$L_7 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)}{(x_7-x_0)\cdot(x_7-x_1)\cdot(x_7-x_2)\cdot(x_7-x_3)\cdot(x_7-x_4)\cdot(x_7-x_5)\cdot(x_7-x_6)}$$

Damit ist das Interpolationspolynom $P(x)$ ermittelt.

$$P(x) = y_0 \cdot L_0 + y_1 \cdot L_1 + y_2 \cdot L_2 + y_3 \cdot L_3 + y_4 \cdot L_4 + y_5 \cdot L_5 + y_6 \cdot L_6 + y_7 \cdot L_7$$

1.3 Triquadratische Interpolation (Sextische Interpolation)

Es soll eine Interpolation mit Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ_i eine Wellenlänge darstellt und X_i die dazu gehörige Ortskoordinate. [001]

Gegeben sind nichtäquidistante Datenpunkte $P_i\left(x_i; y_i\right)$. Zu diesen Punkten existiert ein Polynom der Form

$$P\left(x\right) = y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_5 \cdot x^5 + a_6 \cdot x^6$$

das alle P_i auf dem Polynom exakt erfasst. Nach Lagrange ist $P\left(x\right)$ definiert durch:

$$P\left(x\right) = \sum_{i=0}^{6} y_i \cdot L_i\left(x\right)$$

Wobei $L_i\left(x\right)$ die Lagrangschen Fundamentalpolynome darstellt. Diese werden beschrieben mittels:

$$n = 6$$

$\Rightarrow$

$$L_0 = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)\cdot(x_0-x_4)\cdot(x_0-x_5)\cdot(x_0-x_6)}$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)\cdot(x_1-x_4)\cdot(x_1-x_5)\cdot(x_1-x_6)}$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)\cdot(x_2-x_4)\cdot(x_2-x_5)\cdot(x_2-x_6)}$$

$$L_3 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)\cdot(x_3-x_4)\cdot(x_3-x_5)\cdot(x_3-x_6)}$$

$$L_4 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_5)\cdot(x-x_6)}{(x_4-x_0)\cdot(x_4-x_1)\cdot(x_4-x_2)\cdot(x_4-x_3)\cdot(x_4-x_5)\cdot(x_4-x_6)}$$

$$L_5 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_6)}{(x_5-x_0)\cdot(x_5-x_1)\cdot(x_5-x_2)\cdot(x_5-x_3)\cdot(x_5-x_4)\cdot(x_5-x_6)}$$

$$L_6 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)}{(x_6-x_0)\cdot(x_6-x_1)\cdot(x_6-x_2)\cdot(x_6-x_3)\cdot(x_6-x_4)\cdot(x_6-x_5)}$$

Damit ist das Interpolationspolynom $P\left(x\right)$ ermittelt.

$$P\left(x\right) = y_0 \cdot L_0 + y_1 \cdot L_1 + y_2 \cdot L_2 + y_3 \cdot L_3 + y_4 \cdot L_4 + y_5 \cdot L_5 + y_6 \cdot L_6$$

1.4 Quintische Interpolation

[001] Es soll eine Interpolation mit Datenpunkten $P_n(\lambda_n; X_n)$ durchgeführt werden. Wobei λ_i eine Wellenlänge darstellt und X_i die dazu gehörige Ortskoordinate.

Gegeben sind nichtäquidistante Datenpunkte $P_i(x_i; y_i)$. Zu diesen Punkten existiert ein Polynom der Form

$$P(x) = y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_4 \cdot x^4 + a_5 \cdot x^5$$

das alle P_i auf dem Polynom exakt erfasst. Nach Lagrange ist $P(x)$ definiert durch:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{5} y_i \cdot L_i(x)$$

Wobei $L_i(x)$ die Lagrangschen Fundamentalpolynome darstellt. Diese werden beschrieben mittels:

$$n = 5$$

$\Rightarrow$

$$L_0 = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)\cdot(x_0-x_4)\cdot(x_0-x_5)}$$

$$L_1 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)\cdot(x_1-x_4)\cdot(x_1-x_5)}$$

$$L_2 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)\cdot(x_2-x_4)\cdot(x_2-x_5)}$$

$$L_3 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_4)\cdot(x-x_5)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)\cdot(x_3-x_4)\cdot(x_3-x_5)}$$

$$L_4 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_5)}{(x_4-x_0)\cdot(x_4-x_1)\cdot(x_4-x_2)\cdot(x_4-x_3)\cdot(x_4-x_5)}$$

$$L_5 = \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)}{(x_5-x_0)\cdot(x_5-x_1)\cdot(x_5-x_2)\cdot(x_5-x_3)\cdot(x_5-x_4)}$$

Damit ist das Interpolationspolynom $P(x)$ ermittelt.

$$P(x) = y_0 \cdot L_0 + y_1 \cdot L_1 + y_2 \cdot L_2 + y_3 \cdot L_3 + y_4 \cdot L_4 + y_5 \cdot L_5$$

1.5 Biquadratische Interpolation

Es soll eine Interpolation mit Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ_i eine Wellenlänge darstellt und X_i die dazu gehörige Ortskoordinate. [001]

Gegeben sind nichtäquidistante Datenpunkte $P_i\left(x_i; y_i\right)$. Zu diesen Punkten existiert ein Polynom der Form

$$P\left(x\right) = y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4$$

das alle P_i auf dem Polynom exakt erfasst. Nach Lagrange ist $P\left(x\right)$ definiert durch:

$$P\left(x\right) = \sum_{i=0}^{4} y_i \cdot L_i\left(x\right)$$

Wobei $L_i\left(x\right)$ die Lagrangschen Fundamentalpolynome darstellt. Diese werden beschrieben mittels:

$$n = 4$$

$\Rightarrow$

$$L_0 = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot (x_0 - x_3) \cdot (x_0 - x_4)}$$

$$L_1 = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3) \cdot (x_1 - x_4)}$$

$$L_2 = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_3) \cdot (x_2 - x_4)}$$

$$L_3 = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_4)}{(x_3 - x_0) \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_3 - x_2) \cdot (x_3 - x_4)}$$

$$L_4 = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)}{(x_4 - x_0) \cdot (x_4 - x_1) \cdot (x_4 - x_2) \cdot (x_4 - x_3)}$$

Damit ist das Interpolationspolynom $P\left(x\right)$ ermittelt.

$$P\left(x\right) = y_0 \cdot L_0 + y_1 \cdot L_1 + y_2 \cdot L_2 + y_3 \cdot L_3 + y_4 \cdot L_4$$

1.6 Kubische Interpolation

[001] Es soll eine Interpolation mit Datenpunkten $P_n(\lambda_n; X_n)$ durchgeführt werden. Wobei λ_i eine Wellenlänge darstellt und X_i die dazu gehörige Ortskoordinate.

Gegeben sind nichtäquidistante Datenpunkte $P_i(x_i; y_i)$. Zu diesen Punkten existiert ein Polynom der Form

$$P(x) = y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$$

das alle P_i auf dem Polynom exakt erfasst. Nach Lagrange ist $P(x)$ definiert durch:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i \cdot L_i(x)$$

Wobei $L_i(x)$ die Lagrangschen Fundamentalpolynome darstellt. Diese werden beschrieben mittels:

$$n = 3$$

$\Rightarrow$

$$L_0 = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot (x_0 - x_3)}$$

$$L_1 = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3)}$$

$$L_2 = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_3)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_3)}$$

$$L_3 = \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_3 - x_0) \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_3 - x_2)}$$

Damit ist das Interpolationspolynom $P(x)$ ermittelt.

$$P(x) = y_0 \cdot L_0 + y_1 \cdot L_1 + y_2 \cdot L_2 + y_3 \cdot L_3$$

1.7 Quadratische Interpolation

Es soll eine Interpolation mit Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ_i eine Wellenlänge darstellt und X_i die dazu gehörige Ortskoordinate. [001]

Gegeben sind nichtäquidistante Datenpunkte $P_i\left(x_i; y_i\right)$. Zu diesen Punkten existiert ein Polynom der Form

$$P\left(x\right) = y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

das alle P_i auf dem Polynom exakt erfasst. Nach Lagrange ist $P\left(x\right)$ definiert durch:

$$P\left(x\right) = \sum_{i=0}^{2} y_i \cdot L_i\left(x\right)$$

Wobei $L_i\left(x\right)$ die Lagrangschen Fundamentalpolynome darstellt. Diese werden beschrieben mittels:

$$n = 2$$

$\Rightarrow$

$$L_0 = \frac{\left(x - x_1\right) \cdot \left(x - x_2\right)}{\left(x_0 - x_1\right) \cdot \left(x_0 - x_2\right)}$$

$$L_1 = \frac{\left(x - x_0\right) \cdot \left(x - x_2\right)}{\left(x_1 - x_0\right) \cdot \left(x_1 - x_2\right)}$$

$$L_2 = \frac{\left(x - x_0\right) \cdot \left(x - x_1\right)}{\left(x_2 - x_0\right) \cdot \left(x_2 - x_1\right)}$$

Damit ist das Interpolationspolynom $P\left(x\right)$ ermittelt.

$$P\left(x\right) = y_0 \cdot L_0 + y_1 \cdot L_1 + y_2 \cdot L_2$$

1.8 Lineare Interpolation

[001] Es soll eine Interpolation mit Datenpunkten $P_n(\lambda_n; X_n)$ durchgeführt werden. Wobei λ_i eine Wellenlänge darstellt und X_i die dazu gehörige Ortskoordinate.

Gegeben sind nichtäquidistante Datenpunkte $P_i(x_i; y_i)$. Zu diesen Punkten existiert ein Polynom der Form

$$P(x) = y = a_0 + a_1 \cdot x$$

das alle P_i auf dem Polynom exakt erfasst. Nach Lagrange ist $P(x)$ definiert durch:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{1} y_i \cdot L_i(x)$$

Wobei $L_i(x)$ die Lagrangschen Fundamentalpolynome darstellt. Diese werden beschrieben mittels:

$$n = 1$$

$\Rightarrow$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

Damit ist das Interpolationspolynom $P(x)$ ermittelt.

$$P(x) = y_0 \cdot L_0 + y_1 \cdot L_1$$

2 Koeffizientendarstellung

In einigen Anwendungsfällen ist es interessant die Koeffizienten explizit zu kennen. Über das Polynom $P(x)$ nach Lagrange ist das zwar möglich, jedoch symbolisch unpraktisch beschrieben. [001]

2.1 Septische Interpolation

Mit

$$d_{mn} = \frac{1}{x_m - x_n}$$

und dem kgV

$$\begin{aligned}
d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06} \cdot d_{07} \\
\cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \cdot d_{17} \\
\cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26} \cdot d_{27} \\
\cdot d_{34} \cdot d_{35} \cdot d_{36} \cdot d_{37} \\
\cdot d_{45} \cdot d_{46} \cdot d_{47} \\
\cdot d_{56} \cdot d_{57} \\
\cdot d_{67}
\end{aligned}$$

ergibt sich das septische Interpolationspolynom

$$y = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + a_5 \cdot x^5 + a_6 \cdot x^6 + a_7 \cdot x^7$$

mit den Koeffizienten:

- $a_0^{(7)} =$

$$\begin{aligned}
&-y_0 \cdot \\
&\quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06} \cdot d_{07} \\
&+y_1 \cdot \\
&\quad x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \cdot d_{17} \\
&-y_2 \cdot \\
&\quad x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26} \cdot d_{27} \\
&+y_3 \cdot \\
&\quad x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35} \cdot d_{36} \cdot d_{37} \\
&-y_4 \cdot \\
&\quad x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \cdot d_{46} \cdot d_{47} \\
&+y_5 \cdot \\
&\quad x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45} \cdot d_{56} \cdot d_{57} \\
&-y_6 \cdot \\
&\quad x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_7 \cdot d_{06} \cdot d_{16} \cdot d_{26} \cdot d_{36} \cdot d_{46} \cdot d_{56} \cdot d_{67} \\
&+y_7 \cdot \\
&\quad x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot d_{07} \cdot d_{17} \cdot d_{27} \cdot d_{37} \cdot d_{47} \cdot d_{57} \cdot d_{67}
\end{aligned}$$

- $a_1^{(7)} =$

$$\begin{aligned}
&+y_0 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06} \cdot d_{07} \\
&-y_1 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
)& \\
&\cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \cdot d_{17} \\
+y_2 \cdot& \\
(& \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
)& \\
&\cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26} \cdot d_{27} \\
-y_3 \cdot& \\
(& \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
)& \\
&\cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35} \cdot d_{36} \cdot d_{37} \\
+y_4 \cdot& \\
(& \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
)& \\
&\cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \cdot d_{46} \cdot d_{47} \\
-y_5 \cdot& \\
(& \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
)& \\
&\cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45} \cdot d_{56} \cdot d_{57} \\
+y_6 \cdot& \\
(& \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
)& \\
&\cdot d_{06} \cdot d_{16} \cdot d_{26} \cdot d_{36} \cdot d_{46} \cdot d_{56} \cdot d_{67}
\end{aligned}
$$

$-y_7 \cdot$
$($
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)$
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6$
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6$
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6$
$)$
$\cdot d_{07} \cdot d_{17} \cdot d_{27} \cdot d_{37} \cdot d_{47} \cdot d_{57} \cdot d_{67}$

- $a_2^{(7)} =$

$-y_0 \cdot$
$($
$+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$)$
$\cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06} \cdot d_{07}$
$+y_1 \cdot$
$($
$+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_0 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_0 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7$
$)$
$\cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \cdot d_{17}$
$-y_2 \cdot$
$($
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7$

$$
\begin{aligned}
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
)& \\
&\cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26} \cdot d_{27} \\
+y_3 \cdot& \\
(& \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
)& \\
&\cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35} \cdot d_{36} \cdot d_{37} \\
-y_4 \cdot& \\
(& \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
)& \\
&\cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \cdot d_{46} \cdot d_{47} \\
+y_5 \cdot& \\
(& \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
)& \\
&\cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45} \cdot d_{56} \cdot d_{57} \\
-y_6 \cdot& \\
(& \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
)& \\
&\cdot d_{06} \cdot d_{16} \cdot d_{26} \cdot d_{36} \cdot d_{46} \cdot d_{56} \cdot d_{67} \\
+y_7 \cdot& \\
(& \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6) \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6) \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
)& \\
&\cdot d_{07} \cdot d_{17} \cdot d_{27} \cdot d_{37} \cdot d_{47} \cdot d_{57} \cdot d_{67}
\end{aligned}
$$

- $a_3^{(7)} =$

$$
\begin{aligned}
+y_0 \cdot& \\
(& \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_2 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_2 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
)& \\
&\cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06} \cdot d_{07} \\
-y_1 \cdot& \\
(& \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_2 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_2 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
)& \\
&\cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \cdot d_{17} \\
+y_2 \cdot& \\
(& \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
)& \\
&\cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26} \cdot d_{27} \\
-y_3 \cdot& \\
(& \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_2 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_2 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
)& \\
&\cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35} \cdot d_{36} \cdot d_{37} \\
+y_4 \cdot& \\
(& \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_2 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
)&
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \cdot d_{46} \cdot d_{47} \\
-y_5 &\cdot \\
(& \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_6 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7) \\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_2 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&+x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
) & \\
&\cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45} \cdot d_{56} \cdot d_{57} \\
+y_6 &\cdot \\
(& \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_7) \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_0 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_7) \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_7) \\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
&+x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_7 \\
) & \\
&\cdot d_{06} \cdot d_{16} \cdot d_{26} \cdot d_{36} \cdot d_{46} \cdot d_{56} \cdot d_{67} \\
-y_7 &\cdot \\
(& \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6) \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6) \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_0 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6) \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6) \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6) \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6) \\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
)& \\
&\cdot d_{07} \cdot d_{17} \cdot d_{27} \cdot d_{37} \cdot d_{47} \cdot d_{57} \cdot d_{67}
\end{aligned}
$$

$\bullet\ a_4^{(7)} =$

$$
\begin{aligned}
&-y_0 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_1 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_1 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_1 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_2 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_2 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06} \cdot d_{07} \\
&+y_1 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_0 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_0 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_0 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_0 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_2 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_2 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_3 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_3 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_4 \cdot x_5 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_4 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&\quad +x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \cdot d_{17}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-y_2\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot(x_3+x_4+x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_3\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_3\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{02}\cdot d_{12}\cdot d_{23}\cdot d_{24}\cdot d_{25}\cdot d_{26}\cdot d_{27}\\
&+y_3\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot(x_2+x_4+x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot(x_4+x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot(x_4+x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_2\cdot x_4\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_2\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_2\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_4\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_4\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{03}\cdot d_{13}\cdot d_{23}\cdot d_{34}\cdot d_{35}\cdot d_{36}\cdot d_{37}\\
&-y_4\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot(x_2+x_3+x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot(x_3+x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_0\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot(x_3+x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_1\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot(x_5+x_6+x_7)\\
&\quad +x_2\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_2\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_3\cdot x_5\cdot(x_6+x_7)\\
&\quad +x_3\cdot x_6\cdot x_7\\
&\quad +x_5\cdot x_6\cdot x_7\\
&)\\
&\quad \cdot d_{04}\cdot d_{14}\cdot d_{24}\cdot d_{34}\cdot d_{45}\cdot d_{46}\cdot d_{47}
\end{aligned}
$$

$+y_5\cdot$
$($
$+x_0 \cdot x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_6 + x_7)$
$+x_2 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_2 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_3 \cdot x_4 \cdot (x_6 + x_7)$
$+x_3 \cdot x_6 \cdot x_7$
$+x_4 \cdot x_6 \cdot x_7$
$)$
$\cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45} \cdot d_{56} \cdot d_{57}$
$-y_6\cdot$
$($
$+x_0 \cdot x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_7)$
$+x_0 \cdot x_5 \cdot x_7$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 x_7)$
$+x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_7)$
$+x_1 \cdot x_5 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_7)$
$+x_2 \cdot x_5 \cdot x_7$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_7)$
$+x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_7)$
$+x_3 \cdot x_5 \cdot x_7$
$+x_4 \cdot x_5 \cdot x_7$
$)$
$\cdot d_{06} \cdot d_{16} \cdot d_{26} \cdot d_{36} \cdot d_{46} \cdot d_{56} \cdot d_{67}$
$+y_7\cdot$
$($
$+x_0 \cdot x_1 \cdot (x_3 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6)$
$+x_0 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$
$+x_0 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6)$
$+x_0 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)$
$+x_0 \cdot x_5 \cdot x_6$
$+x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$
$+x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6)$
$+x_1 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)$
$+x_1 \cdot x_5 \cdot x_6$
$+x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6)$
$+x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)$
$+x_2 \cdot x_5 \cdot x_6$
$+x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)$
$+x_3 \cdot x_5 \cdot x_6$
$+x_4 \cdot x_5 \cdot x_6$
$)$
$\cdot d_{07} \cdot d_{17} \cdot d_{27} \cdot d_{37} \cdot d_{47} \cdot d_{57} \cdot d_{67}$

- $a_5^{(7)} =$

$+y_0 \cdot$
$($
$\quad +x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$
$\quad +x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$
$\quad +x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$
$\quad +x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7)$
$\quad +x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$\quad +x_6 \cdot x_7$
$)$
$\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06} \cdot d_{07}$
$-y_1 \cdot$
$($
$\quad +x_0 \cdot (x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$
$\quad +x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$
$\quad +x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$
$\quad +x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7)$
$\quad +x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$\quad +x_6 \cdot x_7$
$)$
$\quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \cdot d_{17}$
$+y_2 \cdot$
$($
$\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$
$\quad +x_1 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$
$\quad +x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$
$\quad +x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7)$
$\quad +x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$\quad +x_6 \cdot x_7$
$)$
$\quad \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26} \cdot d_{27}$
$-y_3 \cdot$
$($
$\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$
$\quad +x_1 \cdot (x_2 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$
$\quad +x_2 \cdot (x_4 + x_5 + x_6 + x_7)$
$\quad +x_4 \cdot (x_5 + x_6 + x_7)$
$\quad +x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$\quad +x_6 \cdot x_7$
$)$
$\quad \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35} \cdot d_{36} \cdot d_{37}$
$+y_4 \cdot$
$($
$\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7)$
$\quad +x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7)$
$\quad +x_2 \cdot (x_3 + x_5 + x_6 + x_7)$
$\quad +x_3 \cdot (x_5 + x_6 + x_7)$
$\quad +x_5 \cdot (x_6 + x_7)$
$\quad +x_6 \cdot x_7$
$)$
$\quad \cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \cdot d_{46} \cdot d_{14}$
$-y_5 \cdot$
$($
$\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 +_6 +x_7)$
$\quad +x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7)$
$\quad +x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_6 + x_7)$

$$
\begin{aligned}
&\quad +x_3 \cdot (x_4 + x_6 + x_7) \\
&\quad +x_4 \cdot (x_6 + x_7) \\
&\quad +x_6 \cdot x_7 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45} \cdot d_{56} \cdot d_{57} \\
&+y_6 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7) \\
&\quad +x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7) \\
&\quad +x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_7) \\
&\quad +x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_7) \\
&\quad +x_4 \cdot (x_5 + x_7) \\
&\quad +x_5 \cdot x_7 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{06} \cdot d_{16} \cdot d_{26} \cdot d_{36} \cdot d_{46} \cdot d_{56} \cdot d_{67} \\
&-y_7 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \\
&\quad +x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \\
&\quad +x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \\
&\quad +x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6) \\
&\quad +x_4 \cdot (x_5 + x_6) \\
&\quad +x_5 \cdot x_6 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{07} \cdot d_{17} \cdot d_{27} \cdot d_{37} \cdot d_{47} \cdot d_{57} \cdot d_{67}
\end{aligned}
$$

- $a_6^{(7)} =$

$$
\begin{aligned}
&-y_0 \cdot \\
&(\\
&\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06} \cdot d_{07} \\
&+y_1 \cdot \\
&(\\
&\quad x_0 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \cdot d_{17} \\
&-y_2 \cdot \\
&(\\
&\quad x_0 + x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26} \cdot d_{27} \\
&+y_3 \cdot \\
&(\\
&\quad x_0 + x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35} \cdot d_{36} \cdot d_{37} \\
&-y_4 \cdot \\
&(\\
&\quad x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \cdot d_{46} \cdot d_{47} \\
&+y_5 \cdot \\
&(\\
&\quad x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45} \cdot d_{56} \cdot d_{57}
\end{aligned}
$$

$-y_6 \cdot$
$($
$\quad x_7 + x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$
$)$
$\quad \cdot d_{06} \cdot d_{16} \cdot d_{26} \cdot d_{36} \cdot d_{46} \cdot d_{56} \cdot d_{67}$
$+y_7 \cdot$
$($
$\quad x_0 + x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_2$
$)$
$\quad \cdot d_{07} \cdot d_{17} \cdot d_{27} \cdot d_{37} \cdot d_{47} \cdot d_{57} \cdot d_{67}$

- $a_7^{(7)} =$

$+y_0 \cdot$
$\quad d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06} \cdot d_{07}$
$-y_1 \cdot$
$\quad d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \cdot d_{17}$
$+y_2 \cdot$
$\quad d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26} \cdot d_{27}$
$-y_3 \cdot$
$\quad d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35} \cdot d_{36} \cdot d_{37}$
$+y_4 \cdot$
$\quad d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \cdot d_{46} \cdot d_{47}$
$-y_5 \cdot$
$\quad d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45} \cdot d_{56} \cdot d_{57}$
$+y_6 \cdot$
$\quad d_{06} \cdot d_{16} \cdot d_{26} \cdot d_{36} \cdot d_{46} \cdot d_{56} \cdot d_{67}$
$-y_7 \cdot$
$\quad d_{07} \cdot d_{17} \cdot d_{27} \cdot d_{37} \cdot d_{47} \cdot d_{57} \cdot d_{67}$

2.2 Triquadratische Interpolation (Sextische Interpolation)

Mit

$$d_{mn} = \frac{1}{x_m - x_n}$$

und dem kgV

$$\begin{aligned} d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06} \\ \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \\ \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26} \\ \cdot d_{34} \cdot d_{35} \cdot d_{36} \\ \cdot d_{45} \cdot d_{46} \\ \cdot d_{56} \end{aligned}$$

ergibt sich das sextische Interpolationspolynom

$$y = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + a_5 \cdot x^5 + a_6 \cdot x^6$$

mit den Koeffizienten:

- $a_0^{(6)} =$

$$\begin{aligned} &+y_0 \cdot \\ &\quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06} \\ &-y_1 \cdot \\ &\quad x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \\ &+y_2 \cdot \\ &\quad x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26} \\ &-y_3 \cdot \\ &\quad x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35} \cdot d_{36} \\ &+y_4 \cdot \\ &\quad x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \cdot d_{46} \\ &-y_5 \cdot \\ &\quad x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45} \cdot d_{56} \\ &+y_6 \cdot \\ &\quad x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot d_{06} \cdot d_{16} \cdot d_{26} \cdot d_{36} \cdot d_{46} \cdot d_{56} \end{aligned}$$

- $a_1^{(6)} =$

$$\begin{aligned} &-y_0 \cdot \\ &(\\ &\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6) \\ &\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \\ &\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\ &\quad +x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\ &\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\ &) \\ &\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06} \cdot \\ &+y_1 \cdot \\ &(\\ &\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6) \\ &\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \\ &\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\ &\quad +x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\ &\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\ &) \\ &\quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16} \\ &-y_2 \cdot \\ &(\\ &\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6) \\ &\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
)& \\
&\cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26} \\
+y_3 \cdot& \\
(& \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
)& \\
&\cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35} \cdot d_{36} \\
-y_4 \cdot& \\
(& \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_5 + x_6) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
)& \\
&\cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \cdot d_{46} \\
+y_5 \cdot& \\
(& \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_6) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_6 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6 \\
)& \\
&\cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45} \cdot d_{56} \\
-y_6 \cdot& \\
(& \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5) \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
)& \\
&\cdot d_{06} \cdot d_{16} \cdot d_{26} \cdot d_{36} \cdot d_{46} \cdot d_{56}
\end{aligned}
$$

- $a_2^{(6)} =$

$$
\begin{aligned}
+y_0 \cdot& \\
(& \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6) \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6) \\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6) \\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6) \\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
&+x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \\
)& \\
&\cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-y_1\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{01}\cdot d_{12}\cdot d_{13}\cdot d_{14}\cdot d_{15}\cdot d_{16}\\
&+y_2\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_3\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{02}\cdot d_{12}\cdot d_{23}\cdot d_{24}\cdot d_{25}\cdot d_{26}\\
&-y_3\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_2\cdot x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{03}\cdot d_{13}\cdot d_{23}\cdot d_{34}\cdot d_{35}\cdot d_{36}\\
&+y_4\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_2\cdot(x_3+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_3\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_3\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{04}\cdot d_{14}\cdot d_{24}\cdot d_{34}\cdot d_{45}\cdot d_{46}\\
&-y_5\cdot
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\\
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_6)\\
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_6)\\
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot x_6\\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_6)\\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_6\\
&\quad +x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6\\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_6)\\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_6\\
&\quad +x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6\\
&\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45} \cdot d_{56}\\
&+y_6 \cdot\\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5)\\
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5)\\
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot x_5\\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5)\\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5\\
&\quad +x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 v\\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5)\\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5\\
&\quad +x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5\\
&\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5\\
&)\\
&\quad \cdot d_{06} \cdot d_{16} \cdot d_{26} \cdot d_{36} \cdot d_{46} \cdot d_{56}
\end{aligned}
$$

- $a_3^{(6)} =$

$$
\begin{aligned}
&-y_0 \cdot\\
&(\\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6)\\
&\quad +x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6)\\
&\quad +x_1 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)\\
&\quad +x_1 \cdot x_5 \cdot x_6\\
&\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6)\\
&\quad +x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)\\
&\quad +x_2 \cdot x_5 \cdot x_6\\
&\quad +x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)\\
&\quad +x_3 \cdot x_5 \cdot x_6\\
&\quad +x_4 \cdot x_5 \cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06}\\
&+y_1 \cdot\\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6)\\
&\quad +x_0 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6)\\
&\quad +x_0 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)\\
&\quad +x_0 \cdot x_5 \cdot x_6\\
&\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6)\\
&\quad +x_2 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)\\
&\quad +x_2 \cdot x_5 \cdot x_6\\
&\quad +x_3 \cdot x_4 \cdot (x_5 + x_6)\\
&\quad +x_3 \cdot x_5 \cdot x_6\\
&\quad +x_4 \cdot x_5 \cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-y_2\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot(x_3+x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_3\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{02}\cdot d_{12}\cdot d_{23}\cdot d_{24}\cdot d_{25}\cdot d_{26}\\
&+y_3\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot(x_2+x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot(x_4+x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_2\cdot x_4\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_2\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_4\cdot x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{03}\cdot d_{13}\cdot d_{23}\cdot d_{34}\cdot d_{35}\cdot d_{36}\\
&-y_4\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot(x_2+x_3+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot(x_3+x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot(x_3+x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot(x_5+x_6)\\
&\quad +x_2\cdot x_5\cdot x_6\\
&\quad +x_3\cdot x_5\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{04}\cdot d_{14}\cdot d_{24}\cdot d_{34}\cdot d_{45}\cdot d_{46}\\
&+y_5\cdot\\
&(\\
&\quad +x_0\cdot x_1\cdot(x_2+x_3+x_4+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_2\cdot(x_3+x_4+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_3\cdot(x_4+x_6)\\
&\quad +x_0\cdot x_4\cdot x_6\\
&\quad +x_1\cdot x_2\cdot(x_3+x_4+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_3\cdot(x_4+x_6)\\
&\quad +x_1\cdot x_4\cdot x_6\\
&\quad +x_2\cdot x_3\cdot(x_4+x_6)\\
&\quad +x_2\cdot x_4\cdot x_6\\
&\quad +x_3\cdot x_4\cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{05}\cdot d_{15}\cdot d_{25}\cdot d_{35}\cdot d_{45}\cdot d_{56}\\
&-y_6\cdot
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\\
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_4 + x_5)\\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5)\\
&\quad +x_0 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5)\\
&\quad +x_0 \cdot x_4 \cdot x_5\\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5)\\
&\quad +x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5)\\
&\quad +x_1 \cdot x_4 \cdot x_5\\
&\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5)\\
&\quad +x_2 \cdot x_4 \cdot x_5\\
&\quad +x_3 \cdot x_4 \cdot x_5\\
&)\\
&\quad \cdot d_{06} \cdot d_{16} \cdot d_{26} \cdot d_{36} \cdot d_{46} \cdot d_{56}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\bullet\ a_4^{(6)} =\\
&+y_0 \cdot\\
&(\\
&\quad +x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)\\
&\quad +x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6)\\
&\quad +x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6)\\
&\quad +x_4 \cdot (x_5 + x_6)\\
&\quad +x_5 \cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06}\\
&-y_1 \cdot\\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot (x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)\\
&\quad +x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6)\\
&\quad +x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6)\\
&\quad +x_4 \cdot (x_5 + x_6)\\
&\quad +x_5 \cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16}\\
&+y_2 \cdot\\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)\\
&\quad +x_1 \cdot (x_3 + x_4 + x_5 + x_6)\\
&\quad +x_3 \cdot (x_4 + x_5 + x_6)\\
&\quad +x_4 \cdot (x_5 + x_6)\\
&\quad +x_5 \cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26}\\
&-y_3 \cdot\\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6)\\
&\quad +x_1 \cdot (x_2 + x_4 + x_5 + x_6)\\
&\quad +x_2 \cdot (x_4 + x_5 + x_6)\\
&\quad +x_4 \cdot (x_5 + x_6)\\
&\quad +x_5 \cdot x_6\\
&)\\
&\quad \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35} \cdot d_{36}\\
&+y_4 \cdot\\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6)\\
&\quad +x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_5 + x_6)\\
&\quad +x_2 \cdot (x_3 + x_5 + x_6)\\
&\quad +x_3 \cdot (x_5 + x_6)
\end{aligned}
$$

$+x_5 \cdot x_6$
$)$
$\cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \cdot d_{46}$
$-y_5 \cdot$
$($
$+x_0 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6)$
$+x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_4 + x_6)$
$+x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_6)$
$+x_3 \cdot (x_4 + x_6)$
$+x_4 \cdot x_6$
$)$
$\cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45} \cdot d_{56}$
$+y_6 \cdot$
$($
$+x_0 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$
$+x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_4 + x_5)$
$+x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5)$
$+x_3 \cdot (x_4 + x_5)$
$+x_4 \cdot x_5$
$)$
$\cdot d_{06} \cdot d_{16} \cdot d_{26} \cdot d_{36} \cdot d_{46} \cdot d_{56}$

- $a_5^{(6)} =$

$-y_0 \cdot$
$($
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$
$)$
$\cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06}$
$+y_1 \cdot$
$($
$x_0 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$
$)$
$\cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16}$
$-y_2 \cdot$
$($
$x_0 + x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$
$)$
$\cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26}$
$+y_3 \cdot$
$($
$x_0 + x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6$
$)$
$\cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35} \cdot d_{36}$
$-y_4 \cdot$
$($
$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6$
$)$
$\cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \cdot d_{46}$
$+y_5 \cdot$
$($
$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6$
$)$
$\cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45} \cdot d_{56}$
$-y_6 \cdot$
$($
$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$
$)$

$\cdot d_{06} \cdot d_{16} \cdot d_{26} \cdot d_{36} \cdot d_{46} \cdot d_{56}$

- $a_6^{(6)} =$

$+y_0 \cdot$
$d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \cdot d_{06}$
$-y_1 \cdot$
$d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \cdot d_{16}$
$+y_2 \cdot$
$d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \cdot d_{26}$
$-y_3 \cdot$
$d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35} \cdot d_{36}$
$+y_4 \cdot$
$d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \cdot d_{46}$
$-y_5 \cdot$
$d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45} \cdot d_{56}$
$+y_6 \cdot$
$d_{06} \cdot d_{16} \cdot d_{26} \cdot d_{36} \cdot d_{46} \cdot d_{56}$

2.3 Quintische Interpolation

Mit

$$d_{mn} = \frac{1}{x_m - x_n}$$

und dem kgV

$$\begin{aligned} d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \\ \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \\ \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \\ \cdot d_{34} \cdot d_{35} \\ \cdot d_{45} \end{aligned}$$

ergibt sich das quintische Interpolationspolynom

$$y = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4 + a_5 \cdot x^5$$

mit den Koeffizienten:

- $a_0^{(5)} =$

$$\begin{aligned} &-y_0 \cdot \\ &\quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \\ &+y_1 \cdot \\ &\quad x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \\ &-y_2 \cdot \\ &\quad x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \\ &+y_3 \cdot \\ &\quad x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35} \\ &-y_4 \cdot \\ &\quad x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \\ &+y_5 \cdot \\ &\quad x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45} \end{aligned}$$

- $a_1^{(5)} = +y_0 \cdot$

$$\begin{aligned} &(\\ &\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5) \\ &\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \\ &\quad +x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \\ &\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \\ &) \\ &\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \\ &-y_1 \cdot \\ &(\\ &\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5) \\ &\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \\ &\quad +x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \\ &\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \\ &) \\ &\quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \\ &+y_2 \cdot \\ &(\\ &\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5) \\ &\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \\ &\quad +x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \\ &\quad +x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \\ &) \\ &\quad \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \\ &-y_3 \cdot \\ &(\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_4 + x_5) \\
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35} \\
&+y_4 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_5) \\
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_5 \\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_5 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \\
&-y_5 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4) \\
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45}
\end{aligned}
$$

- $a_2^{(5)} =$

$$
\begin{aligned}
&-y_0 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5) \\
&\quad +x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5) \\
&\quad +x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5) \\
&\quad +x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&\quad +x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05} \\
&+y_1 \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5) \\
&\quad +x_0 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5) \\
&\quad +x_0 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5) \\
&\quad +x_2 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&\quad +x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \\
&-y_2 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot (x_3 + x_4 + x_5) \\
&\quad +x_0 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5) \\
&\quad +x_0 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&\quad +x_1 \cdot x_3 \cdot (x_4 + x_5) \\
&\quad +x_1 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&\quad +x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \\
&) \\
&\quad \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \\
&+y_3 \cdot \\
&(\\
&\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot (x_2 + x_4 + x_5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+x_0 \cdot x_2 \cdot (x_4 + x_5)\\
&+x_0 \cdot x_4 \cdot x_5\\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot (x_4 + x_5)\\
&+x_1 \cdot x_4 \cdot x_5\\
&+x_2 \cdot x_4 \cdot x_5\\
)&\\
&\cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35}\\
-y_4 &\cdot\\
(&\\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_5)\\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_5)\\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_5\\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_5)\\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_5\\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_5\\
)&\\
&\cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45}\\
+y_5 &\cdot\\
(&\\
&+x_0 \cdot x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_4)\\
&+x_0 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4)\\
&+x_0 \cdot x_3 \cdot x_4\\
&+x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4)\\
&+x_1 \cdot x_3 \cdot x_4\\
&+x_2 \cdot x_3 \cdot x_4\\
)&\\
&\cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45}
\end{aligned}
$$

- $a_3^{(5)} =$

$$
\begin{aligned}
+y_0 &\\
(&\\
&+x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_4 + x_5)\\
&+x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5)\\
&+x_3 \cdot (x_4 + x_5)\\
&+x_4 \cdot x_5\\
)&\\
&\cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05}\\
-y_1 &\cdot\\
(&\\
&+x_0 \cdot (x_2 + x_3 + x_4 + x_5)\\
&+x_2 \cdot (x_3 + x_4 + x_5)\\
&+x_3 \cdot (x_4 + x_5)\\
&+x_4 \cdot x_5\\
)&\\
&\cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15}\\
+y_2 &\\
(&\\
&+x_0 \cdot (x_1 + x_3 + x_4 + x_5)\\
&+x_1 \cdot (x_3 + x_4 + x_5)\\
&+x_3 \cdot (x_4 + x_5)\\
&+x_4 \cdot x_5\\
)&\\
&\cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25}\\
-y_3 &\cdot\\
(&\\
&+x_0 \cdot (x_1 + x_2 + x_4 + x_5)\\
&+x_1 \cdot (x_2 + x_4 + x_5)
\end{aligned}
$$

$+x_2 \cdot (x_4 + x_5)$
$+x_4 \cdot x_5$
)
$\cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35}$
$+y_4 \cdot$
(
$+x_0 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_5)$
$+x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_5)$
$+x_2 \cdot (x_3 + x_5)$
$+x_3 \cdot x_5$
)
$\cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45}$
$-y_5 \cdot$
(
$+x_0 \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$
$+x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_4)$
$+x_2 \cdot (x_3 + x_4)$
$+x_3 \cdot x_4$
)
$\cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45}$

• $a_4^{(5)} =$
$-y_0 \cdot$
(
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$
)
$\cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05}$
$+y_1 \cdot$
(
$x_0 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$
)
$\cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15}$
$-y_2 \cdot$
(
$x_0 + x_1 + x_3 + x_4 + x_5$
)
$\cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25}$
$+y_3 \cdot$
(
$x_0 + x_1 + x_2 + x_4 + x_5$
)
$\cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35}$
$-y_4 \cdot$
(
$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_5$
)
$\cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45}$
$+y_5 \cdot$
(
$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
)
$\cdot d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45}$

• $a_5^{(5)} =$
$+y_0 \cdot$
$d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \cdot d_{05}$
$-y_1 \cdot$

$$
\begin{aligned}
& d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \cdot d_{15} \\
+ & y_2 \cdot \\
& d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \cdot d_{25} \\
- & y_3 \cdot \\
& d_{13} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \cdot d_{35} \\
+ & y_4 \cdot \\
& d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \cdot d_{45} \\
- & y_5 \cdot \\
& d_{05} \cdot d_{15} \cdot d_{25} \cdot d_{35} \cdot d_{45}
\end{aligned}
$$

2.4 Biquadratische Interpolation

Mit

$$d_{mn} = \frac{1}{x_m - x_n}$$

und dem kgV

$$\begin{aligned} d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \\ \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \\ \cdot d_{23} \cdot d_{24} \\ \cdot d_{34} \end{aligned}$$

ergibt sich das biquadratische Interpolationspolynom

$$y = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4$$

mit den Koeffitzienten:

- $a_0^{(4)} =$

$$\begin{aligned} &+y_0 \cdot \\ &\quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \\ &-y_1 \cdot \\ &\quad x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \\ &+y_2 \cdot \\ &\quad x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \\ &-y_3 \cdot \\ &\quad x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \\ &+y_4 \cdot \\ &\quad x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34} \end{aligned}$$

- $a_1^{(4)} =$

$$\begin{aligned} &-y_0 \cdot \\ &(\\ &\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + x_4) \\ &\quad +x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \\ &\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \\ &) \\ &\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04} \\ &+y_1 \cdot \\ &(\\ &\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot (x_3 +) \\ &\quad +x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \\ &\quad +x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \\ &) \\ &\quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14} \\ &-y_2 \cdot \\ &(\\ &\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot (x_3 + x_4) \\ &\quad +x_0 \cdot x_3 \cdot x_4 \\ &\quad +x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \\ &) \\ &\quad \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24} \\ &+y_3 \cdot \\ &(\\ &\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot (x_2 + x_4) \\ &\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_4 \\ &\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 \\ &) \\ &\quad \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34} \end{aligned}$$

$-y_4 \cdot$
$($
$\quad +x_0 \cdot x_1 \cdot (x_2 + x_3)$
$\quad +x_0 \cdot x_2 \cdot x_3$
$\quad +x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$
$)$
$\quad \cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34}$

• $a_2^{(4)} =$
$+y_0 \cdot$
$($
$\quad +x_1 \cdot (x_2 + x_3 + x_4)$
$\quad +x_2 \cdot (x_3 + x_4)$
$\quad +x_3 \cdot x_4$
$)$
$\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04}$
$-y_1 \cdot$
$($
$\quad +x_0 \cdot (x_2 + x_3 + x_4)$
$\quad +x_2 \cdot (x_3 + x_4)$
$\quad +x_3 \cdot x_4$
$)$
$\quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14}$
$+y_2 \cdot$
$($
$\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_3 + x_4)$
$\quad +x_1 \cdot (x_3 + x_4)$
$\quad +x_3 \cdot x_4$
$)$
$\quad \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24}$
$-y_3 \cdot$
$($
$\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_2 + x_4)$
$\quad +x_1 \cdot (x_2 + x_4)$
$\quad +x_2 \cdot x_4$
$)$
$\quad \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34}$
$+y_4 \cdot$
$($
$\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$
$\quad +x_1 \cdot (x_2 + x_3)$
$\quad +x_2 \cdot x_3$
$)$
$\quad \cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34}$

• $a_3^{(4)} =$
$-y_0 \cdot$
$($
$\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
$)$
$\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04}$
$+y_1 \cdot$
$($
$\quad x_0 + x_2 + x_3 + x_4$
$)$
$\quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14}$
$-y_2 \cdot$

$$
\begin{aligned}
&(\\
&\quad x_0 + x_1 + x_3 + x_4\\
&)\\
&\quad \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24}\\
&+y_3 \cdot\\
&(\\
&\quad x_0 + x_1 + x_2 + x_4\\
&)\\
&\quad \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34}\\
&-y_4 \cdot\\
&(\\
&\quad x_0 + x_1 + x_2 + x_3\\
&)\\
&\quad \cdot d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34}
\end{aligned}
$$

- $a_4^{(4)} =$

$$
\begin{aligned}
&+y_0 \cdot\\
&\quad d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \cdot d_{04}\\
&-y_1 \cdot\\
&\quad d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13} \cdot d_{14}\\
&+y_2 \cdot\\
&\quad d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23} \cdot d_{24}\\
&-y_3 \cdot\\
&\quad d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23} \cdot d_{34}\\
&+y_4 \cdot\\
&\quad d_{04} \cdot d_{14} \cdot d_{24} \cdot d_{34}
\end{aligned}
$$

2.5 Kubische Interpolation

Mit

$$d_{mn} = \frac{1}{x_m - x_n}$$

und dem kgV

$$\begin{aligned} d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03} \\ \cdot d_{12} \cdot d_{13} \\ \cdot d_{23} \end{aligned}$$

ergibt sich das kubische Interpolationspolynom

$$y = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3$$

mit den Koeffizienten:

- $a_0^{(3)} =$

$-y_0 \cdot$
$\quad x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03}$
$+y_1 \cdot$
$\quad x_0 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13}$
$-y_2 \cdot$
$\quad x_0 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23}$
$+y_3 \cdot$
$\quad x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23}$

- $a_1^{(3)} =$

$+y_0 \cdot$
$($
$\quad +x_1 \cdot (x_2 + x_3)$
$\quad +x_2 \cdot x_3$
$)$
$\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03}$
$-y_1 \cdot$
$($
$\quad +x_0 \cdot (x_2 + x_3)$
$\quad +x_2 \cdot x_3$
$)$
$\quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13}$
$+y_2 \cdot$
$($
$\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_3)$
$\quad +x_1 \cdot x_3$
$)$
$\quad \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23}$
$-y_3 \cdot$
$($
$\quad +x_0 \cdot (x_1 + x_2)$
$\quad +x_1 \cdot x_2$
$)$
$\quad \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23}$

- $a_2^{(3)} =$

$-y_0 \cdot$
$($
$\quad x_1 + x_2 + x_3$
$)$
$\quad \cdot d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03}$

$+y_1 \cdot$
$($
$\quad x_0 + x_2 + x_3$
$)$
$\quad \cdot d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13}$
$-y_2 \cdot$
$($
$\quad x_0 + x_1 + x_3$
$)$
$\quad \cdot d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23}$
$+y_3 \cdot$
$($
$\quad x_0 + x_1 + x_2$
$)$
$\quad \cdot d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23}$

- $a_3^{(3)} =$

$+y_0 \cdot$
$\quad d_{01} \cdot d_{02} \cdot d_{03}$
$-y_1 \cdot$
$\quad d_{01} \cdot d_{12} \cdot d_{13}$
$+y_2 \cdot$
$\quad d_{02} \cdot d_{12} \cdot d_{23}$
$-y_3 \cdot$
$\quad d_{03} \cdot d_{13} \cdot d_{23}$

2.6 Quadratische Interpolation

Mit

$$d_{mn} = \frac{1}{x_m - x_n}$$

und dem kgV

$$d_{01} \cdot d_{02}$$
$$\cdot d_{12}$$

ergibt sich das quadratische Interpolationspolynom

$$y = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + a_2 \cdot x^2$$

mit den Koeffizienten:

- $a_0^{(2)} =$

$+y_0 \cdot$
$x_1 \cdot x_2 \cdot d_{01} \cdot d_{02}$
$-y_1 \cdot$
$x_0 \cdot x_2 \cdot d_{01} \cdot d_{12}$
$+y_2 \cdot$
$x_0 \cdot x_1 \cdot d_{02} \cdot d_{12}$

- $a_1^{(2)} =$

$-y_0 \cdot$
$($
$x_1 + x_2$
$)$
$\cdot d_{01} \cdot d_{02}$
$+y_1 \cdot$
$($
$x_0 + x_2$
$)$
$\cdot d_{01} \cdot d_{12}$
$-y_2 \cdot$
$($
$x_0 + x_1$
$)$
$\cdot d_{02} \cdot d_{12}$

- $a_2^{(2)} =$

$+y_0 \cdot$
$d_{01} \cdot d_{02}$
$-y_1 \cdot$
$d_{01} \cdot d_{12}$
$+y_2 \cdot$
$d_{02} \cdot d_{12}$

2.7 Lineare Interpolation

Mit

$$d_{mn} = \frac{1}{x_m - x_n}$$

und dem kgV

$$d_{01}$$

ergibt sich das lineare Interpolationspolynom

$$y = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1$$

mit den Koeffizienten:

- $a_0^{(1)} =$

$-y_0 \cdot$

$x_1 \cdot d_{01}$

$+y_1 \cdot$

$x_0 \cdot d_{01}$

- $a_1^{(1)} =$

$+y_0 \cdot$

d_{01}

$-y_1 \cdot$

d_{01}

LaTeX 2_ε

$$\oiint$$

2.2 (Polynom)Interpolation nach Newton

(Polynom)Interpolation nach Newton

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 27. September 2013 – Letzte Revision: 21. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeindarstellungen **3**
1.1 Polynominterpolation n- ten Grades . . . 3
1.2 Septische Interpolation . . . 4
1.3 Sextische (Triquadratische) Interpolation . . . 6
1.4 Quintische Interpolation . . . 8
1.5 Biquadratische Interpolation . . . 10
1.6 Kubikinterpolation . . . 11
1.7 Quadratinterpolation . . . 12
1.8 Linearinterpolation . . . 13

2 Koeffizientendarstellungen **14**
2.1 Septische Interpolation . . . 15
2.2 Sextische (Triquadratische) Interpolation . . . 19
2.3 Quintische Interpolation . . . 22
2.4 Biquadratische Interpolation . . . 24
2.5 Kubikinterpolation . . . 25
2.6 Quadratinterpolation . . . 26
2.7 Linearinterpolation . . . 27

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Allgemeindarstellungen

1.1 Polynominterpolation n- ten Grades

Es soll eine Polynominterpolation nach Newton mit Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ_n eine Wellenlänge darstellt und X_n die Ortskoordinate. [001]ff.

Damit ergibt sich eine untere Dreiecksmatrix der Form:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Matrixsystems $Ac = X$ stellt die Lösung der Koeffizienten der Polynominterpolation dar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

Das Polynom ist nun definiert durch:

$$P\left(\lambda\right) \ = c_0 + c_1\left(\lambda - \lambda_0\right) + \ldots + c_n \cdot \prod_{i=0}^{n-1}\left(\lambda - \lambda_i\right)$$

$\Rightarrow$

$$P\left(\lambda\right) \ = \sum_{j=0}^{n}\left[c_j \cdot \prod_{i=0}^{j-1}\left(\lambda - \lambda_i\right)\right]$$

Wobei:

$$a_{(x)(y)} = a_{(1\cdots n)(1\cdots n)} = \prod_{i=0}^{y-1}\left(\lambda_x - \lambda_i\right)$$

1.2 Septische Interpolation

[001]ff. Es soll eine Polynominterpolation nach Newton mit 8 Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ_n eine Wellenlänge darstellt und X_n die Ortskoordinate.

Damit ergibt sich eine untere Dreiecksmatrix der Form:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & 0 & 0 \\ 1 & a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & 0 \\ 1 & a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Matrixsystems $Ac = X$ stellt die Lösung der Koeffizienten der Polynominterpolation dar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & 0 & 0 \\ 1 & a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & 0 \\ 1 & a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_0 + a_{11}c_1 \\ c_0 + a_{21}c_1 + a_{22}c_2 \\ c_0 + a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 \\ c_0 + a_{41} + a_{42}c_2 + a_{43}c_3 + a_{44}c_4 \\ c_0 + a_{51}c_1 + a_{52}c_2 + a_{53}c_3 + a_{54}c_4 + a_{55}c_5 \\ c_0 + a_{61}c_1 + a_{62}c_2 + a_{63}c_3 + a_{64}c_4 + a_{65}c_5 + a_{66}c_6 \\ c_0 + a_{71}c_1 + a_{72}c_2 + a_{73}c_3 + a_{74}c_4 + a_{75}c_5 + a_{76}c_6 + a_{77}c_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$c_0 = X_0$$
$$c_1 = \frac{X_1 - c_0}{a_{11}}$$
$$c_2 = \frac{X_2 - c_0 - a_{21}c_1}{a_{22}}$$
$$c_3 = \frac{X_3 - c_0 - a_{31}c_1 - a_{32}c_2}{a_{33}}$$
$$c_4 = \frac{X_4 - c_0 - a_{41} - a_{42}c_2 - a_{43}c_3}{a_{44}}$$
$$c_5 = \frac{X_5 - c_0 - a_{51}c_1 - a_{52}c_2 - a_{53}c_3 - a_{54}c_4}{a_{55}}$$
$$c_6 = \frac{X_6 - c_0 - a_{61}c_1 - a_{62}c_2 - a_{63}c_3 - a_{64}c_4 - a_{65}c_5}{a_{66}}$$
$$c_7 = \frac{X_7 - c_0 - a_{71}c_1 - a_{72}c_2 - a_{73}c_3 - a_{74}c_4 - a_{75}c_5 - a_{76}c_6}{a_{77}}$$

Das Polynom ist nun definiert durch:

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) = \quad & c_0 + c_1(\lambda - \lambda_0) \\
& + c_2(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) \\
& + c_3(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \\
& + c_4(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \\
& + c_5(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4) \\
& + c_6(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)(\lambda - \lambda_5) \\
& + c_7(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)(\lambda - \lambda_5)(\lambda - \lambda_6)
\end{aligned}
$$

Wobei:

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \lambda_1 - \lambda_0 \\
a_{21} &= \lambda_2 - \lambda_0 \\
a_{31} &= \lambda_3 - \lambda_0 \\
a_{41} &= \lambda_4 - \lambda_0 \\
a_{51} &= \lambda_5 - \lambda_0 \\
a_{61} &= \lambda_6 - \lambda_0 \\
a_{71} &= \lambda_7 - \lambda_0 \\
a_{22} &= (\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_1) \\
a_{32} &= (\lambda_3 - \lambda_0)(\lambda_3 - \lambda_1) \\
a_{42} &= (\lambda_4 - \lambda_0)(\lambda_4 - \lambda_1) \\
a_{52} &= (\lambda_5 - \lambda_0)(\lambda_5 - \lambda_1) \\
a_{62} &= (\lambda_6 - \lambda_0)(\lambda_6 - \lambda_1) \\
a_{72} &= (\lambda_7 - \lambda_0)(\lambda_7 - \lambda_1) \\
a_{33} &= (\lambda_3 - \lambda_0)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \\
a_{43} &= (\lambda_4 - \lambda_0)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2) \\
a_{53} &= (\lambda_5 - \lambda_0)(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_2) \\
a_{63} &= (\lambda_6 - \lambda_0)(\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_2) \\
a_{73} &= (\lambda_7 - \lambda_0)(\lambda_7 - \lambda_1)(\lambda_7 - \lambda_2) \\
a_{44} &= (\lambda_4 - \lambda_0)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3) \\
a_{54} &= (\lambda_5 - \lambda_0)(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_5)(\lambda_5 - \lambda_3) \\
a_{64} &= (\lambda_6 - \lambda_0)(\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_3) \\
a_{74} &= (\lambda_7 - \lambda_0)(\lambda_7 - \lambda_1)(\lambda_7 - \lambda_5)(\lambda_7 - \lambda_3) \\
a_{55} &= (\lambda_5 - \lambda_0)(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_5)(\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_4) \\
a_{65} &= (\lambda_6 - \lambda_0)(\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_4) \\
a_{75} &= (\lambda_7 - \lambda_0)(\lambda_7 - \lambda_1)(\lambda_7 - \lambda_5)(\lambda_7 - \lambda_3)(\lambda_7 - \lambda_4) \\
a_{66} &= (\lambda_6 - \lambda_0)(\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_4)(\lambda_6 - \lambda_5) \\
a_{76} &= (\lambda_7 - \lambda_0)(\lambda_7 - \lambda_1)(\lambda_7 - \lambda_5)(\lambda_7 - \lambda_3)(\lambda_7 - \lambda_4)(\lambda_7 - \lambda_5) \\
a_{76} &= (\lambda_7 - \lambda_0)(\lambda_7 - \lambda_1)(\lambda_7 - \lambda_5)(\lambda_7 - \lambda_3)(\lambda_7 - \lambda_4)(\lambda_7 - \lambda_5)(\lambda_7 - \lambda_6)
\end{aligned}
$$

1.3 Sextische (Triquadratische) Interpolation

[001]ff. Es soll eine Polynominterpolation nach Newton mit 7 Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ_n eine Wellenlänge darstellt und X_n die Ortskoordinate.

Damit ergibt sich eine untere Dreiecksmatrix der Form:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ 1 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & 0 \\ 1 & a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Matrixsystems $Ac = X$ stellt die Lösung der Koeffizienten der Polynominterpolation dar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 \\ 1 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & 0 \\ 1 & a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_0 + a_{11}c_1 \\ c_0 + a_{21}c_1 + a_{22}c_2 \\ c_0 + a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 \\ c_0 + a_{41} + a_{42}c_2 + a_{43}c_3 + a_{44}c_4 \\ c_0 + a_{51}c_1 + a_{52}c_2 + a_{53}c_3 + a_{54}c_4 + a_{55}c_5 \\ c_0 + a_{61}c_1 + a_{62}c_2 + a_{63}c_3 + a_{64}c_4 + a_{65}c_5 + a_{66}c_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$c_0 = X_0$$

$$c_1 = \frac{X_1 - c_0}{a_{11}}$$

$$c_2 = \frac{X_2 - c_0 - a_{21}c_1}{a_{22}}$$

$$c_3 = \frac{X_3 - c_0 - a_{31}c_1 - a_{32}c_2}{a_{33}}$$

$$c_4 = \frac{X_4 - c_0 - a_{41} - a_{42}c_2 - a_{43}c_3}{a_{44}}$$

$$c_5 = \frac{X_5 - c_0 - a_{51}c_1 - a_{52}c_2 - a_{53}c_3 - a_{54}c_4}{a_{55}}$$

$$c_6 = \frac{X_6 - c_0 - a_{61}c_1 - a_{62}c_2 - a_{63}c_3 - a_{64}c_4 - a_{65}c_5}{a_{66}}$$

Das Polynom ist nun definiert durch:

$$P(\lambda) = \begin{array}{c} c_0 + c_1(\lambda - \lambda_0) \\ +c_2(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) \\ +c_3(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \\ +c_4(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) \\ +c_5(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4) \\ +c_6(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)(\lambda - \lambda_5) \end{array}$$

Wobei:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \lambda_1 - \lambda_0 \\
a_{21} &= \lambda_2 - \lambda_0 \\
a_{31} &= \lambda_3 - \lambda_0 \\
a_{41} &= \lambda_4 - \lambda_0 \\
a_{51} &= \lambda_5 - \lambda_0 \\
a_{61} &= \lambda_6 - \lambda_0 \\
a_{22} &= (\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_1) \\
a_{32} &= (\lambda_3 - \lambda_0)(\lambda_3 - \lambda_1) \\
a_{42} &= (\lambda_4 - \lambda_0)(\lambda_4 - \lambda_1) \\
a_{52} &= (\lambda_5 - \lambda_0)(\lambda_5 - \lambda_1) \\
a_{62} &= (\lambda_6 - \lambda_0)(\lambda_6 - \lambda_1) \\
a_{33} &= (\lambda_3 - \lambda_0)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \\
a_{43} &= (\lambda_4 - \lambda_0)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2) \\
a_{53} &= (\lambda_5 - \lambda_0)(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_2) \\
a_{63} &= (\lambda_6 - \lambda_0)(\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_2) \\
a_{44} &= (\lambda_4 - \lambda_0)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3) \\
a_{54} &= (\lambda_5 - \lambda_0)(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_5)(\lambda_5 - \lambda_3) \\
a_{64} &= (\lambda_6 - \lambda_0)(\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_3) \\
a_{55} &= (\lambda_5 - \lambda_0)(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_5)(\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_4) \\
a_{65} &= (\lambda_6 - \lambda_0)(\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_4) \\
a_{66} &= (\lambda_6 - \lambda_0)(\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_3)(\lambda_6 - \lambda_4)(\lambda_6 - \lambda_5)
\end{aligned}$$

1.4 Quintische Interpolation

[001]ff. Es soll eine Polynominterpolation nach Newton mit 6 Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ_n eine Wellenlänge darstellt und X_n die Ortskoordinate.

Damit ergibt sich eine untere Dreiecksmatrix der Form:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ 1 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \\ 1 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Matrixsystems $Ac = X$ stellt die Lösung der Koeffizienten der Polynominterpolation dar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ 1 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & 0 \\ 1 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_0 + a_{11}c_1 \\ c_0 + a_{21}c_1 + a_{22}c_2 \\ c_0 + a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 \\ c_0 + a_{41} + a_{42}c_2 + a_{43}c_3 + a_{44}c_4 \\ c_0 + a_{51}c_1 + a_{52}c_2 + a_{53}c_3 + a_{54}c_4 + a_{55}c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$c_0 = X_0$$
$$c_1 = \frac{X_1 - c_0}{a_{11}}$$
$$c_2 = \frac{X_2 - c_0 - a_{21}c_1}{a_{22}}$$
$$c_3 = \frac{X_3 - c_0 - a_{31}c_1 - a_{32}c_2}{a_{33}}$$
$$c_4 = \frac{X_4 - c_0 - a_{41} - a_{42}c_2 - a_{43}c_3}{a_{44}}$$
$$c_5 = \frac{X_5 - c_0 - a_{51}c_1 - a_{52}c_2 - a_{53}c_3 - a_{54}c_4}{a_{55}}$$

Das Polynom ist nun definiert durch:

$$P\left(\lambda\right) = \begin{aligned} & c_0 + c_1\left(\lambda - \lambda_0\right) \\ & + c_2\left(\lambda - \lambda_0\right)\left(\lambda - \lambda_1\right) \\ & + c_3\left(\lambda - \lambda_0\right)\left(\lambda - \lambda_1\right)\left(\lambda - \lambda_2\right) \\ & + c_4\left(\lambda - \lambda_0\right)\left(\lambda - \lambda_1\right)\left(\lambda - \lambda_2\right)\left(\lambda - \lambda_3\right) \\ & + c_5\left(\lambda - \lambda_0\right)\left(\lambda - \lambda_1\right)\left(\lambda - \lambda_2\right)\left(\lambda - \lambda_3\right)\left(\lambda - \lambda_4\right) \end{aligned}$$

Wobei:

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \lambda_1 - \lambda_0 \\
a_{21} &= \lambda_2 - \lambda_0 \\
a_{31} &= \lambda_3 - \lambda_0 \\
a_{41} &= \lambda_4 - \lambda_0 \\
a_{51} &= \lambda_5 - \lambda_0 \\
a_{22} &= (\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_1) \\
a_{32} &= (\lambda_3 - \lambda_0)(\lambda_3 - \lambda_1) \\
a_{42} &= (\lambda_4 - \lambda_0)(\lambda_4 - \lambda_1) \\
a_{52} &= (\lambda_5 - \lambda_0)(\lambda_5 - \lambda_1) \\
a_{33} &= (\lambda_3 - \lambda_0)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \\
a_{43} &= (\lambda_4 - \lambda_0)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2) \\
a_{53} &= (\lambda_5 - \lambda_0)(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_2) \\
a_{44} &= (\lambda_4 - \lambda_0)(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3) \\
a_{54} &= (\lambda_5 - \lambda_0)(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_5)(\lambda_5 - \lambda_3) \\
a_{55} &= (\lambda_5 - \lambda_0)(\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_5)(\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_4)
\end{aligned}
$$

1.5 Biquadratische Interpolation

[001]ff. Es soll eine Polynominterpolation nach Newton mit 5 Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ_n eine Wellenlänge darstellt und X_n die Ortskoordinate.

Damit ergibt sich eine untere Dreiecksmatrix der Form:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 1 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Matrixsystems $Ac = X$ stellt die Lösung der Koeffizienten der Polynominterpolation dar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 1 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_0 + a_{11}c_1 \\ c_0 + a_{21}c_1 + a_{22}c_2 \\ c_0 + a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 \\ c_0 + a_{41}c_1 + a_{42}c_2 + a_{43}c_3 + a_{44}c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} c_0 &= X_0 \\ c_1 &= \frac{X_1 - c_0}{a_{11}} \\ c_2 &= \frac{X_2 - c_0 - a_{21}c_1}{a_{22}} \\ c_3 &= \frac{X_3 - c_0 - a_{31}c_1 - a_{32}c_2}{a_{33}} \\ c_4 &= \frac{X_4 - c_0 - a_{41}c_1 - a_{42}c_2 - a_{43}c_3}{a_{44}} \end{aligned}$$

Das Polynom ist nun definiert durch:

$$P\left(\lambda\right) = \begin{aligned} & c_0 + c_1\left(\lambda - \lambda_0\right) \\ & + c_2\left(\lambda - \lambda_0\right)\left(\lambda - \lambda_1\right) \\ & + c_3\left(\lambda - \lambda_0\right)\left(\lambda - \lambda_1\right)\left(\lambda - \lambda_2\right) \\ & + c_4\left(\lambda - \lambda_0\right)\left(\lambda - \lambda_1\right)\left(\lambda - \lambda_2\right)\left(\lambda - \lambda_3\right) \end{aligned}$$

Wobei:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \lambda_1 - \lambda_0 \\ a_{21} &= \lambda_2 - \lambda_0 \\ a_{31} &= \lambda_3 - \lambda_0 \\ a_{41} &= \lambda_4 - \lambda_0 \\ a_{22} &= \left(\lambda_2 - \lambda_0\right)\left(\lambda_2 - \lambda_1\right) \\ a_{32} &= \left(\lambda_3 - \lambda_0\right)\left(\lambda_3 - \lambda_1\right) \\ a_{42} &= \left(\lambda_4 - \lambda_0\right)\left(\lambda_4 - \lambda_1\right) \\ a_{33} &= \left(\lambda_3 - \lambda_0\right)\left(\lambda_3 - \lambda_1\right)\left(\lambda_3 - \lambda_2\right) \\ a_{43} &= \left(\lambda_4 - \lambda_0\right)\left(\lambda_4 - \lambda_1\right)\left(\lambda_4 - \lambda_2\right) \\ a_{44} &= \left(\lambda_4 - \lambda_0\right)\left(\lambda_4 - \lambda_1\right)\left(\lambda_4 - \lambda_2\right)\left(\lambda_4 - \lambda_3\right) \end{aligned}$$

1.6 Kubikinterpolation

Es soll eine Polynominterpolation nach Newton mit 4 Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ_n eine Wellenlänge darstellt und X_n die Ortskoordinate. [001]ff.

Damit ergibt sich eine untere Dreiecksmatrix der Form:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{11} & 0 & 0 \\ 1 & a_{21} & a_{22} & 0 \\ 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Matrixsystems $Ac = X$ stellt die Lösung der Koeffizienten der Polynominterpolation dar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a_{11} & 0 & 0 \\ 1 & a_{21} & a_{22} & 0 \\ 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_0 + a_{11}c_1 \\ c_0 + a_{21}c_1 + a_{22}c_2 \\ c_0 + a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$c_0 = X_0$$
$$c_1 = \frac{X_1 - c_0}{a_{11}}$$
$$c_2 = \frac{X_2 - c_0 - a_{21}c_1}{a_{22}}$$
$$c_3 = \frac{X_3 - c_0 - a_{31}c_1 - a_{32}c_2}{a_{33}}$$

Das Polynom ist nun definiert durch:

$$P\left(\lambda\right) = \begin{array}{c} c_0 + c_1\left(\lambda - \lambda_0\right) \\ +c_2\left(\lambda - \lambda_0\right)\left(\lambda - \lambda_1\right) \\ +c_3\left(\lambda - \lambda_0\right)\left(\lambda - \lambda_1\right)\left(\lambda - \lambda_2\right) \end{array}$$

Wobei:

$$a_{11} = \lambda_1 - \lambda_0$$
$$a_{21} = \lambda_2 - \lambda_0$$
$$a_{31} = \lambda_3 - \lambda_0$$
$$a_{22} = \left(\lambda_2 - \lambda_0\right)\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)$$
$$a_{32} = \left(\lambda_3 - \lambda_0\right)\left(\lambda_3 - \lambda_1\right)$$
$$a_{33} = \left(\lambda_3 - \lambda_0\right)\left(\lambda_3 - \lambda_1\right)\left(\lambda_3 - \lambda_2\right)$$

1.7 Quadratinterpolation

[001]ff. Es soll eine Polynominterpolation nach Newton mit 3 Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ_n eine Wellenlänge darstellt und X_n die Ortskoordinate.

Damit ergibt sich eine untere Dreiecksmatrix der Form:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_{11} & 0 \\ 1 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Matrixsystems $Ac = X$ stellt die Lösung der Koeffizienten der Polynominterpolation dar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a_{11} & 0 \\ 1 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_0 + a_{11}c_1 \\ c_0 + a_{21}c_1 + a_{22}c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$c_0 = X_0$$
$$c_1 = \frac{X_1 - c_0}{a_{11}}$$
$$c_2 = \frac{X_2 - c_0 - a_{21}c_1}{a_{22}}$$

Das Polynom ist nun definiert durch:

$$P\left(\lambda\right) = \begin{matrix} c_0 + c_1\left(\lambda - \lambda_0\right) \\ +c_2\left(\lambda - \lambda_0\right)\left(\lambda - \lambda_1\right) \end{matrix}$$

Wobei:

$$a_{11} = \lambda_1 - \lambda_0$$
$$a_{21} = \lambda_2 - \lambda_0$$
$$a_{22} = \left(\lambda_2 - \lambda_0\right)\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)$$

1.8 Linearinterpolation

Es soll eine Polynominterpolation nach Newton mit 2 Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ_n eine Wellenlänge darstellt und X_n die Ortskoordinate. [001]ff.

Damit ergibt sich eine untere Dreiecksmatrix der Form:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a_{11} \end{pmatrix}$$

Die Lösung des Matrixsystems $Ac = X$ stellt die Lösung der Koeffizienten der Polynominterpolation dar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_0 + a_{11} c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$c_0 = X_0$$

$$c_1 = \frac{X_1 - c_0}{a_{11}}$$

Das Polynom ist nun definiert durch:

$$P\left(\lambda\right) = \quad c_0 + c_1\left(\lambda - \lambda_0\right)$$

Wobei:

$$a_{11} = \lambda_1 - \lambda_0$$

2 Koeffizientendarstellungen

In einigen Anwendungsfällen ist es interessant die Koeffizienten explizit zu kennen. Über das Polynom $P(\lambda)$ nach Newton ist das zwar möglich, jedoch symbolisch unpraktisch beschrieben.

[001]ff.

2.1 Septische Interpolation

$P(\lambda) = a_7 \cdot \lambda^7 + a_6 \cdot \lambda^6 + a_5 \cdot \lambda^5 + a_4 \cdot \lambda^4 + a_3 \cdot \lambda^3 + a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0$

$$\mathbf{a_7^{(7)}} = +c_7$$

$$\mathbf{a_6^{(7)}} = \begin{cases} -c_7 \cdot (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \\ +c_6 \end{cases}$$

$$\mathbf{a_5^{(7)}} = \begin{cases} +c_7 \cdot \lambda_0 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \\ +c_7 \cdot \lambda_1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \\ +c_7 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \\ +c_7 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \\ +c_7 \cdot \lambda_4 \cdot (\lambda_5 + \lambda_6) \\ +c_7 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\ -c_6 \cdot (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) \\ +c_5 \end{cases}$$

$$\mathbf{a_4^{(7)}} = \begin{cases} -c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \\ -c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \\ -c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \\ -c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_4 \cdot (\lambda_5 + \lambda_6) \\ -c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\ -c_7 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \\ -c_7 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \\ -c_7 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_4 \cdot (\lambda_5 + \lambda_6) \\ -c_7 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\ -c_7 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \\ -c_7 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot (\lambda_5 + \lambda_6) \\ -c_7 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\ -c_7 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot (\lambda_5 + \lambda_6) \\ -c_7 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\ -c_7 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\ +c_6 \cdot \lambda_0 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) \\ +c_6 \cdot \lambda_1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) \\ +c_6 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) \\ +c_6 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5) \\ +c_6 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ -c_5 \cdot (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \\ +c_4 \end{cases}$$

$$
\mathbf{a}_{\mathbf{3}}^{(\mathbf{7})} = \begin{cases}
+c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \\
+c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \\
+c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_4 \cdot (\lambda_5 + \lambda_6) \\
+c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\
+c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \\
+c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot (\lambda_5 + \lambda_6) \\
+c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\
+c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot (\lambda_5 + \lambda_6) \\
+c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\
+c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\
+c_7 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \\
+c_7 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot (\lambda_5 + \lambda_6) \\
+c_7 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\
+c_7 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot (\lambda_5 + \lambda_6) \\
+c_7 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\
+c_7 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\
+c_7 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot (\lambda_5 + \lambda_6) \\
+c_7 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\
+c_7 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\
+c_7 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\
-c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) \\
-c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) \\
-c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5) \\
-c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\
-c_6 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) \\
-c_6 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5) \\
-c_6 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\
-c_6 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5) \\
-c_6 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\
-c_6 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\
+c_5 \cdot \lambda_0 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \\
+c_5 \cdot \lambda_1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \\
+c_5 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4) \\
+c_5 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\
-c_4 \cdot (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\
+c_3
\end{cases}
$$

$$
\mathbf{a_2^{(7)}} = \begin{cases}
-c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6) \\
-c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot (\lambda_5 + \lambda_6) \\
-c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\
-c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot (\lambda_5 + \lambda_6) \\
-c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\
-c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\
-c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot (\lambda_5 + \lambda_6) \\
-c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\
-c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\
-c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\
-c_7 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot (\lambda_5 + \lambda_6) \\
-c_7 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\
-c_7 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\
-c_7 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\
-c_7 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\
+c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) \\
+c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5) \\
+c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\
+c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5) \\
+c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\
+c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\
+c_6 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5) \\
+c_6 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\
+c_6 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\
+c_6 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\
-c_5 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \\
-c_5 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4) \\
-c_5 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\
-c_5 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4) \\
-c_5 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\
-c_5 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\
+c_4 \cdot \lambda_0 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\
+c_4 \cdot \lambda_1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3) \\
+c_4 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \\
-c_3 \cdot (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \\
+c_2
\end{cases}
$$

$$\mathbf{a_1^{(7)}} = \begin{cases} +c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot (\lambda_5 + \lambda_6) \\ +c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\ +c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\ +c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\ +c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\ +c_7 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\ -c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5) \\ -c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ -c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ -c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ -c_6 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ +c_5 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4) \\ +c_5 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\ +c_5 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\ +c_5 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\ -c_4 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3) \\ -c_4 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \\ -c_4 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \\ +c_3 \cdot \lambda_0 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) \\ +c_3 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ -c_2 \cdot (\lambda_0 + \lambda_1) \\ +c_1 \end{cases}$$

$$\mathbf{a_0^{(7)}} = \begin{cases} -c_7 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_6 \\ +c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ -c_5 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\ +c_4 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \\ -c_3 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ +c_2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \\ -c_1 \cdot \lambda_0 \\ +c_0 \end{cases}$$

2.2 Sextische (Triquadratische) Interpolation

$P(\lambda) = a_6 \cdot \lambda^6 + a_5 \cdot \lambda^5 + a_4 \cdot \lambda^4 + a_3 \cdot \lambda^3 + a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0$

$$\mathbf{a_6^{(6)}} = +c_6$$

$$\mathbf{a_5^{(6)}} = \begin{cases} -c_6 \cdot (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) \\ +c_5 \end{cases}$$

$$\mathbf{a_4^{(6)}} = \begin{cases} +c_6 \cdot \lambda_0 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) \\ +c_6 \cdot \lambda_1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) \\ +c_6 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) \\ +c_6 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5) \\ +c_6 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ -c_5 \cdot (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \\ +c_4 \end{cases}$$

$$\mathbf{a_3^{(6)}} = \begin{cases} -c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) \\ -c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) \\ -c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5) \\ -c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ -c_6 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) \\ -c_6 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5) \\ -c_6 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ -c_6 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5) \\ -c_6 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ -c_6 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ +c_5 \cdot \lambda_0 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \\ +c_5 \cdot \lambda_1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \\ +c_5 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4) \\ +c_5 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\ -c_4 \cdot (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\ +c_3 \end{cases}$$

$$\mathbf{a_2^{(6)}} = \begin{cases} +c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) \\ +c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5) \\ +c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ +c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5) \\ +c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ +c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ +c_6 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5) \\ +c_6 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ +c_6 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ +c_6 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ -c_5 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \\ -c_5 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4) \\ -c_5 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\ -c_5 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4) \\ -c_5 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\ -c_5 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\ +c_4 \cdot \lambda_0 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\ +c_4 \cdot \lambda_1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3) \\ +c_4 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \\ -c_3 \cdot (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \\ +c_2 \end{cases}$$

$$\mathbf{a_1^{(6)}} = \begin{cases} -c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot (\lambda_4 + \lambda_5) \\ -c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ -c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ -c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ -c_6 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ +c_5 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4) \\ +c_5 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\ +c_5 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\ +c_5 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\ -c_4 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3) \\ -c_4 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \\ -c_4 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \\ +c_3 \cdot \lambda_0 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) \\ +c_3 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ -c_2 \cdot (\lambda_0 + \lambda_1) \\ +c_1 \end{cases}$$

$$\mathbf{a_0^{(6)}} = \begin{cases} +c_6 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_5 \\ -c_5 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\ +c_4 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \\ -c_3 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ +c_2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \\ -c_1 \cdot \lambda_0 \\ +c_0 \end{cases}$$

2.3 Quintische Interpolation

$$P(\lambda) = a_5 \cdot \lambda^5 + a_4 \cdot \lambda^4 + a_3 \cdot \lambda^3 + a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0$$

$$\mathbf{a_5^{(5)}} = +c_5$$

$$\mathbf{a_4^{(5)}} = \begin{cases} -c_5 \cdot (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \\ +c_4 \end{cases}$$

$$\mathbf{a_3^{(5)}} = \begin{cases} +c_5 \cdot \lambda_0 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \\ +c_5 \cdot \lambda_1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \\ +c_5 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4) \\ +c_5 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\ -c_4 \cdot (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\ +c_3 \end{cases}$$

$$\mathbf{a_2^{(5)}} = \begin{cases} -c_5 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \\ -c_5 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4) \\ -c_5 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\ -c_5 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4) \\ -c_5 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\ -c_5 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\ +c_4 \cdot \lambda_0 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\ +c_4 \cdot \lambda_1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3) \\ +c_4 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \\ -c_3 \cdot (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \\ +c_2 \end{cases}$$

$$\mathbf{a_1^{(5)}} = \begin{cases} +c_5 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4) \\ +c_5 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\ +c_5 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\ +c_5 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\ -c_4 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3) \\ -c_4 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \\ -c_4 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \\ +c_3 \cdot \lambda_0 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) \\ +c_3 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ -c_2 \cdot (\lambda_0 + \lambda_1) \\ +c_1 \end{cases}$$

$$\mathbf{a_0^{(5)}} = \begin{cases} -c_5 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 \\ +c_4 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \\ -c_3 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ +c_2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \\ -c_1 \cdot \lambda_0 \\ +c_0 \end{cases}$$

2.4 Biquadratische Interpolation

$P(\lambda) = a_4 \cdot \lambda^4 + a_3 \cdot \lambda^3 + a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0$

$$\mathbf{a_4^{(4)}} = +c_4$$

$$\mathbf{a_3^{(4)}} = \begin{cases} -c_4 \cdot (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\ +c_3 \end{cases}$$

$$\mathbf{a_2^{(4)}} = \begin{cases} +c_4 \cdot \lambda_0 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \\ +c_4 \cdot \lambda_1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3) \\ +c_4 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \\ -c_3 \cdot (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \\ +c_2 \end{cases}$$

$$\mathbf{a_1^{(4)}} = \begin{cases} -c_4 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot (\lambda_2 + \lambda_3) \\ -c_4 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \\ -c_4 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \\ +c_3 \cdot \lambda_0 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) \\ +c_3 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ -c_2 \cdot (\lambda_0 + \lambda_1) \\ +c_1 \end{cases}$$

$$\mathbf{a_0^{(4)}} = \begin{cases} +c_4 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \\ -c_3 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ +c_2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \\ -c_1 \cdot \lambda_0 \\ +c_0 \end{cases}$$

2.5 Kubikinterpolation

$P(\lambda) = a_3 \cdot \lambda^3 + a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0$

$$\mathbf{a_3^{(3)}} = +c_3$$

$$\mathbf{a_2^{(3)}} = \begin{cases} -c_3 \cdot (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2) \\ +c_2 \end{cases}$$

$$\mathbf{a_1^{(3)}} = \begin{cases} +c_3 \cdot \lambda_0 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) \\ +c_3 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ -c_2 \cdot (\lambda_0 + \lambda_1) \\ +c_1 \end{cases}$$

$$\mathbf{a_0^{(3)}} = \begin{cases} -c_3 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2 \\ +c_2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \\ -c_1 \cdot \lambda_0 \\ +c_0 \end{cases}$$

2.6 Quadratinterpolation

$P(\lambda) = a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0$

$$\mathbf{a_2^{(2)}} = +c_2$$

$$\mathbf{a_1^{(2)}} = \begin{cases} -c_2 \cdot (\lambda_0 + \lambda_1) \\ +c_1 \end{cases}$$

$$\mathbf{a_0^{(2)}} = \begin{cases} +c_2 \cdot \lambda_0 \cdot \lambda_1 \\ -c_1 \cdot \lambda_0 \\ +c_0 \end{cases}$$

2.7 Linearinterpolation

$P(\lambda) = a_1 \cdot \lambda + a_0$

$\mathbf{a_1^{(1)}} = +c_1$

$\mathbf{a_0^{(1)}} = \begin{cases} -c_1 \cdot \lambda_0 \\ +c_0 \end{cases}$

LaTeX 2_ε

$$\oiint$$

3 Regressionen

3.1 Derivate

3.1.1 Regression - polynomielle: $y = a_0 + a_1 \cdot x^1 + \ldots + a_n \cdot x^n$

3.1.2 Regression - potenzfunktionelle: $y = b \cdot x^{+a}$

3.1.3 Regression - exponentielle: $y = b \cdot e^{+a \cdot x}$

3.1.4 Regression - rationalfunktionelle: $y = (b \cdot x)/(a + x)$

3.1.5 Regression - sigmoide: $y = a \cdot b/(a + (b - a) \cdot e^{-c \cdot x})$

(Polynom)Regression von Datenpunkten

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 19. Juli 2013 – Letzte Revision: 24. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Die Methode der kleinsten Quadrate anhand eines Beispiels **3**
1.1 Modell zur Berechnung einer Lösung für den linearen Fall . . . 3
1.2 Suche nach einem Extrema . . . 4
1.3 Nachweis des Extrema als Minimum . . . 5
1.4 Beschreibung des Problems in Matrizenform . . . 6

2 Regression n- ter Ordnung **7**
2.1 Regression n- ter Ordnung über die Determinanten . . . 8
2.2 Regression n- ter Ordnung über den Gaußalgorithmus . . . 10
2.3 Probleme mit dem Ausdruck $\{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\}$ . . . 11

3 Sextische (Triquadratische) Regression **12**
3.1 Sextische Regression über den Gaußalgorithmus . . . 12
3.2 Probleme mit dem Ausdruck $\{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\}$ . . . 13

4 Quintische Regression **14**
4.1 Quintische Regression über den Gaußalgorithmus . . . 14
4.2 Probleme mit dem Ausdruck $\{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\}$ . . . 15

5 Biquadratische Regression **16**
5.1 Biquadratische Regression über den Gaußalgorithmus . . . 16
5.2 Probleme mit dem Ausdruck $\{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\}$ . . . 18

6 Kubikregression **19**
6.1 Kubikregression über den Gaußalgorithmus . . . 19
6.2 Probleme mit dem Ausdruck $\{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\}$ . . . 21

7 Quadratregression **22**
7.1 Quadratregression über die Determinanten . . . 22
7.2 Quadratregression über den Gaußalgorithmus . . . 24
7.3 Probleme mit dem Ausdruck $\{x \cdot x \cdot x \cdot x\}$ . . . 26

8 Linearregression **27**
8.1 Linearregression über die Determinanten . . . 28
8.2 Linearregression über den Gaußalgorithmus . . . 29
8.3 Nichtlineare Regressionen als Ableitungen der Linearregression . . . 30
8.3.1 Potenzfunktionelle Regression . . . 30
8.3.2 Exponentielle Regression . . . 31
8.3.3 Rationalfunktionelle Regression . . . 32
8.3.4 Sigmoide Regression nach Mitscherlich . . . 33

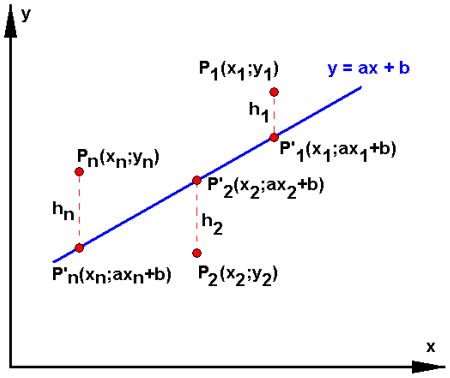
9 Programmierbeispiele für Regressionen **34**
9.1 Für die Biquadratische Regression 34
9.2 Für die Sigmoide Regression nach Mitscherlich 36

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

1 Die Methode der kleinsten Quadrate anhand eines Beispiels

1.1 Modell zur Berechnung einer Lösung für den linearen Fall



Modell zur Berechnung einer Linearen Regression nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Die Methode der kleinsten Quadrate ist ein Verfahren in der Regressionsrechnung. Dabei wird eine Funktion gesucht, welche möglichst nahe der Datenpunkte verläuft. [001]ff.

Das Vorgehen geht dahin hinaus, das eine Mismatch-, Fehl oder auch Straffunktion $F(x;a;b)$ gesucht wird, welche die Koeffizienten a und b im Punkt des lokalen (und auch globalen) Minimum liefert.

Der Abstand h als Strecke zwischen den Punkten P und P_i' (parallel zur Ordinate).

$$\begin{aligned} h_1^2 &= (x_1 - x_1)^2 + (y_1 - (a \cdot x_1 + b))^2 \\ h_2^2 &= (x_2 - x_2)^2 + (y_2 - (a \cdot x_2 + b))^2 \\ &\vdots \\ h_n^2 &= (x_n - x_n)^2 + (y_n - (a \cdot x_n + b))^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} h_1^2 &= (y_1 - a \cdot x_1 - b)^2 \\ h_2^2 &= (y_2 - a \cdot x_2 - b)^2 \\ &\vdots \\ h_n^2 &= (y_n - a \cdot x_n - b)^2 \end{aligned}$$

Die Fehlfunktion ist definiert durch:

$$F = \sum_{i=1}^{n} h_i^2$$

$\Rightarrow$

$$F = h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_n^2$$

Damit ergibt sich für F:

$$F = \begin{array}{c} (y_1 - a \cdot x_1 - b)^2 \\ + (y_2 - a \cdot x_2 - b)^2 \\ \vdots \\ + (y_n - a \cdot x_n - b)^2 \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$F = \begin{array}{c} y_1^2 - 2a \cdot x_1 y_1 - 2b \cdot y_1 + 2ab \cdot x_1 + a^2 \cdot x_1^2 + b^2 \\ + y_2^2 - 2a \cdot x_2 y_2 - 2b \cdot y_2 + 2ab \cdot x_2 + a^2 \cdot x_2^2 + b^2 \\ \vdots \\ + y_n^2 - 2a \cdot x_n y_n - 2b \cdot y_n + 2ab \cdot x_n + a^2 \cdot x_n^2 + b^2 \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$F = \left\{y^2\right\} - 2a \cdot \{xy\} - 2b \cdot \{y\} + 2ab \cdot \{x\} + a^2 \cdot \left\{x^2\right\} + n \cdot b^2$$

1.2 Suche nach einem Extrema

[001]ff.

Um das Extrema, das vermutete Minimum zu finden muss $F(a;b)$ partiell differenziert werden (da jetzt zweidimensional).

$$\frac{\partial}{\partial a}F = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial b}F = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial a}F = 0 - 2\cdot\{xy\} - 0 + 2b\cdot\{x\} + 2a\cdot\left\{x^2\right\} + 0 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b}F = 0 - 0 - 2\cdot\{y\} + 2a\cdot\{x\} + 0 + 2n\cdot b = 0$$

$\Rightarrow$

$$2a\cdot\left\{x^2\right\} + 2b\cdot\{x\} - 2\cdot\{xy\} = 0$$

$$2a\cdot\{x\} + 2b\cdot n - 2\cdot\{y\} = 0$$

Über den Gaußalgorithmus wird das vorliegende Gleichungssystem gelöst.

$$a + b\cdot\frac{\{x\}}{\{x^2\}} - \frac{\{xy\}}{\{x^2\}} = 0$$

$$a + b\cdot\frac{n}{\{x\}} - \frac{\{y\}}{\{x\}} = 0$$

$\Rightarrow$

$$b\cdot\left(\frac{\{x\}}{\{x^2\}} - \frac{n}{\{x\}}\right) - \left(\frac{\{xy\}}{\{x^2\}} - \frac{\{y\}}{\{x\}}\right) = 0$$

$\Rightarrow$

$$b = \frac{\{xy\}\cdot\{x\} - \{y\}\cdot\left\{x^2\right\}}{\{x\}^2 - n\cdot\{x^2\}}$$

Um a zu ermitteln wird nicht rückwärts eingesetzt, sondern folgender Ausdruck genutzt:

$$\{y\} = a\cdot\{x\} + n\cdot b$$

$\Rightarrow$

$$a = \frac{\{y\}}{\{x\}} - \frac{n}{\{x\}}\cdot b$$

$\Rightarrow$

$$a = \frac{\{y\}}{\{x\}} - \frac{n}{\{x\}}\cdot\frac{\{xy\}\cdot\{x\} - \{y\}\cdot\left\{x^2\right\}}{\{x\}^2 - n\cdot\{x^2\}}$$

$\Rightarrow$

$$a = \frac{\{x\}\cdot\{y\} - n\cdot\{xy\}}{\{x\}^2 - n\cdot\{x^2\}}$$

Dabei gilt:

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \{y\} = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\left\{x^2\right\} = \sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot x_i) \qquad \{xy\} = \sum_{i=1}^{n}(x_i\cdot y_i)$$

1.3 Nachweis des Extrema als Minimum

Damit nachgewiesen ist, dass das gefundene Extrema ein Minimum ist muss gelten: [001]ff.

- $\frac{\partial}{\partial a} F = 0$

Wurde im vorherigen Abschnitt erfüllt.

- $\frac{\partial}{\partial b} F = 0$

Wurde im vorherigen Abschnitt erfüllt.

- $\frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial}{\partial a} F > 0$

Nachweis das Extrema ein Minimum ist.

$$\frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial}{\partial a} F = 2 \cdot \left\{x^2\right\} > 0$$

Ist immer erfüllt für ab zwei unterscheidbare Datenpunkte.

- $\frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial}{\partial b} F > 0$

Nachweis das Extrema ein Minimum ist.

$$\frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial}{\partial b} F = 2 \cdot n = 0$$

Ist immer erfüllt.

- Eine Diskriminante D ist $D > 0$

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial}{\partial a} F\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial}{\partial b} F\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial}{\partial b} F\right)^2 > 0$$

Mit:

$$\frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial}{\partial b} F = \frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial}{\partial a} F = 2 \left\{x\right\}$$

Gilt:

$$D = 4 \cdot \left\{x^2\right\}^2 \cdot 4 \cdot n^2 - 4 \cdot \left\{x\right\}^2 > 0$$

$\Rightarrow$

$$n > \frac{1}{2} \cdot \frac{\left\{x\right\}}{\left\{x^2\right\}}$$

Ein Nachweis obigen Ausdrucks ist zahlentheoretisch möglich. Wenn

$$x \in N$$

ist ein Nachweis schnell gezeigt.

$$\left\{x\right\} = \sum_{i=1}^{n} k = \frac{n}{2} \cdot (n+1) \qquad \left\{x^2\right\} = \sum_{i=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6} \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

$\Rightarrow$

$$n > \frac{1}{2} \cdot \frac{6 \cdot n \cdot (n+1)}{2 \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}$$

$\Rightarrow$

$$n^2 + \frac{1}{2} \cdot n - \frac{3}{4} > 0$$

Für alle $n > 1$ ist diese quadratische Ungleichung erfüllt und F befindet sich im Minimum.

1.4 Beschreibung des Problems in Matrizenform

[001]ff. Aus den vorhergehenden Abschnitten ist bekannt.

$$b \cdot n + a \cdot \{x\} = \{y\}$$
$$b \cdot \{x\} + a \cdot \left\{x^2\right\} = \{xy\}$$

Die dazu gehörige Matrize:

$$\begin{pmatrix} n & \{x\} \\ \{x\} & \{x \cdot x\} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{y\} \\ \{x \cdot y\} \end{pmatrix}$$

Lösungsmöglichkeiten sind vorhanden, eine Verallgemeinerung für Regressionspolynome der Form

$$P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

ist hierüber möglich.

2 Regression n- ter Ordnung

Gesucht ist das Regressionspolynom $P(\lambda)$.

$$P(\lambda) = a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0 \qquad (a_n \neq 0)$$

Wobei n der Grad oder die Ordnung des Polynoms $P(\lambda)$ ist.

2.1 Regression n- ter Ordnung über die Determinanten

[001]ff. Um das Polynom $P(\lambda)$ ermitteln zu können, wird zuerst eine quadratische Matrix aufgestellt:

$$M = \begin{pmatrix} n & \{x\} & \{x^2\} & \cdots & \{x^n\} \\ \{x\} & \{x^2\} & \{x^3\} & \cdots & \{x^{n+1}\} \\ \{x^2\} & \{x^3\} & \{x^4\} & \cdots & \{x^{n+2}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{x^n\} & \{x^{n+1}\} & \{x^{n+2}\} & \cdots & \{x^{2\cdot n}\} \end{pmatrix}$$

Zusätzlich wird eine Spaltenmatrix benötigt.

$$V = \begin{pmatrix} \{y\} \\ \{x \cdot y\} \\ \{x^2 \cdot y\} \\ \vdots \\ \{x^n \cdot y\} \end{pmatrix}$$

Nächster Schritt, jedem Koeffizienten a_i wird eine quadratische Matrix zugeordnet. Diese Matrix ist grundsätzlich identisch zu M. Unterschied, die $i+1$ Spalte wird mit den Elementen von V ersetzt. So gilt beispielshalber:

$$a_0 \leftrightarrow \begin{pmatrix} \{y\} & \{x\} & \{x^2\} & \cdots & \{x^n\} \\ \{x \cdot y\} & \{x^2\} & \{x^3\} & \cdots & \{x^{n+1}\} \\ \{x^2 \cdot y\} & \{x^3\} & \{x^4\} & \cdots & \{x^{n+2}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{x^n \cdot y\} & \{x^{n+1}\} & \{x^{n+2}\} & \cdots & \{x^{2\cdot n}\} \end{pmatrix}$$

$$a_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} n & \{y\} & \{x^2\} & \cdots & \{x^n\} \\ \{x\} & \{x \cdot y\} & \{x^3\} & \cdots & \{x^{n+1}\} \\ \{x^2\} & \{x^2 \cdot y\} & \{x^4\} & \cdots & \{x^{n+2}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{x^n\} & \{x^n \cdot y\} & \{x^{n+2}\} & \cdots & \{x^{2\cdot n}\} \end{pmatrix}$$

$$a_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} n & \{x\} & \{y\} & \cdots & \{x^n\} \\ \{x\} & \{x^2\} & \{x \cdot y\} & \cdots & \{x^{n+1}\} \\ \{x^2\} & \{x^3\} & \{x^2 \cdot y\} & \cdots & \{x^{n+2}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{x^n\} & \{x^{n+1}\} & \{x^n \cdot y\} & \cdots & \{x^{2\cdot n}\} \end{pmatrix}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_n \leftrightarrow \begin{pmatrix} n & \{x\} & \{x^2\} & \cdots & \{y\} \\ \{x\} & \{x^2\} & \{x^3\} & \cdots & \{x \cdot y\} \\ \{x^2\} & \{x^3\} & \{x^4\} & \cdots & \{x^2 \cdot y\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{x^n\} & \{x^{n+1}\} & \{x^{n+2}\} & \cdots & \{x^n \cdot y\} \end{pmatrix}$$

Wenn nun die Determinanten von M und $a_i \leftrightarrow$ errechnet werden, dann sind die Koeffizienten a_i von $P(\lambda)$ ermittelt.

$$a_0 = \frac{\det(a_0 \leftrightarrow)}{\det(M)} = \frac{|a_0 \leftrightarrow|}{|M|} \qquad a_1 = \frac{\det(a_1 \leftrightarrow)}{\det(M)} = \frac{|a_1 \leftrightarrow|}{|M|}$$

$$a_2 = \frac{\det(a_2 \leftrightarrow)}{\det(M)} = \frac{|a_2 \leftrightarrow|}{|M|} \qquad a_n = \frac{\det(a_n \leftrightarrow)}{\det(M)} = \frac{|a_n \leftrightarrow|}{|M|}$$

Dabei gilt aus den gegebenen Datenpunkten:

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \{y\} = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\left\{x^2\right\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot \lambda_i) \quad \{x \cdot y\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot y_i)$$

$$\left\{x^3\right\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i) \quad \left\{x^2 \cdot y\right\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot y_i)$$

$$\left\{x^4\right\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i) \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

2.2 Regression n- ter Ordnung über den Gaußalgorithmus

[001]ff. Um das Polynom $P(\lambda)$ ermitteln zu können, wird folgendes Gleichungssystem aufgestellt:

$$P(\lambda) = a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + a_0$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} n & \{x\} & \{x^2\} & \cdots & \{x^n\} \\ \{x\} & \{x^2\} & \{x^3\} & \cdots & \{x^{n+1}\} \\ \{x^2\} & \{x^3\} & \{x^4\} & \cdots & \{x^{n+2}\} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{x^n\} & \{x^{n+1}\} & \{x^{n+2}\} & \cdots & \{x^{2\cdot n}\} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{y\} \\ \{x \cdot y\} \\ \{x^2 \cdot y\} \\ \vdots \\ \{x^n \cdot y\} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} a_0 \cdot n + a_1 \cdot \{x\} + a_2 \cdot \{x^2\} + \ldots + a_n \cdot \{x^n\} &= \{y\} \\ a_0 \cdot \{x\} + a_1 \cdot \{x^2\} + a_2 \cdot \{x^3\} + \ldots + a_n \cdot \{x^{n+1}\} &= \{x \cdot y\} \\ a_0 \cdot \{x^2\} + a_1 \cdot \{x^3\} + a_2 \cdot \{x^4\} + \ldots + a_n \cdot \{x^{n+2}\} &= \{x^2 \cdot y\} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_0 \cdot \{x^n\} + a_1 \cdot \{x^{n+1}\} + a_2 \cdot \{x^{n+2}\} + \ldots + a_n \cdot \{x^{2n}\} &= \{x^n \cdot y\} \end{aligned}$$

Durch Lösen des Gleichungssystems ist das Polynom bestimmt. Dabei gilt aus den gegebenen Datenpunkten:

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \{y\} = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\{x^2\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot \lambda_i) \quad \{x \cdot y\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot y_i)$$

$$\{x^3\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i) \quad \{x^2 \cdot y\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot y_i)$$

$$\{x^4\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i) \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

2.3 Probleme mit dem Ausdruck $\{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\}$

Bei großen Datenmengen, sehr kleinen x- Werten aber auch sehr großen x- Werten kann es Probleme mit dem $\{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\}$- Ausdruck geben. Von Rundungsfehlern, Divisionsproblemen bis Zahlenbereichsüberflüsse in verschiedenen Programmiersprachen ergeben sich unter Umständen Probleme bei der Berechnung des Polynoms. [001]ff.

Eine Möglichkeit diese Probleme zu umgehen, ist das Skalieren der Datenpunkte mit ε hin zu günstigen Werten.

$$P_n\left(\lambda_n; X_n\right) \quad \rightarrow \quad P_n\left(\varepsilon \cdot \lambda_n; \varepsilon \cdot X_n\right) \quad \rightarrow \quad P_n\left(\tilde{\lambda}_n; \tilde{X}_n\right)$$

Das Polynom lautet dann:

$$X = a_n \cdot \tilde{\lambda}^n + a_{n-1} \cdot \tilde{\lambda}^{n-1} + a_{n-2} \cdot \tilde{\lambda}^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot \tilde{\lambda}^2 + a_1 \cdot \tilde{\lambda} + a_0$$

Eine Rückskalierung ergibt die exakte Regression.

$$X = \varepsilon^{n-1} \cdot a_n \cdot \lambda^n + \varepsilon^{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \varepsilon^{n-3} \cdot a_{n-2} \cdot \lambda^{n-2} + \ldots + \varepsilon \cdot a_2 \cdot \lambda^2 + a_1 \cdot \lambda + \varepsilon^{-1} \cdot a_0$$

3 Sextische (Triquadratische) Regression

3.1 Sextische Regression über den Gaußalgorithmus

Es soll eine Sextische Regression mit Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ eine Wellenlänge darstellt und X eine Ortskoordinate.

[001]ff.

Um das Polynom $P\left(\lambda\right)$ ermitteln zu können, wird folgendes Gleichungssystem aufgestellt:

$$P\left(\lambda\right) = a \cdot \lambda^6 + b \cdot \lambda^5 + c \cdot \lambda^4 + d \cdot \lambda^3 + e \cdot \lambda^2 + f \cdot \lambda + g$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} n & \{x\} & \{x^2\} & \{x^3\} & \{x^4\} & \{x^5\} & \{x^6\} \\ \{x\} & \{x^2\} & \{x^3\} & \{x^4\} & \{x^5\} & \{x^6\} & \{x^7\} \\ \{x^2\} & \{x^3\} & \{x^4\} & \{x^5\} & \{x^6\} & \{x^7\} & \{x^8\} \\ \{x^3\} & \{x^4\} & \{x^5\} & \{x^6\} & \{x^7\} & \{x^8\} & \{x^9\} \\ \{x^4\} & \{x^5\} & \{x^6\} & \{x^7\} & \{x^8\} & \{x^9\} & \{x^{10}\} \\ \{x^5\} & \{x^6\} & \{x^7\} & \{x^8\} & \{x^9\} & \{x^{10}\} & \{x^{11}\} \\ \{x^6\} & \{x^7\} & \{x^8\} & \{x^9\} & \{x^{10}\} & \{x^{11}\} & \{x^{12}\} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g \\ f \\ e \\ d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{x\} \\ \{x \cdot y\} \\ \{x^2 \cdot y\} \\ \{x^3 \cdot y\} \\ \{x^4 \cdot y\} \\ \{x^5 \cdot y\} \\ \{x^6 \cdot y\} \end{pmatrix}$$

Letztendlich ist es „nur“ nötig eine inverse Matrix von M zu finden, um die Lösung zu generieren. Ist M^{-1} gefunden ist die Regression vollendet.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} n & \{x\} & \{x^2\} & \{x^3\} & \{x^4\} & \{x^5\} & \{x^6\} \\ \{x\} & \{x^2\} & \{x^3\} & \{x^4\} & \{x^5\} & \{x^6\} & \{x^7\} \\ \{x^2\} & \{x^3\} & \{x^4\} & \{x^5\} & \{x^6\} & \{x^7\} & \{x^8\} \\ \{x^3\} & \{x^4\} & \{x^5\} & \{x^6\} & \{x^7\} & \{x^8\} & \{x^9\} \\ \{x^4\} & \{x^5\} & \{x^6\} & \{x^7\} & \{x^8\} & \{x^9\} & \{x^{10}\} \\ \{x^5\} & \{x^6\} & \{x^7\} & \{x^8\} & \{x^9\} & \{x^{10}\} & \{x^{11}\} \\ \{x^6\} & \{x^7\} & \{x^8\} & \{x^9\} & \{x^{10}\} & \{x^{11}\} & \{x^{12}\} \end{pmatrix}^{-1}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} g \\ f \\ e \\ d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = M^{-1}V = M^{-1} \begin{pmatrix} \{x\} \\ \{x \cdot y\} \\ \{x^2 \cdot y\} \\ \{x^3 \cdot y\} \\ \{x^4 \cdot y\} \\ \{x^5 \cdot y\} \\ \{x^6 \cdot y\} \end{pmatrix}$$

Dabei gilt aus den gegebenen Datenpunkten:

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \{x\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$\{x^2\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \lambda_i\right) \quad \{x \cdot y\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot X_i\right)$$

$$\{x^3\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i\right) \quad \{x^2 \cdot y\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot X_i\right)$$

$$\{x^4\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i\right) \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

3.2 Probleme mit dem Ausdruck $\{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\}$

Bei großen Datenmengen, sehr kleinen x- Werten aber auch sehr großen x- Werten kann es Probleme mit dem $\{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\}$- Ausdruck geben. Von Rundungsfehlern, Divisionsproblemen bis Zahlenbereichsüberflüsse in verschiedenen Programmiersprachen ergeben sich unter Umständen Probleme bei der Berechnung des Polynoms. [001]ff.

Eine Möglichkeit diese Probleme zu umgehen, ist das Skalieren der Datenpunkte mit ε hin zu günstigen Werten.

$$P_n\left(\lambda_n; X_n\right) \quad \rightarrow \quad P_n\left(\varepsilon \cdot \lambda_n; \varepsilon \cdot X_n\right) \quad \rightarrow \quad P_n\left(\tilde{\lambda}_n; \tilde{X}_n\right)$$

Das Polynom lautet dann:

$$\tilde{X} = a \cdot \tilde{\lambda}^6 + b \cdot \tilde{\lambda}^5 + c \cdot \tilde{\lambda}^4 + d \cdot \tilde{\lambda}^3 + e \cdot \tilde{\lambda}^2 + f \cdot \tilde{\lambda} + g$$

Eine Rückskalierung ergibt die exakte Regression.

$$X = \varepsilon^5 \cdot a \cdot \lambda^6 + \varepsilon^4 \cdot b \cdot \lambda^5 + \varepsilon^3 \cdot c \cdot \lambda^4 + \varepsilon^2 \cdot d \cdot \lambda^3 + \varepsilon \cdot e \cdot \lambda^2 + f \cdot \lambda + \frac{g}{\varepsilon}$$

4 Quintische Regression

4.1 Quintische Regression über den Gaußalgorithmus

Es soll eine Quintische Regression mit Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ eine Wellenlänge darstellt und X eine Ortskoordinate.

[001]ff.

Um das Polynom $P\left(\lambda\right)$ ermitteln zu können, wird folgendes Gleichungssystem aufgestellt:

$$P\left(\lambda\right) = a \cdot \lambda^5 + b \cdot \lambda^4 + c \cdot \lambda^3 + d \cdot \lambda^2 + e \cdot \lambda + f$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} n & \{x\} & \{x^2\} & \{x^3\} & \{x^4\} & \{x^5\} \\ \{x\} & \{x^2\} & \{x^3\} & \{x^4\} & \{x^5\} & \{x^6\} \\ \{x^2\} & \{x^3\} & \{x^4\} & \{x^5\} & \{x^6\} & \{x^7\} \\ \{x^3\} & \{x^4\} & \{x^5\} & \{x^6\} & \{x^7\} & \{x^8\} \\ \{x^4\} & \{x^5\} & \{x^6\} & \{x^7\} & \{x^8\} & \{x^9\} \\ \{x^5\} & \{x^6\} & \{x^7\} & \{x^8\} & \{x^9\} & \{x^{10}\} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ e \\ d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{x\} \\ \{x \cdot y\} \\ \{x^2 \cdot y\} \\ \{x^3 \cdot y\} \\ \{x^4 \cdot y\} \\ \{x^5 \cdot y\} \end{pmatrix}$$

Letztendlich ist es über den Gauß- Jordan- Algorithmus „nur“ nötig die Matrix M in eine Einheitsmatrix E um zu wandeln, um eine Lösung zu generieren. Ist E entwickelt ist die Regression vollendet. Mit Hilfe der Determinanten lassen sich dann die Koeffizienten darstellen.

$$|M| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f \\ e \\ d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |f \leftrightarrow| \\ |e \leftrightarrow| \\ |d \leftrightarrow| \\ |c \leftrightarrow| \\ |b \leftrightarrow| \\ |a \leftrightarrow| \end{pmatrix}$$

Dabei gilt aus den gegebenen Datenpunkten:

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \{x\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$\left\{x^2\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \lambda_i\right) \quad \{x \cdot y\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot X_i\right)$$

$$\left\{x^3\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i\right) \quad \left\{x^2 \cdot y\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot X_i\right)$$

$$\left\{x^4\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i\right) \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

4.2 Probleme mit dem Ausdruck $\{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\}$

Bei großen Datenmengen, sehr kleinen x- Werten aber auch sehr großen x- Werten kann es Probleme mit dem $\{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\}$- Ausdruck geben. Von Rundungsfehlern, Divisionsproblemen bis Zahlenbereichsüberflüsse in verschiedenen Programmiersprachen ergeben sich unter Umständen Probleme bei der Berechnung des Polynoms. [001]ff.

Eine Möglichkeit diese Probleme zu umgehen, ist das Skalieren der Datenpunkte mit ε hin zu günstigen Werten.

$$P_n\left(\lambda_n; X_n\right) \quad \rightarrow \quad P_n\left(\varepsilon \cdot \lambda_n; \varepsilon \cdot X_n\right) \quad \rightarrow \quad P_n\left(\tilde{\lambda}_n; \tilde{X}_n\right)$$

Das Polynom lautet dann:

$$\tilde{X} = a \cdot \tilde{\lambda}^5 + b \cdot \tilde{\lambda}^4 + c \cdot \tilde{\lambda}^3 + d \cdot \tilde{\lambda}^2 + e \cdot \tilde{\lambda} + f$$

Eine Rückskalierung ergibt die exakte Regression.

$$X = \varepsilon^4 \cdot a \cdot \lambda^5 + \varepsilon^3 \cdot b \cdot \lambda^4 + \varepsilon^2 \cdot c \cdot \lambda^3 + \varepsilon \cdot d \cdot \lambda^2 + e \cdot \lambda + \frac{f}{\varepsilon}$$

5 Biquadratische Regression

5.1 Biquadratische Regression über den Gaußalgorithmus

Es soll eine Biquadratische Regression mit den bekannten Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ eine Wellenlänge darstellt und X eine Ortskoordinate.

[001]ff.

Um das Polynom $P\left(\lambda\right)$ ermitteln zu können, wird folgendes Gleichungssystem aufgestellt:

$$P\left(\lambda\right) = a \cdot \lambda^4 + b \cdot \lambda^3 + c \cdot \lambda^2 + d \cdot \lambda + e$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} n & \{x\} & \{x^2\} & \{x^3\} & \{x^4\} \\ \{x\} & \{x^2\} & \{x^3\} & \{x^4\} & \{x^5\} \\ \{x^2\} & \{x^3\} & \{x^4\} & \{x^5\} & \{x^6\} \\ \{x^3\} & \{x^4\} & \{x^5\} & \{x^6\} & \{x^7\} \\ \{x^4\} & \{x^5\} & \{x^6\} & \{x^7\} & \{x^8\} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{y\} \\ \{x \cdot y\} \\ \{x^2 \cdot y\} \\ \{x^3 \cdot y\} \\ \{x^4 \cdot y\} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} n \cdot e + \{x\} \cdot d + \{x^2\} \cdot c + \{x^3\} \cdot b + \{x^4\} \cdot a &= \{y\} \\ \{x\} \cdot e + \{x^2\} \cdot d + \{x^3\} \cdot c + \{x^4\} \cdot b + \{x^5\} \cdot a &= \{x \cdot y\} \\ \{x^2\} \cdot e + \{x^3\} \cdot d + \{x^4\} \cdot c + \{x^5\} \cdot b + \{x^6\} \cdot a &= \{x^2 \cdot y\} \\ \{x^3\} \cdot e + \{x^4\} \cdot d + \{x^5\} \cdot c + \{x^6\} \cdot b + \{x^7\} \cdot a &= \{x^3 \cdot y\} \\ \{x^4\} \cdot e + \{x^5\} \cdot d + \{x^6\} \cdot c + \{x^7\} \cdot b + \{x^8\} \cdot a &= \{x^4 \cdot y\} \end{aligned}$$

Durch Lösen des Gleichungssystems wird das Polynom bestimmt.

$$\begin{aligned} A \cdot d + B \cdot c + C \cdot b + D \cdot a &= E \\ F \cdot d + G \cdot c + H \cdot b + I \cdot a &= J \\ K \cdot d + L \cdot c + M \cdot b + N \cdot a &= O \\ P \cdot d + Q \cdot c + R \cdot b + S \cdot a &= T \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \tilde{A} \cdot c + \tilde{B} \cdot b + \tilde{C} \cdot a &= \tilde{D} \\ \tilde{E} \cdot c + \tilde{F} \cdot b + \tilde{G} \cdot a &= \tilde{H} \\ \tilde{I} \cdot c + \tilde{J} \cdot b + \tilde{K} \cdot a &= \tilde{L} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \hat{A} \cdot b + \hat{B} \cdot a &= \hat{C} \\ \hat{D} \cdot b + \hat{E} \cdot a &= \hat{F} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{A} \cdot a = \bar{B}$$

Damit sind die Koeffizienten $a; b; c; d$ und e betimmt. (Rot hervorgehobene Terme sind bestehend aus nativen Hilfsvariablen)

$$a = \frac{\bar{B}}{\bar{A}}$$

$\Rightarrow$

$$b = \frac{\hat{C}}{\hat{A}} - \frac{\hat{B}}{\hat{A}} \cdot a$$

$\Rightarrow$

$$c = \frac{\tilde{D}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} \cdot a - \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} \cdot b$$

$\Rightarrow$

$$d = \frac{E}{A} - \frac{D}{A} \cdot a - \frac{C}{A} \cdot b - \frac{B}{A} \cdot c$$

$\Rightarrow$

$$e = Y - X \cdot a - W \cdot b - V \cdot c - U \cdot d$$

Mit den nativen Hilfsvariablen.

$$A = U - \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \quad B = V - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \quad C = W - \frac{\{x^4\}}{\{x\}} \quad D = X - \frac{\{x^5\}}{\{x\}}$$

$$E = Y - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}} \quad F = U - \frac{\{x^3\}}{\{x^2\}} \quad G = V - \frac{\{x^4\}}{\{x^2\}} \quad H = W - \frac{\{x^5\}}{\{x^2\}}$$

$$I = X - \frac{\{x^6\}}{\{x^2\}} \quad J = Y - \frac{\{x^2 \cdot y\}}{\{x^2\}} \quad K = U - \frac{\{x^4\}}{\{x^3\}} \quad L = V - \frac{\{x^5\}}{\{x^3\}}$$

$$M = W - \frac{\{x^6\}}{\{x^3\}} \quad N = X - \frac{\{x^7\}}{\{x^3\}} \quad O = Y - \frac{\{x^3 \cdot y\}}{\{x^3\}} \quad P = U - \frac{\{x^5\}}{\{x^4\}}$$

$$Q = V - \frac{\{x^6\}}{\{x^4\}} \quad R = W - \frac{\{x^7\}}{\{x^4\}} \quad S = X - \frac{\{x^8\}}{\{x^4\}} \quad T = Y - \frac{\{x^4 \cdot y\}}{\{x^4\}}$$

Und:

$$U = \frac{\{x\}}{n} \quad V = \frac{\{x^2\}}{n} \quad W = \frac{\{x^3\}}{n} \quad X = \frac{\{x^4\}}{n} \quad Y = \frac{\{y\}}{n}$$

Sowie den nichtnativen Hilfsvariablen.

$$\tilde{A} = \frac{B}{A} - \frac{G}{F} \quad \tilde{B} = \frac{C}{A} - \frac{H}{F} \quad \tilde{C} = \frac{D}{A} - \frac{I}{F} \quad \tilde{D} = \frac{E}{A} - \frac{J}{F}$$

$$\tilde{E} = \frac{B}{A} - \frac{L}{K} \quad \tilde{F} = \frac{C}{A} - \frac{M}{K} \quad \tilde{G} = \frac{D}{A} - \frac{N}{K} \quad \tilde{H} = \frac{E}{A} - \frac{O}{K}$$

$$\tilde{I} = \frac{B}{A} - \frac{Q}{P} \quad \tilde{J} = \frac{C}{A} - \frac{R}{P} \quad \tilde{K} = \frac{D}{A} - \frac{S}{P} \quad \tilde{L} = \frac{E}{A} - \frac{T}{P}$$

Und:

$$\hat{A} = \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{F}}{\tilde{E}} \quad \hat{B} = \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{G}}{\tilde{E}} \quad \hat{C} = \frac{\tilde{D}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{H}}{\tilde{E}}$$

$$\hat{D} = \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{J}}{\tilde{I}} \quad \hat{E} = \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{K}}{\tilde{I}} \quad \hat{F} = \frac{\tilde{D}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{L}}{\tilde{I}}$$

Und:

$$\bar{A} = \frac{\hat{B}}{\hat{A}} - \frac{\hat{E}}{\hat{D}} \quad \bar{B} = \frac{\hat{C}}{\hat{A}} - \frac{\hat{F}}{\hat{D}}$$

Dabei gilt aus den gegebenen Datenpunkten:

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \{x\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$\{x^2\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot \lambda_i) \quad \{x \cdot y\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot X_i)$$

$$\{x^3\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i) \quad \{x^2 \cdot y\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot X_i)$$

$$\{x^4\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i) \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

5.2 Probleme mit dem Ausdruck $\{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\}$

[001]ff.

Bei großen Datenmengen, sehr kleinen x- Werten aber auch sehr großen x- Werten kann es Probleme mit dem $\{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\}$- Ausdruck geben. Von Rundungsfehlern, Divisionsproblemen bis Zahlenbereichsüberflüsse in verschiedenen Programmiersprachen ergeben sich unter Umständen Probleme bei der Berechnung des Polynoms.

Eine Möglichkeit diese Probleme zu umgehen, ist das Skalieren der Datenpunkte mit ε hin zu günstigen Werten.

$$P_n\left(\lambda_n; X_n\right) \quad \rightarrow \quad P_n\left(\varepsilon \cdot \lambda_n; \varepsilon \cdot X_n\right) \quad \rightarrow \quad P_n\left(\tilde{\lambda}_n; \tilde{X}_n\right)$$

Das Polynom lautet dann:

$$\tilde{X} = a \cdot \tilde{\lambda}^4 + b \cdot \tilde{\lambda}^3 + c \cdot \tilde{\lambda}^2 + d \cdot \tilde{\lambda} + e$$

Eine Rückskalierung ergibt die exakte Regression.

$$X = \varepsilon^3 \cdot a \cdot \lambda^4 + \varepsilon^2 \cdot b \cdot \lambda^3 + \varepsilon \cdot c \cdot \lambda^2 + d \cdot \lambda + \frac{e}{\varepsilon}$$

6 Kubikregression

6.1 Kubikregression über den Gaußalgorithmus

Es soll eine Kubikregression mit den Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ eine Wellenlänge darstellt und X eine Ortskoordinate. [001]ff.

Um das Polynom $P\left(\lambda\right)$ ermitteln zu können, wird folgendes Gleichungssystem aufgestellt:

$$P\left(\lambda\right) = a \cdot \lambda^3 + b \cdot \lambda^2 + c \cdot \lambda + d$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} n & \{x\} & \{x^2\} & \{x^3\} \\ \{x\} & \{x^2\} & \{x^3\} & \{x^4\} \\ \{x^2\} & \{x^3\} & \{x^4\} & \{x^5\} \\ \{x^3\} & \{x^4\} & \{x^5\} & \{x^6\} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{y\} \\ \{x \cdot y\} \\ \{x^2 \cdot y\} \\ \{x^3 \cdot y\} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} d \cdot n + c \cdot \{x\} + b \cdot \left\{x^2\right\} + a \cdot \left\{x^3\right\} &= \{y\} \\ d \cdot \{x\} + c \cdot \left\{x^2\right\} + b \cdot \left\{x^3\right\} + a \cdot \left\{x^4\right\} &= \{x \cdot y\} \\ d \cdot \left\{x^2\right\} + c \cdot \left\{x^3\right\} + b \cdot \left\{x^4\right\} + a \cdot \left\{x^5\right\} &= \left\{x^2 \cdot y\right\} \\ d \cdot \left\{x^3\right\} + c \cdot \left\{x^4\right\} + b \cdot \left\{x^5\right\} + a \cdot \left\{x^6\right\} &= \left\{x^3 \cdot y\right\} \end{aligned}$$

Durch Lösen des Gleichungssystems ist das Polynom bestimmt. Dabei gilt aus den gegebenen Datenpunkten:

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \{x\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$\left\{x^2\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \lambda_i\right) \quad \{x \cdot y\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot X_i\right)$$

$$\left\{x^3\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i\right) \quad \left\{x^2 \cdot y\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot X_i\right)$$

$$\left\{x^4\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i\right) \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

Zur Lösung, der Gaußalgorithmus:

$$d + \frac{\{x\}}{n} \cdot c + \frac{\left\{x^2\right\}}{n} \cdot b + \frac{\left\{x^3\right\}}{n} \cdot a = \frac{\{y\}}{n}$$

$$d + \frac{\left\{x^2\right\}}{\{x\}} \cdot c + \frac{\left\{x^3\right\}}{\{x\}} \cdot b + \frac{\left\{x^4\right\}}{\{x\}} \cdot a = \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}}$$

$$d + \frac{\left\{x^3\right\}}{\left\{x^2\right\}} \cdot c + \frac{\left\{x^4\right\}}{\left\{x^2\right\}} \cdot b + \frac{\left\{x^5\right\}}{\left\{x^2\right\}} \cdot a = \frac{\left\{x^2 \cdot y\right\}}{\left\{x^2\right\}}$$

$$d + \frac{\left\{x^4\right\}}{\left\{x^3\right\}} \cdot c + \frac{\left\{x^5\right\}}{\left\{x^3\right\}} \cdot b + \frac{\left\{x^6\right\}}{\left\{x^3\right\}} \cdot a = \frac{\left\{x^3 \cdot y\right\}}{\left\{x^3\right\}}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} A \cdot c + B \cdot b + C \cdot a &= D \\ E \cdot c + F \cdot b + G \cdot a &= H \\ I \cdot c + J \cdot b + K \cdot a &= L \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} M \cdot b + N \cdot a &= O \\ P \cdot b + Q \cdot a &= R \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$S \cdot a = T$$

Damit sind alle Koeffizienten $a; b; c$ und d ermittelt. (Rot hervorgehobene Terme sind bestehend aus nativen Hilfsvariablen)

$$a = \frac{T}{S}$$

$\Rightarrow$

$$b = \frac{O}{M} - \frac{N}{M} \cdot a$$

$\Rightarrow$

$$c = \frac{D}{A} - \frac{B}{A} \cdot b - \frac{C}{A} \cdot a$$

$\Rightarrow$

$$d = U - V \cdot c - W \cdot b - X \cdot a$$

Mit den nativen Hilfsvariablen:

$$U = \frac{\{y\}}{n} \qquad V = \frac{\{x\}}{n} \qquad W = \frac{\{x^2\}}{n} \qquad X = \frac{\{x^3\}}{n}$$

Und:

$$I = V - \frac{\{x^4\}}{\{x^3\}} \quad J = W - \frac{\{x^5\}}{\{x^3\}} \quad K = X - \frac{\{x^6\}}{\{x^3\}} \quad L = U - \frac{\{x^3 \cdot y\}}{\{x^3\}}$$

$$E = V - \frac{\{x^3\}}{\{x^2\}} \quad F = W - \frac{\{x^4\}}{\{x^2\}} \quad G = X - \frac{\{x^5\}}{\{x^2\}} \quad H = U - \frac{\{x^2 \cdot y\}}{\{x^2\}}$$

$$A = V - \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \quad B = W - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \quad C = X - \frac{\{x^4\}}{\{x\}} \quad D = U - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}}$$

Sowie den nichtnativen Hilfsvariablen.

$$S = \frac{N}{M} - \frac{Q}{P} \qquad T = \frac{O}{M} - \frac{R}{P}$$

Und:

$$P = \frac{B}{A} - \frac{J}{I} \qquad Q = \frac{C}{A} - \frac{K}{I} \qquad R = \frac{D}{A} - \frac{L}{I}$$

$$M = \frac{B}{A} - \frac{F}{E} \qquad N = \frac{C}{A} - \frac{G}{E} \qquad O = \frac{D}{A} - \frac{H}{E}$$

Die eben aufgezeigte Umformung obiger Matrizen mittels des Gauß- (Jordan-) Verfahren ergibt ohne Auflösung der Arrays:

$$\begin{pmatrix} n & \{x\} & \{x^2\} & \{x^3\} \\ \{x\} & \{x^2\} & \{x^3\} & \{x^4\} \\ \{x^2\} & \{x^3\} & \{x^4\} & \{x^5\} \\ \{x^3\} & \{x^4\} & \{x^5\} & \{x^6\} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{x\} \\ \{x \cdot y\} \\ \{x^2 \cdot y\} \\ \{x^3 \cdot y\} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$|M| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |d \leftrightarrow| \\ |c \leftrightarrow| \\ |b \leftrightarrow| \\ |a \leftrightarrow| \end{pmatrix}$$

Wobei letztendlich das der Lösungsweg über die Determinanten darstellt.

6.2 Probleme mit dem Ausdruck $\{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\}$

Bei großen Datenmengen, sehr kleinen x- Werten aber auch sehr großen x- Werten kann es Probleme mit dem $\{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot \ldots\}$- Ausdruck geben. Von Rundungsfehlern, Divisionsproblemen bis Zahlenbereichsüberflüsse in verschiedenen Programmiersprachen ergeben sich unter Umständen Probleme bei der Berechnung des Polynoms. [001]ff.

Eine Möglichkeit diese Probleme zu umgehen, ist das Skalieren der Datenpunkte mit ε hin zu günstigen Werten.

$$P_n\left(\lambda_n; X_n\right) \quad \rightarrow \quad P_n\left(\varepsilon \cdot \lambda_n; \varepsilon \cdot X_n\right) \quad \rightarrow \quad P_n\left(\tilde{\lambda}_n; \tilde{X}_n\right)$$

Das Polynom lautet dann:

$$\tilde{X} = a \cdot \tilde{\lambda}^3 + b \cdot \tilde{\lambda}^2 + c \cdot \tilde{\lambda} + d$$

Eine Rückskalierung ergibt die exakte Regression.

$$X = \varepsilon^2 \cdot a \cdot \lambda^3 + \varepsilon \cdot b \cdot \lambda^2 + c \cdot \lambda + \frac{d}{\varepsilon}$$

7 Quadratregression

7.1 Quadratregression über die Determinanten

Es soll eine Quadratregression mit Datenpunkten $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt werden. Wobei λ eine Wellenlänge darstellt und X eine Ortskoordinate.

[001]ff.

Definiert werden Summen folgender Form:

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \{y\} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\left\{x^2\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \lambda_i\right) \quad \{x \cdot y\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot X_i\right)$$

$$\left\{x^3\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i\right) \quad \left\{x^2 \cdot y\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot X_i\right)$$

$$\left\{x^4\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i\right)$$

Damit sind die Determinanten definiert.

$$D = \begin{vmatrix} n & \{x\} & \left\{x^2\right\} \\ \{x\} & \left\{x^2\right\} & \left\{x^3\right\} \\ \left\{x^2\right\} & \left\{x^3\right\} & \left\{x^4\right\} \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} \{y\} & \{x\} & \left\{x^2\right\} \\ \{x \cdot y\} & \left\{x^2\right\} & \left\{x^3\right\} \\ \left\{x^2 \cdot y\right\} & \left\{x^3\right\} & \left\{x^4\right\} \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} n & \{y\} & \left\{x^2\right\} \\ \{x\} & \{x \cdot y\} & \left\{x^3\right\} \\ \left\{x^2\right\} & \left\{x^2 \cdot y\right\} & \left\{x^4\right\} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} n & \{x\} & \{y\} \\ \{x\} & \left\{x^2\right\} & \{x \cdot y\} \\ \left\{x^2\right\} & \left\{x^3\right\} & \left\{x^2 \cdot y\right\} \end{vmatrix}$$

Jetzt sind die Koeffizienten a, b und c berechenbar.

$$a = \frac{A}{D} \quad b = \frac{B}{D} \quad c = \frac{C}{D}$$

Mit:

$$D = \begin{cases} +n \cdot \left\{x^2\right\} \cdot \left\{x^4\right\} - n \cdot \left\{x^3\right\} \cdot \left\{x^3\right\} \\ -\{x\} \cdot \{x\} \cdot \left\{x^4\right\} + \{x\} \cdot \left\{x^2\right\} \cdot \left\{x^3\right\} \\ +\{x\} \cdot \left\{x^2\right\} \cdot \left\{x^3\right\} - \left\{x^2\right\} \cdot \left\{x^2\right\} \cdot \left\{x^2\right\} \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} +\{y\} \cdot \left\{x^2\right\} \left\{x^4\right\} - \{y\} \cdot \left\{x^3\right\} \cdot \left\{x^3\right\} \\ -\{x \cdot y\} \cdot \{x\} \cdot \left\{x^4\right\} + \{x \cdot y\} \cdot \left\{x^2\right\} \cdot \left\{x^3\right\} \\ +\left\{x^2 \cdot y\right\} \cdot \{x\} \cdot \left\{x^3\right\} - \left\{x^2 \cdot y\right\} \cdot \left\{x^2\right\} \cdot \left\{x^2\right\} \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} +n \cdot \{x \cdot y\} \cdot \left\{x^4\right\} - n \cdot \left\{x^3\right\} \cdot \left\{x^2 \cdot y\right\} \\ -\{x\} \cdot \{y\} \cdot \left\{x^4\right\} + \{x\} \cdot \left\{x^2\right\} \cdot \left\{x^2 \cdot y\right\} \\ +\left\{x^2\right\} \cdot \{y\} \cdot \left\{x^3\right\} - \left\{x^2\right\} \cdot \left\{x^2\right\} \cdot \{x \cdot y\} \end{cases}$$

$$A = \begin{cases} +n \cdot \left\{x^2\right\} \cdot \left\{x^2 \cdot y\right\} - n \cdot \{x \cdot y\} \cdot \left\{x^2 \cdot y\right\} \\ -\{x\} \cdot \{x\} \cdot \left\{x^2 \cdot y\right\} + \{x\} \cdot \{y\} \cdot \left\{x^3\right\} \\ +\left\{x^2\right\} \cdot \{x\} \cdot \{x \cdot y\} - \{y\} \cdot \left\{x^2\right\} \cdot \left\{x^2\right\} \end{cases}$$

Das Regressionspolynom y ist bestimmt.

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$\Rightarrow$

$$X = a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c$$

7.2 Quadratregression über den Gaußalgorithmus

[001]ff. Es soll eine Quadratregression mit Datenpunkten $P_n(\lambda_n; X_n)$ ausgeführt werden. Wobei λ eine Wellenlänge darstellt und X eine Ortskoordinate.

Definiert werden Summen folgender Form:

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \{y\} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\{x^2\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot \lambda_i) \quad \{x \cdot y\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot X_i)$$

$$\{x^3\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i) \quad \{x^2 \cdot y\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot X_i)$$

$$\{x^4\} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i \cdot \lambda_i)$$

Damit ist das Gleichungssystem für die Koeffizienten a, b und c berechenbar.

$$\begin{aligned} n \cdot c + \{x\} \cdot b + \{x^2\} \cdot a &= \{y\} \\ \{x\} \cdot c + \{x^2\} \cdot b + \{x^3\} \cdot a &= \{x \cdot y\} \\ \{x^2\} \cdot c + \{x^3\} \cdot b + \{x^4\} \cdot a &= \{x^2 \cdot y\} \end{aligned}$$

Mittels Gaußalgorithmus wird aufgelöst.

$$\begin{aligned} c + \frac{\{x\}}{n} \cdot b + \frac{\{x^2\}}{n} \cdot a &= \frac{\{y\}}{n} \\ c + \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \cdot b + \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \cdot a &= \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}} \\ c + \frac{\{x^3\}}{\{x^2\}} \cdot b + \frac{\{x^4\}}{\{x^2\}} \cdot a &= \frac{\{x^2 \cdot y\}}{\{x^2\}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} A \cdot b + B \cdot a &= C \\ D \cdot b + E \cdot a &= F \end{aligned}$$

Der nächste Schritt.

$$\begin{aligned} b + \frac{B}{A} \cdot a &= \frac{C}{A} \\ b + \frac{E}{D} \cdot a &= \frac{F}{D} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$G \cdot a = H$$

Damit ist a bestimmt (Rot hervorgehobene Terme sind bestehend aus nativen Hilfsvariablen).

$$a = \frac{H}{G} = \frac{A \cdot F - C \cdot D}{A \cdot E - B \cdot D}$$

Rückwärts eingesetzt ergibt b.

$$b + \frac{B}{A} \cdot a = \frac{C}{A}$$

$\Rightarrow$

$$b = \frac{C}{A} - \frac{B}{A} \cdot a$$

Für c gilt:

$$c + I \cdot b + J \cdot a = K$$

$\Rightarrow$

$$c = K - I \cdot b - J \cdot a$$

Das Regressionspolynom y ist bestimmt.

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$\Rightarrow$

$$X = a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c$$

Mit den nativen Hilfsvariablen:

$$I = \frac{\{x\}}{n} \quad J = \frac{\{x^2\}}{n} \quad K = \frac{\{y\}}{n}$$

Und:

$$A = I - \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \quad D = I - \frac{\{x^3\}}{\{x^2\}}$$

$$B = J - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \quad E = J - \frac{\{x^4\}}{\{x^2\}}$$

$$C = K - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}} \quad F = K - \frac{\{x^2 \cdot y\}}{\{x^2\}}$$

Sowie den nichtnativen Hilfsvariablen:

$$G = \frac{B}{A} - \frac{E}{D} \qquad H = \frac{C}{A} - \frac{F}{D}$$

Die eben aufgezeigte Umformung obiger Matrizen mittels des Gauß- (Jordan-) Verfahren ergibt ohne Auflösung der Arrays:

$$\begin{pmatrix} n & \{x\} & \{x^2\} \\ \{x\} & \{x^2\} & \{x^3\} \\ \{x^2\} & \{x^3\} & \{x^4\} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{y\} \\ \{x \cdot y\} \\ \{x^2 \cdot y\} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$|M| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |c \leftrightarrow| \\ |b \leftrightarrow| \\ |a \leftrightarrow| \end{pmatrix}$$

Wobei letztendlich das der Lösungsweg über die Determinanten darstellt.

$$|M| \cdot c = |c \leftrightarrow| = \begin{cases} +\{y\} \cdot \{x^2\} \cdot \{x^4\} - \{y\} \cdot \{x^3\}^2 - \{x \cdot y\} \cdot \{x\} \cdot \{x^4\} + \{x \cdot y\} \cdot \{x^2\} \cdot \{x^3\} \\ +\{x^2 \cdot y\} \cdot \{x\} \cdot \{x^3\} - \{x^2 \cdot y\} \cdot \{x^2\}^2 \end{cases}$$

$$|M| \cdot b = |b \leftrightarrow| = \begin{cases} +\{y\} \cdot \{x^2\} \cdot \{x^3\} - \{y\} \cdot \{x\} \cdot \{x^4\} + \{x \cdot y\} \cdot n \cdot \{x^4\} - \{x \cdot y\} \cdot \{x^2\}^2 \\ -\{x^2 \cdot y\} \cdot n \cdot \{x^3\} + \{x^2 \cdot y\} \cdot \{x\} \cdot \{x^2\} \end{cases}$$

$$|M| \cdot a = |a \leftrightarrow| = \begin{cases} +\{y\} \cdot \{x\} \cdot \{x^3\} - \{y\} \cdot \{x^2\}^2 - \{x \cdot y\} \cdot n \cdot \{x^3\} + \{x \cdot y\} \cdot \{x\} \cdot \{x^2\} \\ +\{x^2 \cdot y\} \cdot n \cdot \{x^2\} - \{x^2 \cdot y\} \cdot \{x\}^2 \end{cases}$$

Womit die Koeffizienten $a; b$ und c direkt ermittelt werden können.

$$|M| = n \cdot \{x^2\} \cdot \{x^4\} - n \cdot \{x^3\}^2 - \{x\}^2 \cdot \{x^4\} + 2 \cdot \{x\} \cdot \{x^2\} \cdot \{x^3\} - \{x^2\}^3$$

$\Rightarrow$

$$|M| = \left(n \cdot \{x^2\} - \{x\}^2\right) \cdot \{x^4\} + 2 \cdot \{x\} \cdot \{x^2\} \cdot \{x^3\} - \{x^2\}^3 - n \cdot \{x^3\}^2$$

$\Rightarrow$

$$|M|^{(2)} = |M|^{(1)} \cdot \{x^4\} + 2 \cdot \{x\} \cdot \{x^2\} \cdot \{x^3\} - \{x^2\}^3 - n \cdot \{x^3\}^2$$

Wobei $|M|^{(2)}$ die Determinante der Matrix M aus der Quadratregression ist und $|M|^{(1)}$ die der Linearregression.

7.3 Probleme mit dem Ausdruck $\{x \cdot x \cdot x \cdot x\}$

[001]ff.

Bei großen Datenmengen, sehr kleinen x- Werten aber auch sehr großen x- Werten kann es Probleme mit dem $\{x \cdot x \cdot x \cdot x\}$- Ausdruck geben. Von Rundungsfehlern, Divisionsproblemen bis Zahlenbereichsüberflüsse in verschiedenen Programmiersprachen ergeben sich unter Umständen Probleme bei der Berechnung des Polynoms.

Eine Möglichkeit diese Probleme zu umgehen, ist das Skalieren der Datenpunkte mit ε hin zu günstigen Werten.

$$P_n\left(\lambda_n; X_n\right) \quad \rightarrow \quad P_n\left(\varepsilon \cdot \lambda_n; \varepsilon \cdot X_n\right) \quad \rightarrow \quad P_n\left(\tilde{\lambda}_n; \tilde{X}_n\right)$$

Das Polynom lautet dann:

$$\tilde{X} = a \cdot \tilde{\lambda}^2 + b \cdot \tilde{\lambda} + c$$

Eine Rückskalierung ergibt die exakte Regression.

$$X = \varepsilon \cdot a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + \frac{c}{\varepsilon}$$

8 Linearregression

Es wird eine Linearregression mit Datenpunkten in der Form $P_n\left(\lambda_n; X_n\right)$ durchgeführt. Wobei λ eine Wellenlänge darstellt und X eine Ortskoordinate. [001]ff.

Definiert werden Summen folgender Form:

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \{y\} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\left\{x^2\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot \lambda_i\right) \qquad \{x \cdot y\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i \cdot X_i\right)$$

8.1 Linearregression über die Determinanten

Aufstellen der Matrizen.

$$M = \begin{pmatrix} n & \{x\} \\ \{x\} & \{x^2\} \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} \{y\} \\ \{x \cdot y\} \end{pmatrix}$$

Somit:

$$b \leftrightarrow \begin{pmatrix} \{y\} & \{x\} \\ \{x \cdot y\} & \{x^2\} \end{pmatrix} \qquad a \leftrightarrow \begin{pmatrix} n & \{y\} \\ \{x\} & \{x \cdot y\} \end{pmatrix}$$

Die dazu gehörigen Determinanten:

$$\begin{aligned} \det(M) &= |M| = n \cdot \{x^2\} - \{x\} \cdot \{x\} \\ \det(a \leftrightarrow) &= |a \leftrightarrow| = n \cdot \{x \cdot y\} - \{x\} \cdot \{y\} \\ \det(b \leftrightarrow) &= |b \leftrightarrow| = \{y\} \cdot \{x^2\} - \{x \cdot y\} \cdot \{x\} \end{aligned}$$

Damit sind die Koeffizienten a und b berechenbar.

$$a = \frac{|a \leftrightarrow|}{|M|} \qquad b = \frac{|b \leftrightarrow|}{|M|}$$

$\Rightarrow$

$$a = \frac{\{x \cdot y\} \cdot n - \{x\} \cdot \{y\}}{\{x^2\} \cdot n - \{x\}^2} \qquad b = \frac{\{x^2\} \cdot \{y\} - \{x \cdot y\} \cdot \{x\}}{\{x^2\} \cdot n - \{x\}^2}$$

Das Linearpolynom y ist bestimmt.

$$y = a \cdot x + b$$

$\Rightarrow$

$$X = a \cdot \lambda + b$$

8.2 Linearregression über den Gaußalgorithmus

Die zur Linearregression dazu gehörige Matrize: [001]

$$\begin{pmatrix} n & \{x\} \\ \{x\} & \{x^2\} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{y\} \\ \{x \cdot y\} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$n \cdot b + \{x\} \cdot a = \{y\}$$
$$\{x\} \cdot b + \{x^2\} \cdot a = \{x \cdot y\}$$

$\Rightarrow$

$$b + \frac{\{x\}}{n} \cdot a = \frac{\{y\}}{n}$$
$$b + \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \cdot a = \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}}$$

$\Rightarrow$

$$\left(\frac{\{x\}}{n} - \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \right) \cdot a = \frac{\{y\}}{n} - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}}$$

$\Rightarrow$

$$a = \frac{\{x \cdot y\} \cdot n - \{x\} \cdot \{y\}}{\{x^2\} \cdot n - \{x\}^2}$$

Für b gilt:

$$b = \frac{\{y\}}{n} - \frac{\{x\}}{n} \cdot \frac{\{x\} \cdot \{y\} - \{x \cdot y\} \cdot n}{\{x\}^2 - \{x^2\} \cdot n}$$

$\Rightarrow$

$$b = \frac{\{x^2\} \cdot \{y\} - \{x \cdot y\} \cdot \{x\}}{\{x^2\} \cdot n - \{x\}^2}$$

Das Linearpolynom y ist bestimmt.

$$y = a \cdot x + b$$

$\Rightarrow$

$$X = a \cdot \lambda + b$$

Die eben aufgezeigte Umformung obiger Matrizen mittels des Gauß-(Jordan-)Verfahren ergibt ohne Auflösung der Arrays:

$$\begin{pmatrix} n & \{x\} \\ \{x\} & \{x^2\} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{y\} \\ \{x \cdot y\} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\{x^2\} \cdot \{y\} - \{x \cdot y\} \cdot \{x\}}{\{x^2\} \cdot n - \{x\}^2} \\ \frac{\{x \cdot y\} \cdot n - \{x\} \cdot \{y\}}{\{x^2\} \cdot n - \{x\}^2} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\left(\{x^2\} \cdot n - \{x\}^2 \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{x^2\} \cdot \{y\} - \{x \cdot y\} \cdot \{x\} \\ \{x \cdot y\} \cdot n - \{x\} \cdot \{y\} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\det \begin{pmatrix} n & \{x\} \\ \{x\} & \{x^2\} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} \{y\} & \{x\} \\ \{x \cdot y\} & \{x^2\} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} n & \{y\} \\ \{x\} & \{x \cdot y\} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$|M| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |b \leftrightarrow| \\ |a \leftrightarrow| \end{pmatrix}$$

Wobei letztendlich das der Lösungsweg über die Determinanten darstellt.

8.3 Nichtlineare Regressionen als Ableitungen der Linearregression

8.3.1 Potenzfunktionelle Regression

[001]ff. Definiert ist eine Potenzfunktion:

$$y = b \cdot x^a$$

Die Rückführung in eine lineare Funktion ist denkbar einfach.

$$\ln y = \ln (b \cdot x^a)$$

$\Rightarrow$

$$\ln y = \ln b + a \cdot \ln x \quad \leftrightarrow \quad Y = B + A \cdot X$$

Damit ist folgendes Vorangehen zwecks Regression gegeben.

• Die gegebenen zu regressierenden Datenpunkte $P_i\,(x_i; y_i)$ werden transformiert.

$$X_i = \ln x_i \qquad Y_i = \ln y_i$$

Die Datenpunkte liegen nun in der Form $P_i\,(X_i; Y_i)$ vor.

• Durchführen einer linearen Regression. Als Ergebnis sind die Koeffizienten A und B bekannt.

• (Rück)Transformierung der Linearkoeffizienten A und B in die potenzfunktionelle Koeffizienten a und b.

$$a = A$$

Sowie:

$$B = \ln b$$

$\Rightarrow$

$$b = e^B$$

Schon bei der Transformation der Datenpunkte ist ersichtlich, dass diese Regression nur angewandt werden kann, wenn y_i und x_i nichtnegative von Null verschiedene Werte besitzen.Im Besonderen ist bei jeder Transformation Vorsicht geboten, dass die gegeben Randbedingungen und Voraussetzungen eingehalten werden.

Selbstverständlich kann hier auch der dekadische Logarithmus $\log_{10} = \lg$ zur Transformation genutzt werden.

Für $b \in N$. Diese Regression ist eine konsequent „abgespeckte“ Polynomregression. Alle Koeffizienten außer a_b sind Null. So gilt für diese Regression in Matrixschreibweise:

$$|M| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a_0 \leftrightarrow| \\ |a_1 \leftrightarrow| \\ \vdots \\ |a_b \leftrightarrow| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ |a_b \leftrightarrow| \end{pmatrix}$$

Schon aus der Komplexizität von $|a_i \leftrightarrow|$ ist mit der Forderung, dass diese Determinanten Null sein sollen ersichtlich, dass diese Regression selten den praktischen und realen Anforderungen genügt und mehr theoretischen bzw. Spezialfällen vorbehalten sein wird. Exemplarisch sei hier die einfachste Linearregression $y = x$ genannt. Mit $b = 1$ gilt:

$$|b \leftrightarrow| = 0 = \{x \cdot x\} \cdot \{y\} - \{x \cdot y\} \cdot \{x\}$$

Die Variable y wird durch x substituiert (oder umgekehrt).

$$0 = \{x \cdot x\} \cdot \{x\} - \{x \cdot x\} \cdot \{x\} = \{y \cdot y\} \cdot \{y\} - \{y \cdot y\} \cdot \{y\}$$

Was eine wahre Aussage liefert und mit $b = 2$ dann $y = x^2$ und höhere b genauso funktioniert.

8.3.2 Exponentielle Regression

Definiert ist eine Exponentialfunktion: [001]ff.

$$y = b \cdot e^{a \cdot x}$$

Die Rückführung in eine lineare Funktion ist denkbar einfach.

$$\ln y = \ln \left(b \cdot e^{a \cdot x} \right)$$

$\Rightarrow$

$$\ln y = \ln b + a \cdot x \quad \leftrightarrow \quad Y = B + A \cdot X$$

Damit ist folgendes Vorangehen zwecks Regression gegeben.

• Die gegebenen zu regressierenden Datenpunkte $P_i \left(x_i ; y_i \right)$ werden transformiert.

$$X_i = x_i \qquad Y_i = \ln y_i$$

Die Datenpunkte liegen nun in der Form $P_i \left(X_i ; Y_i \right)$ vor.

• Durchführen einer linearen Regression. Als Ergebnis sind die Koeffizienten A und B bekannt.

•(Rück)Transformierung der Linearkoeffizienten A und B in die exponentialfunktionelle Koeffizienten a und b.

$$a = A$$

Sowie:

$$B = \ln b$$

$\Rightarrow$

$$b = e^B$$

Schon bei der Transformation der Datenpunkte ist ersichtlich, dass diese Regression nur angewandt werden kann, wenn y_i nichtnegative von Null verschiedene Werte besitzt. Im Besonderen ist bei jeder Transformation Vorsicht geboten, dass die gegeben Randbedingungen und Voraussetzungen eingehalten werden.

8.3.3 Rationalfunktionelle Regression

[001]ff.

Definiert ist eine rationale Funktion:

$$y = \frac{b \cdot x}{a + x}$$

Die Rückführung zu einer linearen Funktion ist denkbar einfach.

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{b} + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{x} \quad \leftrightarrow \quad Y = B + A \cdot X$$

Damit ist folgendes Vorangehen zwecks Regression gegeben.

• Die gegebenen, sigmoidal zu regressierenden Datenpunkte $P_i\,(x_i; y_i)$ werden transformiert.

$$X_i = \frac{1}{x_i} \qquad Y_i = \frac{1}{y_i}$$

Die Datenpunkte liegen nun in der Form $P_i\,(X_i; Y_i)$ vor.

• Durchführen einer linearen Regression. Als Ergebnis sind die Koeffizienten A und B bekannt.

• (Rück)Transformierung der Linearkoeffizienten A und B in die rationalfunktionelle Koeffizienten a und b.

$$b = \frac{1}{B}$$

Sowie:

$$A = \frac{a}{b}$$

$\Rightarrow$

$$a = A \cdot b$$

Der rationalfunktionelle Koeffizient b ist bekannt, wird eingesetzt und umgeformt. Ergebnis ist eine Berechnungsgrundlage für a.

$$a = \frac{A}{B}$$

Die betrachtete rationale Funktion besitzt im Zähler kein Absolutglied. Folge ist, dass für ein $x = 0$ auch ein $y = 0$ gilt. Daher müssen die zu regressierenden Datenpunkte sich um $P\,(0; 0)$ versammeln, bzw. weit entfernt von diesem sein, um dem Regressionsgrafen es zu ermöglichen, sich vom Koordinatenursprung hinaus in die Datenwolke hinein zu regressieren. Im Besonderen ist bei jeder Transformation Vorsicht geboten, dass die gegeben Randbedingungen und Voraussetzungen eingehalten werden.

8.3.4 Sigmoide Regression nach Mitscherlich

Definiert ist eine sigmoidale Wachstumsfunktion, auch nach dessen Beschreiber Mitscherlich- Funktion [1] genannt: [001]ff.

$$y = \frac{a \cdot b}{a + (b - a) \cdot e^{-c \cdot x}}$$

Die Rückführung zu einer linearen Funktion ist denkbar einfach.

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{b} + \frac{b - a}{a \cdot b} \cdot e^{-c \cdot x} \quad \leftrightarrow \quad Y = B + A \cdot X$$

Damit ist folgendes Vorangehen zwecks Regression gegeben.

• Die gegebenen, sigmoidal zu regressierenden Datenpunkte $P_i\,(x_i; y_i)$ werden transformiert.

$$X_i = e^{-c \cdot x_i} \qquad Y_i = \frac{1}{y_i}$$

Der Koeffizient c ist unkritisch und dient lediglich der Skalierung zu kleiner oder zu großer Beträge von x. Die Datenpunkte liegen nun in der Form $P_i\,(X_i; Y_i)$ vor.

• Durchführen einer linearen Regression. Als Ergebnis sind die Koeffizienten A und B bekannt.

• (Rück)Transformierung der Linearkoeffizienten A und B in die Mitscherlich-Koeffizienten a und b.

$$b = \frac{1}{B}$$

Sowie:

$$A = \frac{b - a}{a \cdot b}$$

$\Rightarrow$

$$a = \frac{b}{b \cdot A + 1}$$

Der Mitscherlich- Koeffizient b ist bekannt, wird eingesetzt und umgeformt. Ergebnis ist eine Berechnungsgrundlage für a.

$$a = \frac{1}{A + B}$$

Sind die Punkte $P_i\,(x_i; y_i)$ streng sigmoidal um den Regressionsgrafen der Mitscherlich-Funktion angeordnet, dann kann diese Funktion als Verteilungsfunktion F angesehen werden. Wird diese differenziert, erhält man eine Dichtefunktion f. Auf diesem Wege ist es leicht möglich einen Algorithmus zu implementieren um f zu erhalten.

$$F\,(x; a; b; c) = \frac{a \cdot b}{a + (b - a) \cdot e^{-c \cdot x}}$$

$\Rightarrow$

$$f\,(x; a; b; c) = F\,(x; a; b; c) \cdot \frac{(b - a) \cdot c \cdot e^{-c \cdot x}}{a + (b - a) \cdot e^{-c \cdot x}}$$

[1] Eilhard Alfred Mitscherlich, 1874-1956, Pflanzenbauwissenschaftler und Bodenkundler, beschrieb das mathematisch formulierte Wirkungsgesetz der Wachstumsfaktoren

9 Programmierbeispiele für Regressionen

9.1 Für die Biquadratische Regression

```
' Berechnungsgrundlage mit „0.01“ skaliert infolge numerischen Überlaufs großer Datensätze
' Vordefinition der Datensätze
'
xxxxy = 0.0;
xxxy = 0.0;
xxy = 0.0;
xy = 0.0;
x = 0.0;
y = 0.0;
xx = 0.0;
xxx = 0.0;
xxxx = 0.0;
xxxxx = 0.0;
xxxxxx = 0.0;
xxxxxxx = 0.0;
xxxxxxxx = 0.0;
'
for ( z = 0 ; z < n ; z = z + 1 )
{
xxxxy = xxxxy + ( Math.pow(0.01 * o[z] , 4 ) * 0.01 * w[z]);
xxxy = xxxy + ( Math.pow(0.01 * o[z] , 3 ) * 0.01 * w[z]);
xxy = xxy + ( Math.pow(0.01 * o[z] , 2 ) * 0.01 * w[z]);
xy = xy + (0.01 * o[z] * 0.01 * w[z]);
x = x + (0.01 * o[z]);
y = y + (0.01 * w[z]);
xx = xx + Math.pow(0.01 * o[z] , 2);
xxx = xxx + Math.pow(0.01 * o[z] , 3);
xxxx = xxxx + Math.pow(0.01 * o[z] , 4 );
xxxxx = xxxxx + Math.pow(0.01 * o[z] , 5 );
xxxxxx = xxxxxx + Math.pow(0.01 * o[z] , 6 );
xxxxxxx = xxxxxxx + Math.pow(0.01 * o[z] , 7 );
xxxxxxxx = xxxxxxxx + Math.pow(0.01 * o[z] , 8 );
}
'
' Regressionskern
' Diskriminantenberechnung - bewirkt kleinere Rundungsfehler durch Skalierungsmöglichkeiten
' Kolonne der 1. Diskriminantenschicht
'
Y = y / n;
X = xxxx / n;
W = xxx / n;
V = xx / n;
U = x / n;
'
' Kolonne der 2. Diskriminantenschicht
'
A = U - ( xx / x );
B = V - ( xxx / x );
C = W - ( xxxx / x );
D = X - ( xxxxx / x );
E = Y - ( xy / x );
F = U - ( xxx / xx );
G = V - ( xxxx / xx );
H = W - ( xxxxx / xx );
```

```
I = X - ( xxxxxx / xx );
J = Y - ( xxy / xx );
K = U - ( xxxx / xxx );
L = V - ( xxxxx / xxx );
M = W - ( xxxxxx / xxx );
N = X - ( xxxxxxx / xxx );
O = Y - ( xxxy / xxx );
P = U - ( xxxxx / xxxx );
Q = V - ( xxxxxx / xxxx );
R = W - ( xxxxxxx / xxxx );
S = X - ( xxxxxxxx / xxxx );
T = Y - ( xxxxy / xxxx );
'
' Kolonne der 3. Diskriminantenschicht
'
AA = ( B / A ) - ( G / F );
BB = ( C / A ) - ( H / F );
CC = ( D / A ) - ( I / F );
DD = ( E / A ) - ( J / F );
EE = ( B / A ) - ( L / K );
FF = ( C / A ) - ( M / K );
GG = ( D / A ) - ( N / K );
HH = ( E / A ) - ( O / K );
II = ( B / A ) - ( Q / P );
JJ = ( C / A ) - ( R / P );
KK = ( D / A ) - ( S / P );
LL = ( E / A ) - ( T / P );
'
' Kolonne der 4. Diskriminantenschicht
'
AAA = ( BB / AA ) - ( FF / EE );
BBB = ( CC / AA ) - ( GG / EE );
CCC = ( DD / AA ) - ( HH / EE );
DDD = ( BB / AA ) - ( JJ / II );
EEE = ( CC / AA ) - ( KK / II );
FFF = ( DD / AA ) - ( LL / II );
'
' Kolonne der 5. Diskriminantenschicht
'
AAAA = ( BBB / AAA ) - ( EEE / DDD );
BBBB = ( CCC / AAA ) - ( FFF / DDD );
'
' Koeffizientenberechnung
'
a4 = BBBB / AAAA;
b4 = ( CCC / AAA ) - ( ( BBB / AAA ) * a4 );
c4 = ( DD / AA ) - ( ( CC / AA ) * a4 ) - ( ( BB / AA ) * b4 );
d4 = ( E / A ) - ( ( D / A ) * a4 ) - ( ( C / A ) * b4 ) - ( ( B / A ) * c4 );
e4 = Y - ( X * a4 ) - ( W * b4 ) - ( V * c4 ) - ( U * d4 );
'
' Entskalierung der Koeffizienten
'
e4 = e4 / 0.01;
c4 = c4 * 0.01;
b4 = b4 * 0.01 * 0.01;
a4 = a4 * 0.01 * 0.01 * 0.01;
```

9.2 Für die Sigmoide Regression nach Mitscherlich

```
' Umbau der Rohdaten in Mitscherlich- kompatible Daten
'
for ( z = 0 ; z < n ; z = z + 1 )
{
o_inv[z] = Math.pow(e , ( (-o[z]) / alpha ) );
w_inv[z] = Math.pow( w[z] , -1 );
}
'
' Beginn Lineare Regression der Mitscherlich Daten
' Vordefinition der Datensätze
'
xy = 0.0;
x = 0.0;
y = 0.0;
xx = 0.0;
'
for ( z = 0 ; z < n ; z = z + 1 )
{
xy = xy + (o_inv[z] * w_inv[z]);
x = x + o_inv[z];
y = y + w_inv[z];
xx = xx + (o_inv[z] * o_inv[z]);
}
'
' Koeffizientenberechnung der Mitscherlich- Daten
'
a6 = ( ( xy * n ) - ( x * y) ) / ( ( xx * n ) - ( x * x )
b6 = ( ( xx * y ) - (xy * x) ) / ( ( xx * n ) - ( x * x ) );
'
' Koeffizientenüberführung in kartesisch- kompatible Koeffizienten
'
A6 = Math.pow( (a6 + b6) , -1);
B6 = Math.pow( b6 , -1);
```

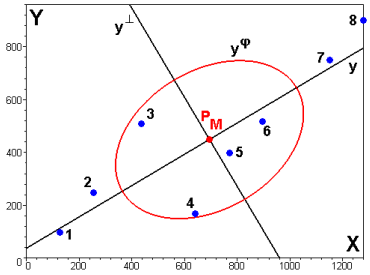
LaTeX 2_ε

$$\oiint$$

3.2 Elliptische

3.2.1 Elliptische Regression nach der Methode der kleinsten Quadrate - MKQ

Elliptische Regression von Datenpunkten - MKQ



Elliptic regression of data points - MKQ

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 17. Oktober 2013 – Letzte Revision: 11. Juni 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Elliptische Regression im Allgemeinen **3**
1.1 Lineare Regression der Hauptachse y . . . 4
1.2 Lineare Regression der Nebenachse $y^{\perp}$ . . . 5
1.3 Schnittpunkt zwischen Haupt- und Nebenachse P_M . . . 7
1.4 Ermittlung der elliptischen Regressionsfunktion y^E . . . 8
1.5 Ermittlung der Regressionsparameter f und e . . . 10
1.5.1 Hauptachsenparameter f . . . 10
1.5.2 Nebenachsenparameter e . . . 11
1.6 Nachweise der erfolgreichen Minimierung von F . . . 12
1.6.1 Nachweis, dass die Nebenachse die Fehlerfunktion F minimiert . . . 12
1.6.2 Nachweis, dass die Ellipse die Fehlerfunktion F minimiert . . . 13

2 Elliptische Regression im Besonderen **15**
2.1 Erweiterung auf eine gekippte Ellipse y^{φ} . . . 15
2.2 Korrelationskoeffizient ρ_{XY} . . . 16
2.3 Exzentrizitäten ϵ . . . 17
2.3.1 Lineare Exzentrizität ϵ_L . . . 17
2.3.2 Numerische Exzentrizität ϵ_N . . . 18

3 Anhang **19**
3.1 Beispiel I . . . 19
3.1.1 Daten . . . 19
3.1.2 Ergebnisse, numerisch . . . 20
3.1.3 Ergebnisse, grafisch . . . 21
3.2 Beispiel II . . . 22
3.2.1 Daten . . . 22
3.2.2 Ergebnisse, numerisch . . . 23
3.2.3 Ergebnisse, grafisch . . . 24

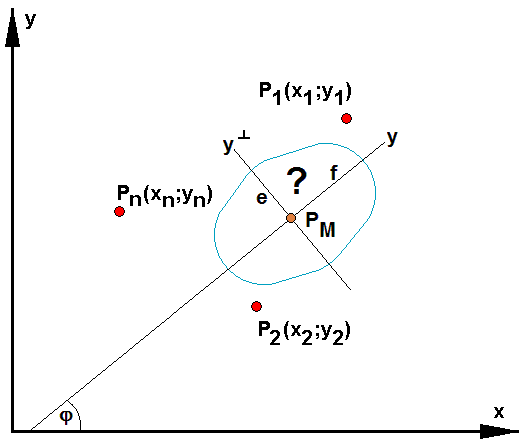
Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

[Rol] Roland Weingärtner, Leon Schiller, Alexander Kinstler, Richard Neumann, Frank Brunner, Eldad Bahat Treidel, Enrico Brusaterra, Matthias Marx, Sven Besendörfer. Impact of Dislocation Networks on Leakage Currents of GaN-on-GaN pn-Diodes: A Statistical Approach Comparing X-Ray Topography with Electrical Characteristics.

1 Elliptische Regression im Allgemeinen

Es soll eine Elliptische Regression mit Datenpunkten P_i durchgeführt werden. Ziel ist es, eine elliptische Funktion zu finden, die eine noch zu ermittelnde Fehlerfunktion F minimiert. Die „Methode der kleinsten Quadrate“ ist Grundmethode dieser Regression. [001]ff.



Das Modell der Elliptischen Regression.

Grundsätzlich ist erkennbar, dass folgende Parameter zu berechnen sind:

- Die lineare Funktion der Hauptachse $y = f(x)$
- Die lineare Funktion der Nebenachse $y^{\perp} = f(x)$
- Der Mittelpunkt P_M mit dessen Abszissenlage x_M
- Der Mittelpunkt P_M mit dessen Ordinatenlage y_M
- Die Hauptachsenlänge f
- Die Nebenachsenlänge e
- Der Kippwinkel φ der Ellipse

Weiterhin ist zu zeigen oder möglich zu berechnen:

- Eine Ellipse erfüllt die Bedingung von F
- Die Exzentrizität(en) ε der Ellipse
- Der lineare Korrelationskoeffizient ρ zwischen x_i und y_i

Ein nachfolgendes Beispiel rundet das Skript ab.

1.1 Lineare Regression der Hauptachse y

Hauptachse y

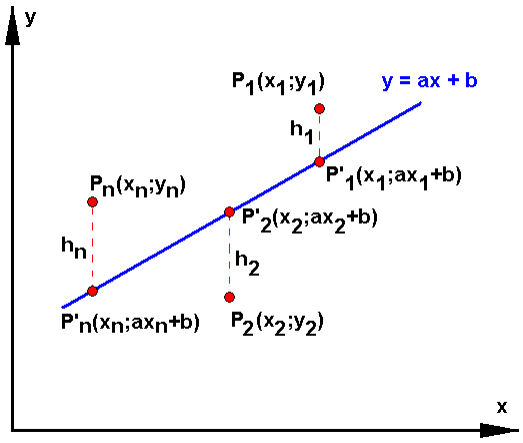
Die lineare Regression der Hauptachse erfolgt über die Regeln der Linearen Regression (siehe dort zur Ermittlung der Koeffizienten a und b und den hier genutzten Syntax)[1]. Ergebnis ist eine lineare Funktion.

$$y = a \cdot x + b$$

Mit a dem Anstieg und b der Inhomogenität der Funktion.

$$a = \frac{\{x\} \cdot \{y\} - n \cdot \{xy\}}{\{x\}^2 - n \cdot \{x^2\}} \qquad b = \frac{\{xy\} \cdot \{x\} - \{y\} \cdot \{x^2\}}{\{x\}^2 - n \cdot \{x^2\}}$$

$\Leftarrow$



Die Lineare Regression über die Methode der kleinsten Quadrate.

[1] www.Zenithpoint.de „Polynomregression von Datenpunkten“

1.2 Lineare Regression der Nebenachse $y^\perp$

Bekannt sind a und b aus der Linearen Regression. Gesucht ist die orthogonale Funktion $y^\perp$, die Nebenachse.

Nebenachse $y^\perp$

$$y^\perp = c \cdot x + d$$

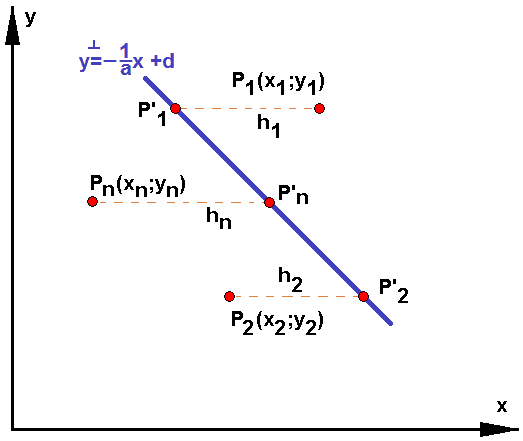
Aus der Forderung der Orthogonalität ist c vorgegeben.

$$c = -\frac{1}{a}$$

$\Rightarrow$

$$c = \frac{n \cdot \{x^2\} - \{x\}^2}{\{x\} \cdot \{y\} - n \cdot \{x \cdot y\}}$$

Die Inhomogenität d muss regressiert werden.



Das genutzte Modell für die Ermittlung der Nebenachse.

Aus den gegebenen Datenpunkten P sind die Punkte $P^\perp$ auf dem Funktionsgrafen $y^\perp$ gegeben.

$$P_1^\perp \left(\frac{1}{c}y_1 - \frac{d}{c}; y_1\right)$$

$$P_2^\perp \left(\frac{1}{c}y_2 - \frac{d}{c}; y_2\right)$$

$$\vdots$$

$$P_n^\perp \left(\frac{1}{c}y_n - \frac{d}{c}; y_n\right)$$

Der Abstand h zwischen P und $P^\perp$ parallel zur Abszisse ist definiert durch:

$$h_1^\perp = x_1 - \frac{1}{c}y_1 + \frac{d}{c}$$

$$h_2^\perp = x_2 - \frac{1}{c}y_2 + \frac{d}{c}$$

$$\vdots$$

$$h_n^\perp = x_n - \frac{1}{c}y_n + \frac{d}{c}$$

Die Fehlerfunktion F wird gebraucht um dessen Minimum zu ermitteln.

$$F = \sum_{i=1}^{n} h_i^{\perp 2}$$

$\Rightarrow$

$$F = \begin{cases} +\left(x_1 - \frac{1}{c}y_1 + \frac{d}{c}\right)^2 \\ +\left(x_2 - \frac{1}{c}y_2 + \frac{d}{c}\right)^2 \\ \vdots \\ +\left(x_n - \frac{1}{c}y_n + \frac{d}{c}\right)^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$F = \begin{cases} +x_1^2 - 2\frac{1}{c}x_1y_1 + 2\frac{d}{c}x_1 - 2\frac{d}{c^2}y_1 + \frac{1}{c^2}y_1^2 + \frac{d^2}{c^2} \\ +x_2^2 - 2\frac{1}{c}x_2y_2 + 2\frac{d}{c}x_2 - 2\frac{d}{c^2}y_2 + \frac{1}{c^2}y_2^2 + \frac{d^2}{c^2} \\ \vdots \\ +x_n^2 - 2\frac{1}{c}x_ny_n + 2\frac{d}{c}x_n - 2\frac{d}{c^2}y_n + \frac{1}{c^2}y_n^2 + \frac{d^2}{c^2} \end{cases}$$

Die Fehlerfunktion kann zusammengefasst werden.

$$F(d) = \left\{x^2\right\} - 2\frac{1}{c}\{x \cdot y\} + 2\frac{d}{c}\{x\} - 2\frac{d}{c^2}\{y\} + \frac{1}{c^2}\{y\} + n \cdot \frac{d^2}{c^2}$$

Die 1. Ableitung wird ermittelt und Null gesetzt.

$$F(d)' = 0 - 0 + 2\frac{1}{c}\{x\} - 2\frac{1}{c^2}\{y\} + 0 + 2 \cdot n \cdot \frac{d}{c^2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$c \cdot \{x\} - \{y\} + n \cdot d = 0$$

Damit ist der Koeffizient d ermittelt.

$$d = \frac{\{y\} - c \cdot \{x\}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$d = \frac{\{y\}}{n} - c \cdot \frac{\{x\}}{n} = y_M - c \cdot x_M = \mu_Y - c \cdot \mu_X$$

1.3 Schnittpunkt zwischen Haupt- und Nebenachse P_M

Der Mittelpunkt der zukünftigen zweidimensionalen Verteilung ist der Schnittpunkt der Funktionen y und $y^{\perp}$. Mittelpunkt P_M

$$a \cdot x_M + b = c \cdot x_M + d = -\frac{1}{a} \cdot x_M + d$$

$\Rightarrow$

$$x_M = a \cdot \frac{d-b}{a^2+1}$$

Für y_M:

$$y_M = -\frac{1}{a} \cdot x_M + d$$

$\Rightarrow$

$$y_M = \frac{b + d \cdot a^2}{a^2+1}$$

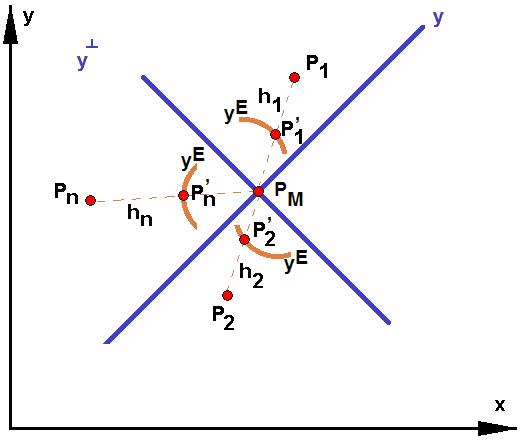
Das sind dann die Mittelwerte der Verteilung.

$$x_M = \mu_X = a \cdot \frac{d-b}{a^2+1} \qquad y_M = \mu_Y = \frac{b + d \cdot a^2}{a^2+1}$$

1.4 Ermittlung der elliptischen Regressionsfunktion y^E

Regression y^E

Es wurde ein Punkt $P_M\left(x_M; y_M\right)$ gefunden als Schnittpunkt zweier orthogonaler Regressionsgeraden in der Ebene. Sieht man P_M als den zentralen Utopiapoint für eine Vielzahl möglicher Utopiapunkte an, insbesondere für alle regressierten Punkte P_1 bis P_n, dann kann eine Funktion y^E um P_M definiert werden, in der alle Utopiapunkte innerhalb y^E liegen und alle Nadirpunkte außerhalb.



Modell zur Ermittlung der Regressionsfunktion.

Es wird eine Gerade definiert $\overline{P_i P_M}$. Der Funktionsgraf y^E muss diese Gerade schneiden. Dann ist der Abstand zwischen Schnittpunkt und P_i gegeben.

$$\begin{aligned} h_1 &= \sqrt{\left(x_1 - x^E\right)^2 + \left(y_1 - y^E\right)^2} \\ h_2 &= \sqrt{\left(x_2 - x^E\right)^2 + \left(y_2 - y^E\right)^2} \\ &\vdots \\ h_n &= \sqrt{\left(x_n - x^E\right)^2 + \left(y_n - y^E\right)^2} \end{aligned}$$

Die Fehlerfunktion F wird ermittelt und umgestellt (Der Index E wird folgend nicht weiter mitgeführt der Einfachheit halber).

$$F = \sum_{i=1}^{n} h_i^{\perp 2}$$

$\Rightarrow$

$$F = \begin{cases} +\left(x_1 - x\right)^2 + \left(y_1 - y\right)^2 \\ +\left(x_2 - x\right)^2 + \left(y_2 - y\right)^2 \\ \vdots \\ +\left(x_n - x\right)^2 + \left(y_n - y\right)^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$F = \begin{cases} +x_1^2 - 2x_1 \cdot x + x^2 + y_1^2 - 2y_1 \cdot y + y^2 \\ +x_2^2 - 2x_2 \cdot x + x^2 + y_2^2 - 2y_2 \cdot y + y^2 \\ \vdots \\ +x_n^2 - 2x_n \cdot x + x^2 + y_n^2 - 2y_n \cdot y + y^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$F\left(x; f\left(x\right) = y\right) = \left\{x^2\right\} - 2x \cdot \left\{x\right\} + n \cdot x^2 + \left\{y^2\right\} - 2y \cdot \left\{y\right\} + n \cdot y^2$$

Um das Minimum von F zu finden, wird differenziert und Null gesetzt.

$$F' = 0 - 2 \cdot \left\{x\right\} + 2n \cdot x + 0 - 2y' \cdot \left\{y\right\} + 2n \cdot y \cdot y' = 0$$

$\Rightarrow$

$$y' \cdot \left(y - \frac{\left\{y\right\}}{n}\right) = \frac{\left\{x\right\}}{n} - x$$

$\Rightarrow$

$$y' \cdot (y - \mu_Y) = \mu_X - x$$

$\Rightarrow$

$$y' = \frac{\mu_X - x}{y - \mu_Y} = \frac{x_M - x}{y - y_M}$$

Die Differentialgleichung 1. Ordnung stellt unsere gesuchte Funktion dar. Eine allgemeine Lösung der DGL wird hier nicht dargestellt. Über etwas Erfahrung ist zu erkennen, dass die Ellipsengleichung eine partikuläre Lösung der DGL darstellt. So ist gegeben für eine (noch) nicht gedrehte aber schon verschobene Ellipse:

$$\frac{(y - y_M)^2}{e^2} + \frac{(x - x_M)^2}{f^2} = 1$$

$\Rightarrow$

$$y = \pm\frac{e}{f} \cdot \sqrt{f^2 - (x - x_M)^2} + y_M$$

$\Rightarrow$

$$y' = \frac{e}{f} \cdot \frac{x_M - x}{\sqrt{f^2 - (x_M - x)^2}}$$

In y' kann y eingesetzt werden.

$$y - y_M = \pm\frac{e}{f} \cdot \sqrt{f^2 - (x - x_M)^2}$$

Somit ergibt sich dann für y'.

$$y' = \frac{x_M - x}{y - y_M}$$

$\Rightarrow$

$$y^E = \pm\frac{e}{f} \cdot \sqrt{f^2 - (x - x_M)^2} + y_M$$

1.5 Ermittlung der Regressionsparameter f und e

1.5.1 Hauptachsenparameter f

Parameter f

Die Ermittlung von f erfolgt über das Nullsetzen der ersten Ableitung von F.

$$F(e) = \left\{x^2\right\} - 2x \cdot \{x\} + n \cdot x^2 + \left\{y^2\right\} - 2y \cdot \{y\} + n \cdot y^2$$

$\Rightarrow$

$$F(e)' = 0 = \begin{cases} +n \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{f^2 - (x - x_M)^2} \cdot \left(e \cdot \sqrt{f^2 - (x - x_M)^2} + y_M \cdot f\right)}{f^2} \\ -2 \cdot \frac{\sqrt{f^2 - (x - x_M)^2}}{f} \cdot \{y\} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$e \cdot \sqrt{f^2 - (x - x_M)^2} + y_M \cdot f - \frac{\{y\}}{n} \cdot f = 0$$

$\Rightarrow$

$$f^2 = (x - x_M)^2$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_X^2 = \frac{\left\{f^2\right\}}{n} = \frac{\left\{(x - x_M)^2\right\}}{n}$$

1.5.2 Nebenachsenparameter e

Die Ermittlung eines nichttrivialen Wertes von e erfolgt über die Evolute. Dabei wird der Mittelpunkt der Abrollfunktion festgehalten in $P_M\left(x_M; y_M\right)$. Parameter e

$$F\left(x\right) = \left\{x^2\right\} - 2x \cdot \left\{x\right\} + n \cdot x^2 + \left\{y^2\right\} - 2y \cdot \left\{y\right\} + n \cdot y^2$$

$\Rightarrow$

$$F' = -2 \cdot \left\{x\right\} + 2n \cdot x - 2y' \cdot \left\{y\right\} + 2n \cdot y \cdot y' = 0$$

$\Rightarrow$

$$F'' = 0 + 2n - 2y'' \cdot \left\{y\right\} + 2n \cdot \left(y \cdot y'' + y' \cdot y'\right) = 0$$

$\Rightarrow$

$$1 + y \cdot y'' - y'' \cdot \frac{\left\{y\right\}}{n} + y'^2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$1 + y'' \cdot \left(y - y_M\right) + y'^2 = 0$$

Wenn $f = x - x_M$ dann ist $y - y_M$ das gesuchte e und es wird substituiert.

$$1 + y'' \cdot e + y'^2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$e = -\frac{1 + y'^2}{y''}$$

Ist die Vermutung von $e = y - y_M$ richtig, dann muss obiger Ausdruck wahr sein. Dieser Nachweis kann leicht über die Funktionsgleichung der Evolute einer Funktion erbracht werden.

Bei der parametrischen Evolutenfunktion gilt, für den Wert x_M:

$$x_M = x - \frac{1 + y'^2}{y''} \cdot y'$$

$\Rightarrow$

$$\frac{x_M - x}{y'} = -\frac{1 + y'^2}{y''}$$

Der rechte Term ersetzt den rechten Term von e.

$$\frac{x_M - x}{y'} = e$$

$\Rightarrow$

$$e = \frac{x_M - x}{\frac{x_M - x}{y - y_M}} = y - y_M$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_Y^2 = \frac{\left\{e^2\right\}}{n} = \frac{\left\{\left(y - y_M\right)^2\right\}}{n}$$

1.6 Nachweise der erfolgreichen Minimierung von F

1.6.1 Nachweis, dass die Nebenachse die Fehlerfunktion F minimiert

Bedingung I

Der Nachweis, dass F für ermitteltes d ein Minimum ist.

$$F\left(d\right)' = 0 - 0 + 2 \cdot n \cdot \frac{1}{c^2} > 0$$

Da gilt, $F\left(d\right)'$ ist immer größer Null, ist die Fehlerfunktion im Minimum für d und $y^{\perp}$ ermittelt.

1.6.2 Nachweis, dass die Ellipse die Fehlerfunktion F minimiert

Im vorhergehenden Abschnitt ist die zweite Ableitung der Fehlerfunktion ermittelt worden. Über diese kann der Nachweis geführt werden, dass eine Ellipse mit ihren Parametern e und f die Fehlerfunktion minimiert. Es muss nachgewiesen werden, dass gilt: Bedingung II

$$F'' = n - y'' \cdot \{y\} + n \cdot (y \cdot y'' + y' \cdot y') > 0$$

$\Rightarrow$

$$1 + y'' \cdot (y - y_M) + y'^2 > 0$$

Die Ellipsengleichung ist bekannt und dessen Ableitungen. (Im folgenden wird nur der positive Funktionsterm betrachtet. Für den negativen Teil gilt der Nachweis analog.) Das Quadrat der ersten Ableitung wird ermittelt.

$$y - y_M = \frac{e}{f} \cdot \sqrt{f^2 - (x - x_M)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{y - y_M} \cdot \frac{f}{e} = \frac{1}{\sqrt{f^2 - (x - x_M)^2}}$$

$\Rightarrow$

$$y' = -\frac{e}{f} \cdot \frac{x - x_M}{\sqrt{f^2 - (x - x_M)^2}} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{x_M - x}{y - y_M}$$

$\Rightarrow$

$$y'^2 = \frac{(x_M - x)^2}{(y - y_M)^2}$$

Die zweite Ableitung wird berechnet.

$$y'' = -\frac{e \cdot f}{\sqrt{\left(f^2 - (x - x_M)^2\right)^3}}$$

$\Rightarrow$

$$y'' = -\frac{(x - x_M)^4}{(y - y_M)^5}$$

Die Berechneten Werte werden in die Bedingungsgleichung eingesetzt.

$$1 + y'' \cdot (y - y_M) + y'^2 > 0$$

$\Rightarrow$

$$1 - \frac{(x - x_M)^4}{(y - y_M)^5} \cdot (y - y_M) + \frac{(x_M - x)^2}{(y - y_M)^2} > 0$$

$\Rightarrow$

$$(y - y_M)^4 - (x - x_M)^4 + (y - y_M)^2 \cdot (x_M - x)^2 > 0$$

$\Rightarrow$

$$(y - y_M)^4 + (y - y_M)^2 \cdot (x_M - x)^2 > (x - x_M)^4$$

$\Rightarrow$

$$f^4 + f^2 \cdot e^2 > e^4$$

Da per Definition die Hauptachse f größer ist als die Nebenachse e also gilt:

$$f > e$$

So gilt das auch für die vierte Potenz der Hauptachsen.

$$f^4 > e^4$$

Insbesondere ist diese Aussage richtig, wenn zu f^4 noch positive Werte $f^2 \cdot e^2$ dazu summiert werden. Daher ist obige Relation richtig und die Ellipse ist eine Funktion, welche die Fehlerfunktion F minimiert.

Auch für den Sonderfall der Ellipse $f = e$ was dem Kreis entspricht, ist die Fehlerfunktion F im Minimum.

$$f^4 + f^2 \cdot f^2 > f^4$$

$\Rightarrow$

$$2 \cdot f^4 > f^4$$

2 Elliptische Regression im Besonderen

2.1 Erweiterung auf eine gekippte Ellipse y^φ

Der Kippwinkel φ errechnet sich aus dem Anstieg der Hauptachsenfunktion y. Kippwinkel φ

$$\varphi = \arctan a$$

$\Rightarrow$

$$\varphi = \arctan \frac{\{x\} \cdot \{y\} - n \cdot \{xy\}}{\{x\}^2 - n \cdot \{x^2\}}$$

Dann erweitert sich die regressierte Ellipsenfunktion zu:

$$\frac{(x - x_M)^2}{f^2} + \frac{(y - y_M)^2}{e^2} = 1$$

$\Rightarrow$

$$\frac{((x - x_M) \cdot \cos\varphi + (y - y_M) \cdot \sin\varphi)^2}{f^2} + \frac{((y - y_M) \cdot \cos\varphi - (x - x_M) \cdot \sin\varphi)^2}{e^2} = 1$$

$\Rightarrow$

$$y^\varphi = y_M + \frac{B}{A} \cdot (x - x_M) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_M)^2}$$

Mit:

$$A = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi$$
$$B = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi$$

Wobei:

$$\sin^2\varphi = \sin^2 \arctan a = \frac{a^2}{1 + a^2}$$
$$\cos^2\varphi = \cos^2 \arctan a = \frac{1}{1 + a^2}$$
$$\cos\varphi \cdot \sin\varphi = \cos\arctan a \cdot \sin\arctan a = \frac{a}{1 + a^2}$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2}$$
$$B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B}{A} = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2}$$

2.2 Korrelationskoeffizient ρ_{XY}

Koeffizient ρ

Betrachtet man die ermittelte Ellipse als Höhenlinie einer zweidimensionalen Normalverteilung, dann lässt sich der Korrelationskoeffizient ρ_{XY} ermitteln. So gilt für die Hauptachse:

$$y = a \cdot x + b$$

$\Rightarrow$

$$y = a \cdot (x - x_M) + y_M$$

$\Rightarrow$

$$y - y_M = a \cdot (x - x_M)$$

Transformiert für die zweidimensionale Normalverteilung:

$$y - \mu_Y = \rho_{XY} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot (x - \mu_X)$$

Damit ist ρ_{XY} ermittelt.

$$\rho_{XY} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = a$$

$\Rightarrow$

$$\rho_{XY} = a \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$$

$\Rightarrow$

$$\rho_{XY} = a \cdot \sqrt{\frac{\{f^2\}}{\{e^2\}}} = a \cdot \sqrt{\frac{\left\{(y - y_M)^2\right\}}{\left\{(x - x_M)^2\right\}}}$$

2.3 Exzentrizitäten ϵ

2.3.1 Lineare Exzentrizität ϵ_L

Laut allgemeiner Definition:

Exzentrizität ε

$$\varepsilon_L^2 = \left|\left\{e^2\right\} - \left\{f^2\right\}\right|$$

$\Rightarrow$

$$\varepsilon_L = \sqrt{\left|\left\{e^2\right\} - \left\{f^2\right\}\right|}$$

2.3.2 Numerische Exzentrizität ϵ_N

Laut allgemeiner Definition:

$$\varepsilon_N^2 = \frac{\varepsilon_L^2}{MAX\left(\{e^2\};\{f^2\}\right)}$$

$\Rightarrow$

$$\varepsilon_N^2 = \frac{\left|\{e^2\} - \{f^2\}\right|}{MAX\left(\{e^2\};\{f^2\}\right)}$$

$\Rightarrow$

$$\varepsilon_N = \sqrt{\frac{\left|\{e^2\} - \{f^2\}\right|}{MAX\left(\{e^2\};\{f^2\}\right)}}$$

3 Anhang

Beispiel I

3.1 Beispiel I

3.1.1 Daten

x_i	y_i	i	$x_i \cdot x_i$	$x_i \cdot y_i$	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$
128	100	1	16 384	12 800	321 489	121 627
256	250	2	65 536	64 000	192 721	39 502
440	510	3	193 600	224 400	65 025	3 752
640	160	4	409 600	102 400	3 025	83 376
768	400	5	589 824	307 200	5 329	2 377
896	520	6	802 816	465 920	40 401	5 077
1 152	750	7	1 327 104	864 000	208 849	90 752
1 280	900	8	1 638 400	1 152 000	342 225	203 627
5 560	3 590	8	5 043 264	3 192 720	1 179 064	550 090

3.1.2 Ergebnisse, numerisch

Aus den obigen Zahlen folgt:

$$a = \frac{\{x \cdot y\} \cdot n - \{x\} \cdot \{y\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{3192720 \cdot 8 - 5560 \cdot 3590}{5043264 \cdot 8 - 5560^2} = \frac{5581360}{9432512} = 0,5928$$

$\Rightarrow$

$$b = \frac{\{x \cdot x\} \cdot \{y\} - \{x \cdot y\} \cdot \{x\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{5043264 \cdot 3590 - 3192720 \cdot 5560}{5043264 \cdot 8 - 5560^2} = \frac{353794560}{9432512} = 37,5079$$

$\Rightarrow$

$$c = -\frac{1}{a} = -\frac{9432512}{5591360} = -1,6869$$

$\Rightarrow$

$$d = \frac{\{y\}}{n} - c \cdot \frac{\{x\}}{n} = \frac{3590}{8} + 1,6869 \cdot \frac{5560}{8} = 1621,1455$$

$\Rightarrow$

$$x_M = \mu_X = \frac{5560}{8} = 695 \qquad y_M = \mu_Y = \frac{3590}{8} = 448,75$$

Oder:

$$\mu_X = a \cdot \frac{d - b}{a^2 + 1} = 0,5928 \cdot \frac{1621,1455 - 37,5079}{0,5928^2 + 1} = 694,666$$

$\Rightarrow$

$$\mu_Y = \frac{b + d \cdot a^2}{1 + a^2} = \frac{37,5079 + 1621,1455 \cdot 0,5928^2}{1 + 0,5928^2} = 449,306$$

Sowie:

$$\sigma_X^2 = \frac{\{f^2\}}{n} = \frac{\left\{(x - x_M)^2\right\}}{n} = \frac{1179064}{8} = 147383$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_X \equiv f = 383,9$$

Und:

$$\sigma_Y^2 = \frac{\{e^2\}}{n} = \frac{\left\{(y - y_M)^2\right\}}{n} = \frac{550090}{8} = 68761,25$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_Y \equiv e = 262,22$$

Weiterhin:

$$\varphi = \arctan a = \arctan 0,5928 = 30,66^\circ \equiv 0,535$$

$$\rho_{XY} = a \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} = 0,5928 \cdot \frac{383,9}{262,22} = 0,868$$

$$\varepsilon_L = \sqrt{|e^2 - f^2|} = \sqrt{|68761,25 - 147383|} = 280,4$$

$$\varepsilon_N = \sqrt{\frac{|e^2 - f^2|}{MAX\left(e^2; f^2\right)}} = \frac{280,4}{\sqrt{MAX\left(68761,25; 147383\right)}} = \frac{280,4}{\sqrt{147383}} = 0,73$$

Letztendlich:

$$A = \frac{262,22^2 \cdot 0,5928^2 + 383,9^2}{1 + 0,5928^2} = 126935,44$$

$$B = 0,5928 \cdot \frac{383,9^2 - 262,22^2}{1 + 0,5928^2} = 34486,8$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e \cdot f}{A} = \frac{262,22 \cdot 383,9}{126935,44} = 0,7931$$

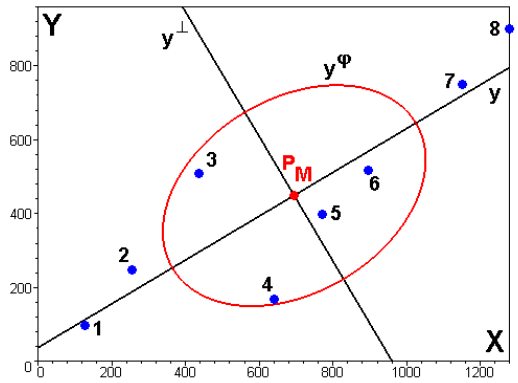
$$\frac{B}{A} = \frac{34486,8}{126935,44} = 0,2717$$

$\Rightarrow$

$$y^\varphi = 448,75 + 0,2717 \cdot (x - 695) \pm 0,7931 \cdot \sqrt{126935,44 - (x - 695)^2}$$

3.1.3 Ergebnisse, grafisch

Die grafische Darstellung dazu zeigt, dass vier Punkte innerhalb und 4 außerhalb der Ellipse liegen.



Das Ergebnis der Elliptischen Regression am Beispiel.

Tabellarisch nochmals zusammen gefasst, die Lage der Punkte in Bezug des Funktionsgrafen.

x_i	y_i	i	Lage
128	100	1	X
256	250	2	X
440	510	3	O
640	160	4	O
768	400	5	O
896	520	6	O
1 152	750	7	X
1 280	900	8	X

3.2 Beispiel II

Beispiel II
[Rol]

3.2.1 Daten

i	x_i	y_i
1	+0, 192 2	-6, 340 0
2	+0, 014 9	-7, 213 8
3	-0, 208 7	-6, 511 2
4	-0, 001 9	-6, 610 3
5	+0, 031 8	-6, 565 2
6	-0, 008 3	-6, 662 1
7	-0, 320 6	-6, 644 1
8	-0, 592 7	-7, 436 8
8	-0, 893 3	-53, 983 5

$x_i \cdot x_i$	$x_i \cdot y_i$	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$
+0, 036 941	-1, 218 548	+0, 092 333	+0, 166 413
+0, 000 222	-0, 107 486	+0, 016 018	+0, 217 027
+0, 043 556	+1, 358 889	+0, 009 416	+0, 056 045
+0, 000 004	+0, 012 560	+0, 012 048	+0, 018 944
+0, 001 011	-0, 208 773	+0, 020 582	+0, 033 393
+0, 000 069	+0, 055 295	+0, 010 684	+0, 007 368
+0, 102 784	+2, 130 098	+0, 043 655	+0, 010 782
+0, 351 293	+4, 407 791	+0, 231 397	+0, 474 531
+0, 535 880	+6, 429 826	+0, 436 133	+0, 984 503

3.2.2 Ergebnisse, numerisch

Aus den obigen Zahlen folgt:

$$a = \frac{\{x \cdot y\} \cdot n - \{x\} \cdot \{y\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{6,429826 \cdot 8 - 0,8933 \cdot 53,9835}{0,535880 \cdot 8 - 0,8933^2} = \frac{3,215147}{3,489055} = 0,922$$

$\Rightarrow$

$$b = \frac{\{x \cdot x\} \cdot \{y\} - \{x \cdot y\} \cdot \{x\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{-0,535880 \cdot 53,9835 + 6,429826 \cdot 0,8933}{0,535880 \cdot 8 - 0,8933^2} = \frac{-23,184914}{3,489055} = -6,645$$

$\Rightarrow$

$$c = -\frac{1}{a} = -\frac{3,489055}{3,215147} = -1,085$$

$\Rightarrow$

$$d = \frac{\{y\}}{n} - c \cdot \frac{\{x\}}{n} = -\frac{53,9835}{8} - 1,085 \cdot \frac{0,8933}{8} = -6,869$$

$\Rightarrow$

$$x_M = \mu_X = \frac{-0,8933}{8} = -0,112 \qquad y_M = \mu_Y = \frac{-53,9835}{8} = -6,748$$

Oder:

$$\mu_X = a \cdot \frac{d-b}{a^2+1} = -0,922 \cdot \frac{6,869 - 6,645}{0,922^2 + 1} = -0,112$$

$\Rightarrow$

$$\mu_Y = \frac{b + d \cdot a^2}{1 + a^2} = -\frac{6,645 + 6,869 \cdot 0,922^2}{1 + 0,922^2} = -6,748$$

Sowie:

$$\sigma_X^2 = \frac{\{f^2\}}{n} = \frac{\left\{(x - x_M)^2\right\}}{n} = \frac{0,436133}{8} = 0,054517$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_X \equiv f = 0,234$$

Und:

$$\sigma_Y^2 = \frac{\{e^2\}}{n} = \frac{\left\{(y - y_M)^2\right\}}{n} = \frac{0,984503}{8} = 0,123063$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_Y \equiv e = 0,351$$

Weiterhin:

$$\varphi = \arctan a = \arctan 0,922 = 42,68^\circ \equiv 0,745$$

$$\rho_{XY} = a \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} = 0,922 \cdot \frac{0,234}{0,351} = 0,922 \cdot \frac{2}{3} = 0,615$$

$$\varepsilon_L = \sqrt{|e^2 - f^2|} = \sqrt{|0,123063 - 0,054517|} = 0,262$$

$$\varepsilon_N = \sqrt{\frac{|e^2 - f^2|}{MAX\left(e^2; f^2\right)}} = \frac{0,262}{\sqrt{MAX\left(0,123063; 0,054517\right)}} = \frac{0,262}{\sqrt{0,123063}} = 0,747$$

Letztendlich:

$$A = \frac{0,123063 \cdot 0,922^2 + 0,054517}{1 + 0,922^2} = 0,086$$

$$B = 0,922 \cdot \frac{0,054517 - 0,123063}{1 + 0,922^2} = -0,034$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e \cdot f}{A} = \frac{0,351 \cdot 0,234}{0,086} = 0,955$$

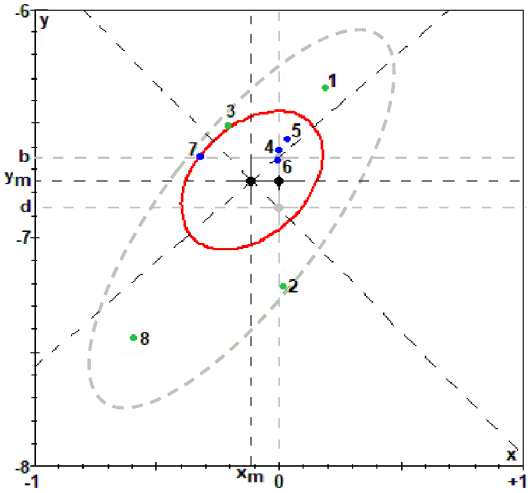
$$\frac{B}{A} = -\frac{0,034}{0,086} = 0,395$$

$\Rightarrow$

$$y^\varphi = -6,748 + 0,395 \cdot (x + 0,112) \pm 0,955 \cdot \sqrt{0,086 - (x + 0,112)^2}$$

3.2.3 Ergebnisse, grafisch

Die grafische Darstellung dazu zeigt, dass vier Punkte innerhalb und 4 außerhalb der Ellipse liegen.



Das Ergebnis der Elliptischen Regression am Beispiel.
Graue Ellipse, angegeben in [Rol]

Tabellarisch nochmals zusammen gefasst, die Lage der Punkte in Bezug des Funktionsgrafen.

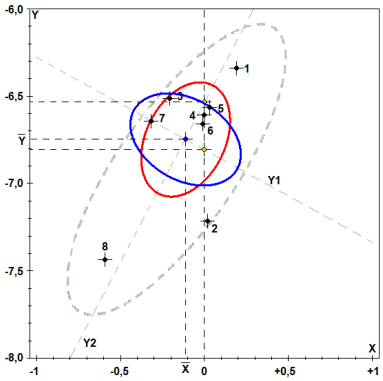
x_i	y_i	i	Lage
+0, 192 2	-6, 340 0	1	X
+0, 014 9	-7, 213 8	2	X
-0, 208 7	-6, 511 2	3	X
-0, 001 9	-6, 610 3	4	O
+0, 031 8	-6, 565 2	5	O
-0, 008 3	-6, 662 1	6	O
-0, 320 6	-6, 644 1	7	O
-0, 592 7	-7, 436 8	8	X

LaTeX 2_ε

$$\oiint$$

3.2.2 Elliptische Regression nach der Hauptkomponentenanalyse - HKA

Elliptische Regression von Datenpunkten über die Hauptkomponentenanalyse



Elliptic regression of data points using principal component analysis

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 03. September 2016 – Letzte Revision: 19. März 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Durchführung der Regression **3**

1.1 Ermittlung der Haupt- und Nebenachse . . . 3

1.2 Herleitung einer allgemeinen Berechnungsmöglichkeit . . . 6

1.3 Vereinfachung der Ellipsenfunktion - I . . . 8

1.4 Vereinfachung der Ellipsenfunktion - II . . . 9

2 Zusammenfassung **11**

2.1 Durchführung der Elliptischen Regression . . . 11

2.2 Erweiterungen vorhandener Berechnungsgrundlagen . . . 12

3 Anhang **13**

3.1 Beispiel - I . . . 13

3.2 Beispiel - II . . . 15

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

[Dipa] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten - MKQ. www.Zenithpoint.de.

[Dipb] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Reduzierte Lineare Regression - Fehlen von Anstieg oder Inhomogenität, Hinzufügen eines definierten Punktes. www.Zenithpoint.de.

[Rol] Roland Weingärtner, Leon Schiller, Alexander Kinstler, Richard Neumann, Frank Brunner, Eldad Bahat Treidel, Enrico Brusaterra, Matthias Marx, Sven Besendörfer. Impact of Dislocation Networks on Leakage Currents of GaN-on-GaN pn-Diodes: A Statistical Approach Comparing X-Ray Topography with Electrical Characteristics.

1 Durchführung der Elliptischen Regression über die Hauptkomponentenanalyse

1.1 Ermittlung der Haupt- und Nebenachse der zu regressierenden Ellipse

Gegeben sei der Datensatz aus der Elliptischen Regression mittels Bestimmung der Achsen- und Ellipsenfunktion nach der Methode der kleinsten Quadrate. [001]

Die Durchführung der Elliptischen Regression soll anhand dieses Beispiels mittels der Hauptkomponentenanalyse erfolgen. Durchführung

i	X_i	Y_i	$X_i - \bar{X}$	$Y_i - \bar{Y}$	$\left(X_i - \bar{X}\right)^2$	$\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2$	$\left(X_i - \bar{X}\right) \cdot \left(Y_i - \bar{Y}\right)$
1	128	100	-567	-349	321 489	121 801	+197 883
2	256	250	-439	-199	192 721	39 601	+87 361
3	440	510	-255	+61	65 025	3 721	-15 555
4	640	160	-55	-289	3 025	83 521	+15 895
5	768	400	+73	-49	5 329	2 401	-3 577
6	896	520	+201	+71	40 401	5 041	+14 271
7	1152	750	+457	+301	208 849	90 601	+137 557
8	1280	900	+585	+451	342 225	203 401	+263 835
Σ	5560	3590	0	0	1 179 064	550 090	+697 670

Mit:

$$\bar{X} = \frac{\{X_i\}}{n} \qquad \bar{Y} = \frac{\{Y_i\}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{X} = \frac{5560}{8} = 695 \qquad \bar{Y} = \frac{3590}{8} = 449$$

Ergeben sich folgende Varianzen und Kovarianzen:

$$V_{XX} = \left\{\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right\} \qquad V_{YY} = \left\{\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2\right\}$$

$$C = C_{XY} = C_{YX} = \left\{\left(X_i - \bar{X}\right) \cdot \left(Y_i - \bar{Y}\right)\right\}$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 1179064 \qquad C_{XY} = C_{YX} = 697670 \qquad V_{YY} = 550090$$

Im weiteren Verlauf kann auch mit den reduzierten Varianzen oder Kovarianzen gerechnet werden:

$$\tilde{V}_{XX} = \frac{1179064}{Min\left(V_{XX}; C; V_{YY}\right)} \qquad \tilde{V}_{YY} = \frac{550090}{Min\left(V_{XX}; C; V_{YY}\right)}$$

$$\tilde{C}_{XY} = C_{YX} = \frac{697670}{Min\left(V_{XX}; C; V_{YY}\right)}$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{V}_{XX} = \frac{1179064}{550090} \qquad \tilde{C}_{XY} = \tilde{C}_{YX} = \frac{697670}{550090} \qquad \tilde{V}_{YY} = \frac{550090}{550090}$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{V}_{XX} = 2,144 \qquad \tilde{C}_{XY} = \tilde{C}_{YX} = 1,268 \qquad \tilde{V}_{YY} = 1,000$$

Damit ist die Varianzenmatrix V definiert:

$$V = \begin{pmatrix} \tilde{V}_{XX} & \tilde{C} \\ \tilde{C} & \tilde{V}_{YY} \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte λ dieser Matrix werden gebraucht.

$$\begin{vmatrix} \tilde{V}_{XX} - \lambda & \tilde{C} \\ \tilde{C} & \tilde{V}_{YY} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,144 - \lambda & 1,268 \\ 1,268 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$

$$(2,144 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) - 1,268^2 = \lambda^2 - 3,144 \cdot \lambda + 0,536 = 0$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1 = 2,963 \qquad \lambda_2 = 0,181$$

Der nächste Schritt, die Eigenvektoren.

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_{XX} - \lambda & \tilde{C} \\ \tilde{C} & \tilde{V}_{YY} - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,144 - \lambda & 1,268 \\ 1,268 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$

$$(2,144 - \lambda) \cdot X + 1,268 \cdot Y = 0 \qquad (1 - \lambda) \cdot Y + 1,268 \cdot X = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y = \frac{\lambda - 0,876}{0,268 + \lambda} \cdot X$$

Für λ_1 ergibt sich somit:

$$Y_1 = +0,646 \cdot X$$

Für λ_2 ergibt sich somit:

$$Y_2 = -1,548 \cdot X$$

Die Haupt- und die Nebenachsen der Ellipse sind definiert indem die Eigenvektoren in den Mittelpunkt $P_M\left(\bar{X}, \bar{Y}\right)$ der Ellipse verschoben werden.

$$\tilde{Y}_{1;2} = Y_{1;2} - \bar{Y} = +0,646 \cdot \left(X - \bar{X}\right)$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{Y}_1 = +0,646 \cdot (X - 695) + 449 \qquad \tilde{Y}_2 = -1,548 \cdot (X - 695) + 449$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{Y}_1 = +0,646 \cdot X \qquad \tilde{Y}_2 = -1,548 \cdot X + 1525$$

Damit ist die Ermittlung der Ellipsenachsen über die Hauptkomponentenanalyse abgeschlossen. Es verbleibt die Angabe der allgemeinen Berechnungsgrundlagen.

Für die Eigenwerte:

$$2 \cdot \lambda_{1;2} = V_{XX} + V_{YY} \pm \sqrt{\left(V_{XX} - V_{YY}\right)^2 + 4 \cdot C^2}$$

Der Eigenvektoren, die unverschobenen Ellipsenachsen mit $P_M\left(0;0\right)$:

$$Y_{1;2} = \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot X$$

Die verschobenen Ellipsenachsen, also die Haupt- und Nebenachse der Ellipse für den vorliegenden Datensatz:

$$\tilde{Y}_{1;2} = \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot X + \bar{Y} - \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot \bar{X}$$

Wobei der Anstieg a und die Inhomogenität b für beide Achsen vollständig definiert sind.

$$a_{1;2} = \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \qquad b_{1;2} = \bar{Y} - \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C}$$

Die Ermittlung der Ellipsenfunktion ist bekannt aus der Methode der kleinsten Quadrate.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} + \frac{B}{A} \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

Mit:

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} \qquad B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2}$$

Wobei mit a der Anstieg der Hauptachse gefordert ist und für e sowie f gilt:

$$e^2 = \frac{\left\{\left(Y - \bar{Y}\right)^2\right\}}{n} \qquad f^2 = \frac{\left\{\left(X - \bar{X}\right)^2\right\}}{n}$$

Der Koeffizient n beinhaltet die Anzahl der Datenpaare $P_i\left(X_i; Y_i\right)$ und $\{\bullet\}$ bezeichnet die Summe des Satzes "$\bullet$".

Eingesetzt ergeben sich hier folgende Beispielswerte:

$$e^2 = \frac{550090}{8} = 68761{,}25 \qquad f^2 = \frac{1179064}{8} = 147383$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{68761,25 \cdot 0,646^2 + 147383}{1 + 0,646^2} = 124233{,}53$$

$$B = 0,646 \cdot \frac{147383 - 68761,25}{1 + 0,646^2} = 35835{,}1$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e \cdot f}{A} = \frac{\sqrt{68761,25 \cdot 147383}}{124233,53} = 0{,}8103 \qquad \frac{B}{A} = \frac{35835,1}{124233,53} = 0{,}2884$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0,2884 \cdot (X - 695) \pm 0,8103 \cdot \sqrt{124233,53 - (X - 695)^2}$$

1.2 Herleitung einer allgemeinen Berechnungsmöglichkeit der Ellipsenfunktion $Y_{1;2}^{(\varphi)}$

Herleitung

Es wird von der allgemeine Berechnungsgrundlage der um den Kippwinkel φ gekippten, unverschobenen Ellipse ausgegangen. 5

$$\frac{(X \cdot \cos\varphi + Y \cdot \sin\varphi)^2}{f^2} + \frac{(Y \cdot \cos\varphi - X \cdot \sin\varphi)^2}{e^2} = 1$$

Es wird umgestellt auf folgende Form.

$$0 = \begin{cases} +\left(e^2 \cdot \cos^2\varphi + f^2 \cdot \sin^2\varphi\right) \cdot X^2 \\ \\ +\left(e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi\right) \cdot Y^2 \\ \\ +2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \left(e^2 - f^2\right) \cdot X \cdot Y \\ \\ -e^2 \cdot f^2 \end{cases}$$

Dabei gilt:

$$\sin^2\varphi = \frac{a^2}{1+a^2} \qquad \cos^2\varphi = \frac{1}{1+a^2} \qquad \sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{a}{1+a^2}$$

Wobei mit a der Anstieg der Hauptachse gefordert ist.

Es gibt einen Zusammenhang zwischen Anstieg a_{MKQ} aus der Methode der kleinsten Quadrate und der (Ko)Varianz über die Hauptkomponentenanalyse.

$$C = a_{MKQ} \cdot \frac{V_{XX}}{V_{YY}}$$

$\Rightarrow$

$$1,268 = 0,5928 \cdot \frac{2,144}{1,000} \approx 1{,}271$$

Damit sind die (Ko)Varianz(en) und der Koeffizient Z definiert.

$$V_{XX}^{(\varphi)} = e^2 \cdot \cos^2\varphi + f^2 \cdot \sin^2\varphi \qquad V_{YY}^{(\varphi)} = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi$$

$$C^{(\varphi)} = \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \left(e^2 - f^2\right) \qquad Z = e^2 \cdot f^2$$

Mit:

$$e^2 = \frac{V_{YY}}{n} \qquad f^2 = \frac{V_{XX}}{n} \qquad Z = \frac{V_{XX} \cdot V_{YY}}{n^2}$$

Die Ellipsenfunktion $Y_{1;2}^{(\varphi)}$ lässt sich jetzt umschreiben.

$$V_{YY}^{(\varphi)} \cdot Y^2 + V_{XX}^{(\varphi)} \cdot X^2 + 2 \cdot C^{(\varphi)} \cdot X \cdot Y - Z = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y^2 + \frac{2 \cdot C^{(\varphi)} \cdot X}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot Y + \frac{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot X^2 - Z}{V_{YY}^{(\varphi)}} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = -\frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot X \pm \frac{1}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{Z \cdot V_{YY}^{(\varphi)} + \left(C^{(\varphi)^2} - V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot X^2}$$

Zum Schluss muss die Ellipse noch verschoben werden auf $P_M\left(\bar{X};\bar{Y}\right)$.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \frac{1}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{Z \cdot V_{YY}^{(\varphi)} + \left(C^{(\varphi)^2} - V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \frac{\sqrt{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{\frac{Z \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}} - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

Damit sind die speziellen Terme aus der Methode der kleinsten Quadrate auch für die Hauptkomponentenanalyse definiert.

$$\frac{B}{A} = -\frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \qquad \frac{f \cdot e}{A} = \frac{\sqrt{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \qquad A = \frac{Z \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}}$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{V_{YY}^{(\varphi)}}{n^2} \cdot \frac{V_{XX} \cdot V_{YY}}{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}} \qquad B = \frac{C^{(\varphi)}}{n^2} \cdot \frac{V_{XX} \cdot V_{YY}}{C^{(\varphi)^2} - V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}$$

$$f \cdot e = \frac{V_{XX} \cdot V_{YY}}{n^2 \cdot \sqrt{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}}}$$

Die Beispielswerte eingesetzt.

$$\sin^2 \varphi = \frac{0,646^2}{1 + 0,646^2} = 0{,}294 \qquad \cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + 0,646^2} = 0{,}706$$

$$\sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{0,646}{1 + 0,646^2} = 0{,}456$$

Mit:

$$e^2 = \frac{550090}{8} = 68761{,}25 \qquad f^2 = \frac{1179064}{8} = 147383$$

$$Z = \frac{1179064 \cdot 550090}{8^2} = 10134239308{,}75$$

Mit:

$$V_{XX}^{(\varphi)} = 68761{,}25 \cdot 0{,}706 + 147383 \cdot 0{,}294 \qquad V_{YY}^{(\varphi)} = 68761{,}25 \cdot 0{,}294 + 147383 \cdot 0{,}706$$

$$C^{(\varphi)} = 0{,}456 \cdot (68761{,}25 - 147383) \qquad Z = 68761{,}25 \cdot 147383$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\varphi)} = 91876{,}04 \qquad V_{YY}^{(\varphi)} = 124268{,}21$$

$$C^{(\varphi)} = -35851{,}52 \qquad Z = 10134239308{,}75$$

Damit ist die Ellipsenfunktion ermittelt.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \begin{cases} +449 + \frac{35851{,}52}{124268{,}21} \cdot (X - 695) \\ \\ \pm \frac{1}{124268{,}21} \cdot \sqrt{\begin{cases} +10134239308{,}75 \cdot 124268{,}21 \\ \\ + \left(35851{,}52^2 - 91876{,}04 \cdot 124268{,}21\right) \cdot (X - 695)^2 \end{cases}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0{,}2885 \cdot (X - 695) \pm 0{,}81 \cdot \sqrt{124296{,}42 - (X - 695)^2}$$

Die Koeffizienten dazu:

$$A = \frac{124268{,}21}{8^2} \cdot \frac{1179064 \cdot 550090}{91876{,}04 \cdot 124268{,}21 - 35851{,}52^2} = 124296{,}42$$

$$B = \frac{-35851{,}52}{8^2} \cdot \frac{1179064 \cdot 550090}{35851{,}52^2 - 91876{,}04 \cdot 124268{,}21} = 35859{,}66$$

$$f \cdot e = \frac{1179064 \cdot 550090}{8^2 \cdot \sqrt{91876{,}04 \cdot 124268{,}21 - 35851{,}52^2}} = 100680{,}38$$

Sowie:

$$\frac{B}{A} = \frac{35851{,}52}{124268{,}21} = 0{,}289 \qquad \frac{f \cdot e}{A} = \frac{\sqrt{91876{,}04 \cdot 124268{,}21 - 35851{,}52^2}}{124268{,}21} = 0{,}81$$

1.3 Vereinfachung der Ellipsenfunktion $Y_{1;2}^{(\varphi)}$ - I

Vereinfachung

Eine Vereinfachungsmöglichkeit liefert der Term $V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}$ dessen Berechnungsgrundlagen bekannt ist.

$$V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2} = \begin{cases} +\left(e^2 \cdot \cos^2\varphi + f^2 \cdot \sin^2\varphi\right) \cdot \left(e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi\right) \\ -\left(\sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \left(e^2 - f^2\right)\right)^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2} = \begin{cases} +e^4 \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi \\ +f^4 \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi \\ +e^2 \cdot f^2 \cdot \sin^4\varphi \\ +e^2 \cdot f^2 \cdot \cos^4\varphi \\ -\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi \cdot \left(e^2 - f^2\right)^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2} = e^2 \cdot f^2$$

Damit kann die Ellipsenfunktion vereinfacht werden.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \frac{e \cdot f}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{\frac{Z \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{e^2 \cdot f^2} - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

Wobei sich nun die Koeffizienten ebenfalls vereinfachen.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$B = -C^{(\varphi)} \qquad A = V_{YY}^{(\varphi)} \qquad e^2 \cdot f^2 = \frac{V_{XX} \cdot V_{YY}}{n^2}$$

$\Rightarrow$

$$A = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi \qquad B = \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \left(f^2 - e^2\right)$$

Die Beispielswerte eingesetzt.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \begin{cases} +449 + \frac{35851{,}52}{124268{,}21} \cdot (X - 695) \\ \pm\frac{\sqrt{68761{,}25 \cdot 147383}}{124268{,}21} \cdot \sqrt{\frac{10134239308{,}75 \cdot 124268{,}21}{68761{,}25 \cdot 147383} - (X - 695)^2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0{,}2885 \cdot (X - 695) \pm 0{,}8101 \cdot \sqrt{124268{,}21 - (X - 695)^2}$$

1.4 Vereinfachung der Ellipsenfunktion $Y_{1;2}^{(\varphi)}$ - II

Aus Vereinfachung

$$V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2} = e^2 \cdot f^2 \qquad e^2 \cdot f^2 = \frac{V_{XX} \cdot V_{YY}}{n^2}$$

folgt:

$$n^2 \cdot \left(V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2} \right) = V_{XX} \cdot V_{YY}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B}{A} = -\frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \qquad \frac{f \cdot e}{A} = \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \qquad A = V_{YY}^{(\varphi)}$$

$\Rightarrow$

$$A = V_{YY}^{(\varphi)} \qquad B = -C^{(\varphi)}$$

Die Beispielswerte eingesetzt.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0{,}2885 \cdot (X - 695) \pm \frac{\sqrt{1179064 \cdot 550090}}{8 \cdot 124268{,}21} \cdot \sqrt{124268{,}21 - (X - 695)^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0{,}2885 \cdot (X - 695) \pm 0{,}8101 \cdot \sqrt{124296{,}42 - (X - 695)^2}$$

2 Zusammenfassung

2.1 Durchführung der Elliptischen Regression

Die Elliptische Regression lässt sich neben der Methode der kleinsten Quadrate ebenfalls über die Hauptkomponentenanalyse bewerkstelligen.

So lassen sich die **Haupt- und die Nebenachse** $\tilde{Y}_1$ oder $\tilde{Y}_2$ der regressierten Ellipse ermitteln über: Zusammenfassung

$$\tilde{Y}_{1;2}\left(X\right) = \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot X + \bar{Y} - \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot \bar{X}$$

Wobei $\lambda_{1;2}$ **Eigenwerte** darstellen, welche berechnet werden können durch:

$$2 \cdot \lambda_{1;2} = V_{XX} + V_{YY} \pm \sqrt{\left(V_{XX} - V_{YY}\right)^2 + 4 \cdot C^2}$$

Die Werte $\bar{X}$ und $\bar{Y}$ sind die Mittelwerte der Datenpaare $P_i\left(X_i; Y_i\right)$.

$$\bar{X} = \frac{\{X_i\}}{n} \qquad \bar{Y} = \frac{\{Y_i\}}{n}$$

Der Koeffizient n beinhaltet die Anzahl der Datenpaare $P_i\left(X_i; Y_i\right)$ und $\{\bullet\}$ bezeichnet die Summe des Satzes "$\bullet$".

Die Symbole V_{XX}, V_{YY} und C definieren die **Varianz**en zwischen XX und YY sowie die **Kovarianz** zwischen XY bzw. YX. Hier und nur hier können diese Werte berechnet werden durch:

$$V_{XX} = \left\{\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right\} \qquad V_{YY} = \left\{\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2\right\}$$

$$C = C_{XY} = C_{YX} = \left\{\left(X_i - \bar{X}\right) \cdot \left(Y_i - \bar{Y}\right)\right\}$$

Die **Ellipsenfunktion** $Y_{1;2}^{(\varphi)}$ der gekippten und verschobenen, regressierten Ellipse lässt sich darstellen durch:

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

Die sich geänderten (Ko)Varianzen infolge Kippen der Ellipse sind berechenbar über:

$$n \cdot V_{YY}^{(\varphi)} = \frac{V_{YY} \cdot a^2 + V_{XX}}{1 + a^2} \qquad n \cdot C^{(\varphi)} = \frac{a \cdot \left(V_{YY} - V_{XX}\right)}{1 + a^2}$$

Wobei a der Anstieg der Hauptachse der Ellipse ist.

$$a = \frac{V_{YY} - \lambda}{C}$$

Die trigonometrische Darstellungen von $V_{YY}^{(\varphi)}$ und $C^{(\varphi)}$ sind unter Umständen günstiger zu handhaben.

$$V_{YY}^{(\varphi)} = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi \qquad C^{(\varphi)} = \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \left(e^2 - f^2\right)$$

Mit:

$$\sin^2\varphi = \frac{a^2}{1 + a^2} \qquad \cos^2\varphi = \frac{1}{1 + a^2} \qquad \sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{a}{1 + a^2}$$

Und:

$$e^2 = \frac{V_{YY}}{n} \qquad f^2 = \frac{V_{XX}}{n}$$

2.2 Erweiterungen vorhandener Berechnungsgrundlagen

Erweiterungen

Der Zusammenhang zwischen den ungedrehten und gedrehten (Ko)Varianzen ist bekannt.

$$n^2 \cdot \left(V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2} \right) = V_{XX} \cdot V_{YY}$$

Bedingt durch die hier genutzte Methode ist für eine Achse der Ellipse die Inhomogenität $b = 0$, so dass für den Eigenwert dieser Achse gilt:

$$\lambda^{(b=0)} = V_{YY} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \cdot C$$

Weiterhin ist für die Eigenwerte λ_1 und λ_2 ein Zusammenhang bekannt zu den Varianzen.

$$\lambda_1 + \lambda_2 = V_{XX} + V_{YY}$$

Damit dann:

$$\lambda^{(b\neq 0)} = V_{XX} + \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \cdot C$$

Die Berechnungsgrundlage der Haupt- und der Nebenachse der Ellipse verändert sich dahingehend ebenfalls.

$$\tilde{Y}^{(b=0)} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \cdot X \qquad \tilde{Y}^{(b\neq 0)} = \left(\frac{V_{YY} - V_{XX}}{C} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \right) \cdot X + \frac{V_{XX} - V_{YY}}{C} \cdot \bar{X} + 2 \cdot \bar{Y}$$

Zwei für [Dipb] fundamentale Zusammenhänge zwischen den Anstiegen der Haupt- und Nebenachse, den Varianzen, der Kovarianz und der Mittelwerte von X und Y sind damit gefunden. Mit

$$a = -\frac{1}{c}$$

und obig gefundenen Berechnungsgrundlagen für $\tilde{Y}^{(b=0)}$ und $\tilde{Y}^{(b\neq 0)}$ ergibt sich:

$$\frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} = \frac{\{y\}}{\{x\}} \qquad \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} = -\frac{\{x\}}{\{y\}}$$

Wobei es von den Vorzeichenkonventionen der Eigenwerte abhängt, welcher Eigenwert zuständig ist. Für vorliegenden Fall:

$$\frac{V_{YY} - \lambda_2}{C} = \frac{\{y\}}{\{x\}} = a \qquad \frac{V_{YY} - \lambda_1}{C} = -\frac{\{x\}}{\{y\}} = c$$

3 Anhang

3.1 Beispiel - I

Beispiel - I

i	X_i	Y_i	$X_i - \bar{X}$	$Y_i - \bar{Y}$	$\left(X_i - \bar{X}\right)^2$	$\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2$	$\left(X_i - \bar{X}\right) \cdot \left(Y_i - \bar{Y}\right)$
1	128	100	-567	-349	321 489	121 801	+197 883
2	256	250	-439	-199	192 721	39 601	+87 361
3	440	510	-255	+61	65 025	3 721	-15 555
4	640	160	-55	-289	3 025	83 521	+15 895
5	768	400	+73	-49	5 329	2 401	-3 577
6	896	520	+201	+71	40 401	5 041	+14 271
7	1152	750	+457	+301	208 849	90 601	+137 557
8	1280	900	+585	+451	342 225	203 401	+263 835
Σ	5560	3590	0	0	1 179 064	550 090	+697 670

$\Rightarrow$

$$\bar{X} = 695 \qquad \bar{Y} = 449$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 1179064 \qquad C_{XY} = C_{YX} = 697670 \qquad V_{YY} = 550090$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{V}_{XX} = 2,144 \qquad \tilde{C}_{XY} = \tilde{C}_{YX} = 1,268 \qquad \tilde{V}_{YY} = 1,000$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1 = 2,963 \qquad \lambda_2 = 0,181$$

$\Rightarrow$

$$Y_1 = +0,646 \cdot X \qquad Y_2 = -1,548 \cdot X$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{Y}_1 = +0,646 \cdot X \qquad \tilde{Y}_2 = -1,548 \cdot X + 1525$$

$\Rightarrow$

$$e^2 = 68761{,}25 \qquad f^2 = 147383$$

$\Rightarrow$

$$A = 124233{,}53 \qquad B = 35835{,}1$$

$\Rightarrow$

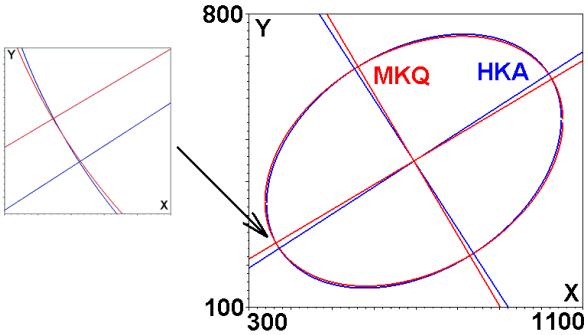
$$\frac{e \cdot f}{A} = 0{,}8103 \qquad \frac{B}{A} = 0{,}2884$$

$\Rightarrow$

$$\sin^2 \varphi = 0{,}294 \qquad \cos^2 \varphi = 0{,}706 \qquad \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 0{,}456$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0,2884 \cdot (X - 695) \pm 0,8103 \cdot \sqrt{124233,53 - (X - 695)^2}$$



Grafische Darstellung der durchgeführten Regression über
die Methode der kleinsten Quadrate – **MKQ**
und über die Hauptkomponentenanalyse – **HKA**.

3.2 Beispiel - II

Beispiel - II

Beispiel entnommen aus [Rol]. Vergleiche dazu auch unter [Dipa] die dortige Berechnung.

i	X_i	Y_i	$(X_i - X_M) \cdot (Y_i - Y_M)$
1	+0, 192 2	-6, 340 0	+0, 123 957
2	+0, 014 9	-7, 213 8	-0, 058 961
3	-0, 208 7	-6, 511 2	-0, 022 972
4	-0, 001 9	-6, 610 3	+0, 015 107
5	+0, 031 8	-6, 565 2	+0, 026 216
6	-0, 008 3	-6, 662 1	+0, 008 872
7	-0, 320 6	-6, 644 1	-0, 021 696
8	-0, 592 7	-7, 436 8	+0, 331 369
8	-0, 893 3	-53, 983 5	+0, 401 892

$X_i \cdot X_i$	$X_i \cdot Y_i$	$(X_i - X_M)^2$	$(Y_i - Y_M)^2$
+0, 036 941	-1, 218 548	+0, 092 333	+0, 166 413
+0, 000 222	-0, 107 486	+0, 016 018	+0, 217 027
+0, 043 556	+1, 358 889	+0, 009 416	+0, 056 045
+0, 000 004	+0, 012 560	+0, 012 048	+0, 018 944
+0, 001 011	-0, 208 773	+0, 020 582	+0, 033 393
+0, 000 069	+0, 055 295	+0, 010 684	+0, 007 368
+0, 102 784	+2, 130 098	+0, 043 655	+0, 010 782
+0, 351 293	+4, 407 791	+0, 231 397	+0, 474 531
+0, 535 880	+6, 429 826	+0, 436 133	+0, 984 503

Woraus sich folgende Werte ergeben:

$$\bar{X} = \frac{\{X_i\}}{n} = -\frac{0,8933}{8} = -0,112 \qquad \bar{Y} = \frac{\{Y_i\}}{n} = -\frac{53,9835}{8} = -6,748$$

$$\begin{aligned} V_{XX} &= +0,436133 \\ C = C_{XY} = C_{YX} &= +0,401892 \\ V_{YY} &= +0,984503 \end{aligned}$$

$$e^2 = \frac{V_{YY}}{8} = \frac{0,984503}{8} = 0,123$$

$\Rightarrow$

$$e = 0,351$$

Und:

$$f^2 = \frac{V_{XX}}{8} = \frac{0,436133}{8} = 0,055$$

$\Rightarrow$

$$f = 0,233$$

$$\rho_{XY} = C \cdot \frac{V_{YY}}{V_{XX}} \cdot \frac{f}{e} = C \cdot \sqrt{\frac{V_{YY}}{V_{XX}}} = 0,401892 \cdot \sqrt{\frac{0,984503}{0,436133}} = 0,604$$

$$2 \cdot \lambda_{1;2} = V_{XX} + V_{YY} \pm \sqrt{(V_{XX} - V_{YY})^2 + 4 \cdot C^2}$$

$\Rightarrow$

$$2 \cdot \lambda_{1;2} = 0,436133 + 0,984503 \pm \sqrt{(0,436133 - 0,984503)^2 + 4 \cdot 0,401892^2}$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1 = 1,197 \qquad \lambda_2 = 0,224$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,421 = V_{XX} + V_{YY}$$

$$\frac{V_{YY} - \lambda_1}{C} = \frac{0,984503 - 1,197}{0,401892} = -0,529$$

Und:

$$\frac{V_{YY} - \lambda_2}{C} = \frac{0,984503 - 0,224}{0,401892} = +1,892$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{YY} - \lambda_1}{C} \cdot \frac{V_{YY} - \lambda_2}{C} = -1 = -0,529 \cdot 1.892$$

$$Y_{1;2}(X) = \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot X + \bar{Y} - \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot \bar{X}$$

$\Rightarrow$

$$Y_1(X) = -0,529 \cdot X - 6,807$$
$$Y_2(X) = +1,892 \cdot X - 6,536$$

• Fall $a = +1,892$

$$\sin^2\varphi = \frac{a^2}{1+a^2} = \frac{1,892^2}{1+1,892^2} = 0,782$$
$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+a^2} = \frac{1}{1+1,892^2} = 0,218$$
$$\sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{a}{1+a^2} = \frac{1,892}{1+1,892^2} = 0,413$$

$\Rightarrow$

$$V_{YY}^{(\varphi)} = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi \qquad C^{(\varphi)} = \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \left(e^2 - f^2\right)$$
$$V_{YY}^{(\varphi)} = 0,123 \cdot 0,782 + 0,055 \cdot 0,218 \qquad C^{(\varphi)} = 0,413 \cdot (0,123 - 0,055)$$
$$V_{YY}^{(\varphi)} = 0,108 \qquad C^{(\varphi)} = 0,028$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$
$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = -6,748 - \frac{0,028}{0,108} \cdot (X + 0,112) \pm \frac{\sqrt{0,436133 \cdot 0,984503}}{8 \cdot 0,108} \cdot \sqrt{0,108 - (X + 0,112)^2}$$
$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = -6,748 - 0,259 \cdot (X + 0,112) \pm 0,759 \cdot \sqrt{0,108 - (X + 0,112)^2}$$

• Fall $a = -0,529$

$$\sin^2\varphi = \frac{a^2}{1+a^2} = \frac{0,529^2}{1+0,529^2} = 0,218$$
$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+a^2} = \frac{1}{1+0,529^2} = 0,782$$
$$\sin\varphi\cdot\cos\varphi = \frac{a}{1+a^2} = \frac{-0,529}{1+0,529^2} = -0,413$$

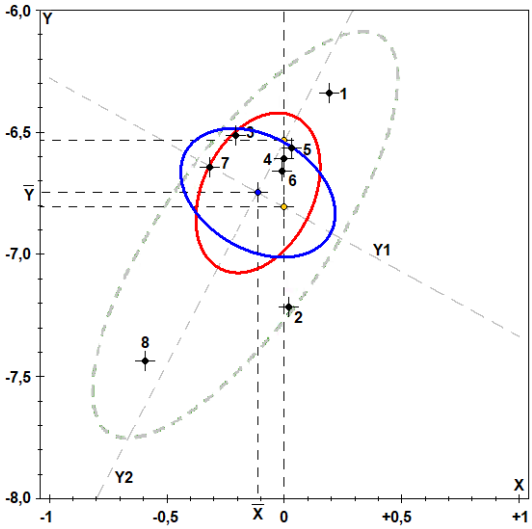
$\Rightarrow$

$$V_{YY}^{(\varphi)} = e^2\cdot\sin^2\varphi + f^2\cdot\cos^2\varphi \qquad C^{(\varphi)} = \sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\left(e^2-f^2\right)$$
$$V_{YY}^{(\varphi)} = 0,123\cdot 0,218 + 0,055\cdot 0,782 \qquad C^{(\varphi)} = -0,413\cdot(0,123-0,055)$$
$$V_{YY}^{(\varphi)} = 0,070 \qquad C^{(\varphi)} = -0,028$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}}\cdot\left(X-\bar{X}\right) \pm \frac{\sqrt{V_{XX}\cdot V_{YY}}}{n\cdot V_{YY}^{(\varphi)}}\cdot\sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - \left(X-\bar{X}\right)^2}$$
$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = -6,748 + \frac{0,028}{0,070}\cdot(X+0,112) \pm \frac{\sqrt{0,436133\cdot 0,984503}}{8\cdot 0,070}\cdot\sqrt{0,070-(X+0,112)^2}$$
$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = -6,748 + 0,4\cdot(X+0,112) \pm 1,17\cdot\sqrt{0,07-(X+0,112)^2}$$

In grafischer Darstellung:



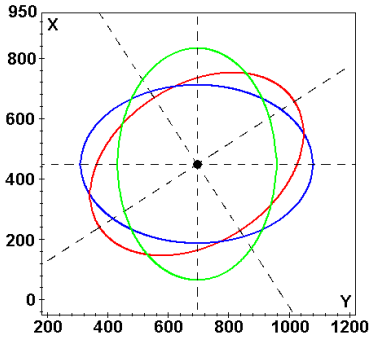
Das Ergebnis der Elliptischen Regression am Beispiel.
Graue Ellipse, angegeben in [Rol]

LaTeX 2_ε

$$\oiint$$

3.2.3 Elliptische Regression nach der Singulärwertzerlegung - SIG - achsparallele Ellipsen

Ermittlung der abszissen- und ordinatenparallelen Ellipse über die Singulärwertzerlegung



Determination of the abscissa and ordinate parallel ellipse via singular value decomposition

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 07. Oktober 2016 – Letzte Revision: 20. März 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Durchführung der Regression **3**
1.1 Einleitung zur Singulärwertzerlegung 3
1.2 Herleitung der Singulärwertzerlegung 5
1.3 Durchführung der Singulärwertzerlegung 7

2 Zusammenfassung **11**
2.1 Zusammenfassung der Singulärwertzerlegung - I 11
2.2 Erweiterungen der Berechnungsgrundlagen 12
2.3 Zusammenfassung der Singulärwertzerlegung - II 14

3 Beispiel **15**
3.1 Beispiel - I 15
3.2 Beispiel - II 17

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

[Dip] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten über die Hauptkomponentenanalyse. www.Zenithpoint.de.

[Rol] Roland Weingärtner, Leon Schiller, Alexander Kinstler, Richard Neumann, Frank Brunner, Eldad Bahat Treidel, Enrico Brusaterra, Matthias Marx, Sven Besendörfer. Impact of Dislocation Networks on Leakage Currents of GaN-on-GaN pn-Diodes: A Statistical Approach Comparing X-Ray Topography with Electrical Characteristics.

1 Durchführung der Regression

1.1 Einleitung zur Singulärwertzerlegung

Ziel ist es, aus der allgemeinen Berechnungsgrundlage der verschobenen und gedrehten Ellipse die (Ko)Varianzen der ungedrehten Ellipse zu ermitteln. [001]

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

Im übertragenen Sinne, die Elliptische Regression rückgängig machen, wobei in obiger Ellipsenfunktion die Varianz $V_{XX}^{(\varphi)}$ nicht explizit vorkommt. Einleitung

Gleichzeitig können die Funktionsgleichungen der verschobenen abszissen- und ordinatenparallelen Ellipsen ermittelt werden.

$$Y_{1;2}^{(\varphi=0^\circ)} = \bar{Y} \pm \sqrt{V_{YY}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - \bar{X}\right)^2}{V_{XX}}}$$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=90^\circ)} = \bar{Y} \pm \sqrt{V_{XX}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - \bar{X}\right)^2}{V_{YY}}}$$

Grundlage ist die Singulärwertzerlegung.

Die Gleichungen zur Ermittlung der gedrehten (Ko)Varianzen $V_{XX}^{(\varphi)}, V_{YY}^{(\varphi)}$ und $C^{(\varphi)}$ sind bekannt.

$$\begin{aligned}
V_{XX}^{(\varphi)} &= \frac{V_{YY}}{n} \cdot \cos^2\varphi + \frac{V_{XX}}{n} \cdot \sin^2\varphi \\
V_{YY}^{(\varphi)} &= \frac{V_{YY}}{n} \cdot \sin^2\varphi + \frac{V_{XX}}{n} \cdot \cos^2\varphi \\
C^{(\varphi)} &= \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \left(\frac{V_{YY}}{n} - \frac{V_{XX}}{n}\right)
\end{aligned}$$

Unbekannt sind der Drehwinkel φ der Ellipse, sowie die Varianzen V_{XX} und V_{YY}.

- Für einen **Einheitskreis** gilt notwendigerweise $V_{XX} = V_{YY} = 1$

$$\begin{aligned}
n \cdot V_{XX}^{(\varphi)} &= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \\
n \cdot V_{YY}^{(\varphi)} &= \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \\
n \cdot C^{(\varphi)} &= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\varphi)} = V_{YY}^{(\varphi)}$$

- Für einen **Kreis** gilt mindestens $V_{XX} = V_{YY} = V$

$$\begin{aligned}
n \cdot \frac{V_{XX}^{(\varphi)}}{V} &= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \\
n \cdot \frac{V_{YY}^{(\varphi)}}{V} &= \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1 \\
n \cdot C^{(\varphi)} &= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\varphi)} = V_{YY}^{(\varphi)}$$

- Für die **Ellipse** dann letztendlich:

$$\begin{aligned}
V_{XX}^{(\varphi)} &= \frac{V_{YY}}{n} \cdot \cos^2\varphi + \frac{V_{XX}}{n} \cdot \sin^2\varphi \\
V_{YY}^{(\varphi)} &= \frac{V_{YY}}{n} \cdot \sin^2\varphi + \frac{V_{XX}}{n} \cdot \cos^2\varphi \\
C^{(\varphi)} &= \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \left(\frac{V_{YY}}{n} - \frac{V_{XX}}{n}\right)
\end{aligned}$$

Es werden die reduzierten Varianzen eingeführt und umgestellt.

$$n \cdot \frac{V_{XX}^{(\varphi)}}{V_{YY}} = \cos^2\varphi + \frac{V_{XX}}{V_{YY}} \cdot \sin^2\varphi \qquad n \cdot \frac{V_{YY}^{(\varphi)}}{V_{YY}} = \sin^2\varphi + \frac{V_{XX}}{V_{YY}} \cdot \cos^2\varphi$$

$\Rightarrow$

$$n \cdot \frac{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY} - V_{YY}^{(\varphi)} \cdot V_{XX}}{V_{YY}^2 - V_{XX}^2} = \cos^2\varphi \qquad n \cdot \frac{V_{YY}^{(\varphi)} \cdot V_{YY} - V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{XX}}{V_{YY}^2 - V_{XX}^2} = \sin^2\varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX} \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - V_{YY} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{V_{XX} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - V_{YY} \cdot V_{XX}^{(\varphi)}} = \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \tan^2\varphi$$

Im Anstieg der Ellipse steckt nicht n, die Anzahl der Datenpaare der Urliste, jedoch in der Größe der Ellipse, bzw. in den (Ko)Varianzen.

• Die **Summe der gedrehten Kovarianzen** ist interessant.

$$V_{XX}^{(\varphi)} = \frac{V_{YY}}{n} \cdot \cos^2\varphi + \frac{V_{XX}}{n} \cdot \sin^2\varphi \qquad V_{YY}^{(\varphi)} = \frac{V_{YY}}{n} \cdot \sin^2\varphi + \frac{V_{XX}}{n} \cdot \cos^2\varphi$$

$\Rightarrow$

$$n = \frac{V_{XX} + V_{YY}}{V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)}}$$

• Die **Differenz der gedrehten Kovarianzen** ist interessant.

$$V_{XX}^{(\varphi)} = \frac{V_{YY}}{n} \cdot \cos^2\varphi + \frac{V_{XX}}{n} \cdot \sin^2\varphi \qquad V_{YY}^{(\varphi)} = \frac{V_{YY}}{n} \cdot \sin^2\varphi + \frac{V_{XX}}{n} \cdot \cos^2\varphi$$

$\Rightarrow$

$$n = \frac{V_{XX} - V_{YY}}{V_{XX}^{(\varphi)} - V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right)$$

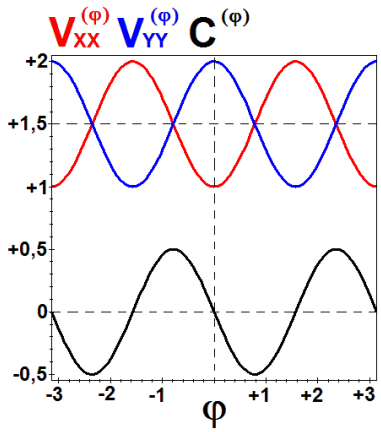
• **Differenz und Summe der gedrehten Kovarianzen** gleichgesetzt.

$$\frac{V_{XX} + V_{YY}}{V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)}} = \frac{V_{XX} - V_{YY}}{V_{XX}^{(\varphi)} - V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \left(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi\right)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX} + V_{YY}}{V_{XX} - V_{YY}} \cdot \frac{V_{XX}^{(\varphi)} - V_{YY}^{(\varphi)}}{V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)}} = \sin^2\varphi - \cos^2\varphi$$

Grafisch dargestellt mit $V_{XX} = 2$ und $V_{YY} = 1$.



Darstellung der gedrehten (Ko)Varianzen.

1.2 Herleitung der Singulärwertzerlegung

Gegeben sei der Datensatz aus der Elliptischen Regression mittels Bestimmung der Achsen- und Ellipsenfunktion nach der Methode der kleinsten Quadrate. Herleitung

Die Elliptische Regression wurde anhand dieses Beispiels mittels der Methode der Hauptkomponentenanalyse durchgeführt.

i	X_i	Y_i	$X_i - \bar{X}$	$Y_i - \bar{Y}$	$\left(X_i - \bar{X}\right)^2$	$\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2$	$\left(X_i - \bar{X}\right) \cdot \left(Y_i - \bar{Y}\right)$
1	128	100	-567	-349	321 489	121 801	+197 883
2	256	250	-439	-199	192 721	39 601	+87 361
3	440	510	-255	+61	65 025	3 721	-15 555
4	640	160	-55	-289	3 025	83 521	+15 895
5	768	400	+73	-49	5 329	2 401	-3 577
6	896	520	+201	+71	40 401	5 041	+14 271
7	1152	750	+457	+301	208 849	90 601	+137 557
8	1280	900	+585	+451	342 225	203 401	+263 835
Σ	5560	3590	0	0	1 179 064	550 090	+697 670

Mit:

$$\bar{X} = \frac{5560}{8} = 695 \qquad \bar{Y} = \frac{3590}{8} = 449$$

Ergeben sich folgende Varianzen und Kovarianzen:

$$V_{XX} = \frac{1179064}{2-1} \qquad C_{XY} = C_{YX} = \frac{697670}{2-1} \qquad V_{YY} = \frac{550090}{2-1}$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 1179064 \qquad C_{XY} = C_{YX} = 697670 \qquad V_{YY} = 550090$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX}}{n} = \frac{1179064}{8} = 147383$$
$$\frac{C}{n} = \frac{697670}{8} = 87208,75$$
$$\frac{V_{YY}}{n} = \frac{550090}{8} = 68761,25$$

Im weiteren Verlauf wird auch mit den reduzierten Varianzen oder Kovarianzen gerechnet:

$$\tilde{V}_{XX} = \frac{1179064}{\text{Min}\left(V_{XX}; C; V_{YY}\right)}$$
$$\tilde{C}_{XY} = C_{YX} = \frac{697670}{\text{Min}\left(V_{XX}; C; V_{YY}\right)}$$
$$\tilde{V}_{YY} = \frac{550090}{\text{Min}\left(V_{XX}; C; V_{YY}\right)}$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{V}_{XX} = \frac{1179064}{550090} \qquad \tilde{C}_{XY} = \tilde{C}_{YX} = \frac{697670}{550090} \qquad \tilde{V}_{YY} = \frac{550090}{550090}$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{V}_{XX} = 2,144 \qquad \tilde{C}_{XY} = \tilde{C}_{YX} = 1,268 \qquad \tilde{V}_{YY} = 1,000$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\tilde{V}_{XX}}{\tilde{V}_{YY}} = 2,144 \qquad \frac{\tilde{V}_{YY}}{\tilde{V}_{XX}} = 0,466$$

Damit ist die Varianzenmatrix definiert:

$$V^{(\varphi)} = \begin{pmatrix} V_{XX}^{(\varphi)} & C^{(\varphi)} \\ C^{(\varphi)} & V_{YY}^{(\varphi)} \end{pmatrix}$$

Aus dieser kann die Ellipsenfunktion (gedreht, unverschoben) ermittelt werden.

$$V_{XX}^{(\varphi)} \cdot X^2 + V_{YY}^{(\varphi)} \cdot Y^2 + 2 \cdot C^{(\varphi)} \cdot X \cdot Y - \frac{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{n^2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0,2885 \cdot (X - 695) \pm 0,8101 \cdot \sqrt{124296{,}42 - (X - 695)^2}$$

Sowie deren Ellipsenachsen.

$$\tilde{Y}_1 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \cdot X \qquad \tilde{Y}_2 = -\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \cdot X + \frac{\bar{X}^2}{\bar{Y}} + \bar{Y}$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{Y}_1 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \cdot X \qquad \tilde{Y}_2 = \left(\frac{V_{YY} - V_{XX}}{C} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\right) \cdot X + \frac{V_{XX} - V_{YY}}{C} \cdot \bar{X} + 2 \cdot \bar{Y}$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{Y}_1 = +0,646 \cdot X \qquad \tilde{Y}_2 = -1,548 \cdot X + 1525$$

Die Ermittlung der Berechnungsgrundlagen für die gedrehten (Ko)Varianzen $V_{XX}^{(\varphi)}, V_{YY}^{(\varphi)}$ und $C^{(\varphi)}$ sind aus „Elliptische Regression über die Hauptkomponentenanalyse“ zu entnehmen.

Im weiteren Verlauf soll die Varianzenmatrix so manipuliert werden, dass die achsenparallelen Ellipsen ebenfalls ermittelbar sind. Werkzeug soll dafür die Singulärwertzerlegung sein.

1.3 Durchführung der Singulärwertzerlegung

Gegeben ist die Varianzenmatrix $V^{(\varphi)}$ einer gedrehten aber unverschobenen Ellipse. Durchführung

$$V^{(\varphi)} = \begin{pmatrix} V_{XX}^{(\varphi)} & C^{(\varphi)} \\ C^{(\varphi)} & V_{YY}^{(\varphi)} \end{pmatrix}$$

Zusätzlich ist der allgemeine Aufbau einer Drehmatrix D bekannt.

$$D = \begin{pmatrix} A & +B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

Die exakten Werte für A und B seinen vorerst unbekannt und sollen im Rahmen der Singulärwertzerlegung ermittelt werden.

Die Matrix V soll eine ungedrehte, unverschobene, das bedeutet zwei achsenparallele Ellipsen beschreiben, welche zu $Y_{1;2}^{(\varphi)}$ äquivalent sind. Die Rückdrehung erfolgt dann über:

$$V = D^T \cdot V^{(\varphi)} \cdot D$$

$\Rightarrow$

$$V = \begin{pmatrix} +\left(A \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - B \cdot C^{(\varphi)}\right) \cdot A & +\left(A \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - B \cdot C^{(\varphi)}\right) \cdot B \\ -\left(A \cdot C^{(\varphi)} - B \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot B & +\left(A \cdot C^{(\varphi)} - B \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot A \\ \\ +\left(B \cdot V_{XX}^{(\varphi)} + A \cdot C^{(\varphi)}\right) \cdot A & +\left(B \cdot V_{XX}^{(\varphi)} + A \cdot C^{(\varphi)}\right) \cdot B \\ -\left(B \cdot C^{(\varphi)} + A \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot B & +\left(B \cdot C^{(\varphi)} + A \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot A \end{pmatrix}$$

Die Singulärwertzerlegung ist dann durchgeführt und damit die Werte für V bekannt, wenn die Matrizenwerte der Nebendiagonalen von V Null sind.

$$\left(B \cdot V_{XX}^{(\varphi)} + A \cdot C^{(\varphi)}\right) \cdot A - \left(B \cdot C^{(\varphi)} + A \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot B = 0$$
$$\left(A \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - B \cdot C^{(\varphi)}\right) \cdot B + \left(A \cdot C^{(\varphi)} - B \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot A = 0$$

$\Rightarrow$

$$A^2 + A \cdot \frac{B \cdot \left(V_{XX}^{(\varphi)} - V_{YY}^{(\varphi)}\right)}{2 \cdot C^{(\varphi)}} - B^2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$2 \cdot \frac{C^{(\varphi)}}{B} \cdot A_{1;2} = V_{YY}^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)} \pm \sqrt{\left(V_{YY}^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 + 4 \cdot C^{(\varphi)2}}$$

Die Berechnungsgrundlage der Eigenwerte der gekippten Ellipse ist bekannt.

$$2 \cdot \lambda_{1;2}^{(\varphi)} = V_{YY}^{(\varphi)} + V_{XX}^{(\varphi)} \pm \sqrt{\left(V_{YY}^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 + 4 \cdot C^{(\varphi)2}}$$

Damit kann der Wurzelwert substituiert werden.

$$2 \cdot \frac{C^{(\varphi)}}{B} \cdot A_{1;2} + V_{XX}^{(\varphi)} = 2 \cdot \lambda_{1;2}^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}$$

$\Rightarrow$

$$A_{1;2} = \frac{\lambda_{1;2}^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}}{C^{(\varphi)}} \cdot B$$

Die triviale Lösung dieses Ausdrucks hilft, obige Bedingung der Nebendiagonale für V zu erfüllen.

$$B = C^{(\varphi)}$$

$\Rightarrow$

$$A = \lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}$$

$\Rightarrow$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)} & +C^{(\varphi)} \\ -C^{(\varphi)} & \lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$V = \begin{pmatrix} \begin{array}{l} +\left(\left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)2}\right) \cdot \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) \\ -\left(\left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) \cdot C^{(\varphi)} - C^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot C^{(\varphi)} \\ \\ +\left(C^{(\varphi)} \cdot V_{XX}^{(\varphi)} + \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) \cdot C^{(\varphi)}\right) \cdot \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) \\ -\left(C^{(\varphi)2} + \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot C^{(\varphi)} \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} +\left(\left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)2}\right) \cdot C^{(\varphi)} \\ +\left(\left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) \cdot C^{(\varphi)} - C^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) \\ \\ +\left(C^{(\varphi)} \cdot V_{XX}^{(\varphi)} + \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) \cdot C^{(\varphi)}\right) \cdot C^{(\varphi)} \\ +\left(C^{(\varphi)2} + \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) \end{array} \end{pmatrix}$$

Die Nebendiagonale ist tatsächlich dann Null, wenn

$$\left(C^{(\varphi)} \cdot V_{XX}^{(\varphi)} + \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) \cdot C^{(\varphi)}\right) \cdot \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) - \left(C^{(\varphi)2} + \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot C^{(\varphi)} = 0$$
$$\left(\left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)2}\right) \cdot C^{(\varphi)} + \left(\left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) \cdot C^{(\varphi)} - C^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\lambda^{(\varphi)2} - \lambda^{(\varphi)} \cdot \left(V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)}\right) + V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$2 \cdot \lambda_{1;2}^{(\varphi)} = V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)} \pm \sqrt{\left(V_{XX}^{(\varphi)} - V_{YY}^{(\varphi)}\right)^2 + 4 \cdot C^{(\varphi)2}}$$

der Wert von $\lambda^{(\varphi)}$ einen Eigenwert der Matrix $V^{(\varphi)}$ annimmt.

Damit sind die Elemente Z_{11} und Z_{22} der Hauptdiagonale bestimmt.

$$Z_{11} = \left(\left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)2}\right) \cdot \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) - \left(\left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) \cdot C^{(\varphi)} - C^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot C^{(\varphi)}$$
$$Z_{22} = \left(C^{(\varphi)} \cdot V_{XX}^{(\varphi)} + \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) \cdot C^{(\varphi)}\right) \cdot C^{(\varphi)} + \left(C^{(\varphi)2} + \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)$$

$\Rightarrow$

$$Z_{11} = \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - 2 \cdot C^{(\varphi)2} \cdot \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) + C^{(\varphi)2} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}$$
$$Z_{22} = \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)} + 2 \cdot C^{(\varphi)2} \cdot \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) + C^{(\varphi)2} \cdot V_{XX}^{(\varphi)}$$

$\Rightarrow$

$$Z_{11} + Z_{22} = \left(\left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 + C^{(\varphi)2}\right) \cdot \left(V_{YY}^{(\varphi)} + V_{XX}^{(\varphi)}\right)$$

$\Rightarrow$

$$S = \frac{Z_{11} + Z_{22}}{V_{YY}^{(\varphi)} + V_{XX}^{(\varphi)}} = \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 + C^{(\varphi)2}$$

$\Rightarrow$

$$S_1 = \left(\lambda_1^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 + C^{(\varphi)2} \qquad S_2 = \left(\lambda_2^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 + C^{(\varphi)2}$$

Damit sind zwei Singulärwerte S bekannt. Die (Rück)Drehung der Ellipse ist beendet. Es existieren nun die Berechnungsgrundlagen für zwei achsenparallele Ellipsen.

Die Umkehrung der Berechnung von S ergibt für die Matrix V.

$$\lambda_1^{(\varphi)} + \lambda_2^{(\varphi)} = V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)} = \frac{Z_{11}}{S} + \frac{Z_{22}}{S}$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = V_{XX} + V_{YY} = \frac{Z_{11}}{S} + \frac{Z_{22}}{S}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} V_{XX} & 0 \\ 0 & V_{YY} \end{pmatrix} = \frac{1}{S} \cdot \begin{pmatrix} Z_{11} & 0 \\ 0 & Z_{22} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX} = \frac{Z_{11}}{S} \qquad V_{YY} = \frac{Z_{22}}{S}$$

Die Kovarianz C zeigt, dass dies auch der Fall ist, verantwortlich für die Drehung einer Ellipse. C ist bei einer achsenparallelen Ellipse gleich Null. Daher auch die Forderung, dass die Nebendiagonale von V Null sein muss. Eine Berechnungsgrundlage aus anderen Methoden zeigt dies deutlich mit dem Drehwinkel φ der Ellipse.

$$C^{(\varphi)} = \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \left(e^2 - f^2\right)$$

$\Rightarrow$

$$C^{(\varphi=0^\circ)} = 0 \qquad C^{(\varphi=90^\circ)} = 0$$

Das gilt natürlich auch für die Matrix V.

$$V_{C=0} = \frac{1}{S} \cdot \begin{pmatrix} \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 \cdot V_{XX}^{(\varphi)} & 0 \\ 0 & \left(\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{XX} & 0 \\ 0 & V_{YY} \end{pmatrix}$$

Somit ist die Singulärwertzerlegung beendet.

$$\frac{V_{XX}}{n} = \frac{\left(\lambda - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - 2 \cdot C^{(\varphi)2} \cdot \left(\lambda - V_{XX}^{(\varphi)}\right) + C^{(\varphi)2} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{\left(\lambda - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 + C^{(\varphi)2}}$$

$$\frac{V_{YY}}{n} = \frac{\left(\lambda - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)} + 2 \cdot C^{(\varphi)2} \cdot \left(\lambda - V_{XX}^{(\varphi)}\right) + C^{(\varphi)2} \cdot V_{XX}^{(\varphi)}}{\left(\lambda - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 + C^{(\varphi)2}}$$

Und:

$$C = 0$$

Für obiges Beispiel sind folgende ungedrehte (Ko)Varianzen V_{XX} und V_{YY} ermittelt.

Grundlage sind folgende gedrehte (Ko)Varianzen.

$$V_{XX}^{(\varphi)} = 91876,04 \qquad C^{(\varphi)} = -35851,52 \qquad V_{YY}^{(\varphi)} = 124268,21$$

- $\lambda_1^{(\varphi)} = 147412,24$

$$S_1 = 4369601006$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{\left(\lambda_1^{(\varphi)}\right)} = n \cdot 68732 = 549856 \qquad V_{YY}^{\left(\lambda_1^{(\varphi)}\right)} = n \cdot 147412,24 = 1179298$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX}^{\left(\lambda_1^{(\varphi)}\right)}}{V_{YY}^{\left(\lambda_1^{(\varphi)}\right)}} = \frac{68732}{147412{,}24} = 0,466$$

- $\lambda_2^{(\varphi)} = 68732$

$$S_2 = 1820977613$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{\left(\lambda_2^{(\varphi)}\right)} = n \cdot 147412,24 = 1179298 \qquad V_{YY}^{\left(\lambda_2^{(\varphi)}\right)} = n \cdot 68732 = 549856$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX}^{\left(\lambda_2^{(\varphi)}\right)}}{V_{YY}^{\left(\lambda_2^{(\varphi)}\right)}} = \frac{147412{,}24}{68732} = 2,144$$

Die Ellipsenfunktion ist berechenbar.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

Mit:

$$\rho_{XY} = \frac{87243,76}{\sqrt{10134383851{,}4}} = 0,867$$

$\Rightarrow$

$$V_{YY}^{(\varphi=0^\circ)} = f^2 = \frac{V_{XX}}{n}$$
$$V_{YY}^{(\varphi=90^\circ)} = e^2 = \frac{V_{YY}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=0^\circ)} = \bar{Y} \pm \sqrt{V_{YY}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - \bar{X}\right)^2}{V_{XX}}} = 449 \pm 0,6828 \cdot \sqrt{147412 - (X - 695)^2}$$
$$Y_{1;2}^{(\varphi=90^\circ)} = \bar{Y} \pm \sqrt{V_{XX}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - \bar{X}\right)^2}{V_{YY}}} = 449 \pm 1,4645 \cdot \sqrt{68732 - (X - 695)^2}$$

Der Anstieg der Hauptachse der gedrehten Ellipse:

$$\sqrt{\frac{V_{YY}^{(\varphi)} \cdot V_{YY} - V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{XX}}{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY} - V_{YY}^{(\varphi)} \cdot V_{XX}}} = \sqrt{\frac{549856 \cdot 124268 - 91876 \cdot 1179298}{549856 \cdot 91876 - 124268 \cdot 1179298}} = \tan\varphi = 0,646 \equiv 32,8^\circ$$

Der abschließende Test.

$$\frac{V_{XX}/n + V_{YY}/n}{V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)}} \stackrel{?}{=} \frac{147412 + 68732}{91876 + 124268}$$

$\Rightarrow$

$$1 \stackrel{!}{=} 1$$

2 Zusammenfassung

2.1 Zusammenfassung der Singulärwertzerlegung - I

Es sind bekannt die (Ko)Varianzen der gedrehten Ellipse ($V_{XX}^{(\varphi)}$,$V_{YY}^{(\varphi)}$ und $C^{(\varphi)}$). Dann können die Varianzen der ungedrehten Ellipse berechnet werden aus: Zusammenf. I

$$\frac{V_{XX}}{n} = \frac{\left(\lambda - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - 2 \cdot C^{(\varphi)2} \cdot \left(\lambda - V_{XX}^{(\varphi)}\right) + C^{(\varphi)2} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{\left(\lambda - V_{XX}\right)^2 + C^{(\varphi)2}}$$

$$\frac{V_{YY}}{n} = \frac{\left(\lambda - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)} + 2 \cdot C^{(\varphi)2} \cdot \left(\lambda - V_{XX}^{(\varphi)}\right) + C^{(\varphi)2} \cdot V_{XX}^{(\varphi)}}{\left(\lambda - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 + C^{(\varphi)2}}$$

Wobei λ die Eigenwerte darstellen.

$$2 \cdot \lambda_{1;2}^{(\varphi)} = V_{YY}^{(\varphi)} + V_{XX}^{(\varphi)} \pm \sqrt{\left(V_{YY}^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 + 4 \cdot C^{(\varphi)2}}$$

Damit ergeben sich vier Varianzen, jeweils zwei für die abszissenparallele und zwei für die ordinatenparallele Ellipse.

$$\frac{V_{XX}^{(\lambda_1)}}{n} \qquad \frac{V_{YY}^{(\lambda_1)}}{n} \qquad \frac{V_{XX}^{(\lambda_2)}}{n} \qquad \frac{V_{YY}^{(\lambda_2)}}{n}$$

Die Berechnungsgrundlage der originalen, gedrehten, verschobenen Ellipse.

$$V_{XX}^{(\varphi)} \cdot X^2 + V_{YY}^{(\varphi)} \cdot Y^2 + 2 \cdot C^{(\varphi)} \cdot X \cdot Y - \frac{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{n^2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{X} + \alpha \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \beta \cdot \sqrt{\gamma - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

Die Berechnungsgrundlagen der verschobenen, abszissen- bzw. ordinatenparallelen Ellipsen.

$$Y_{1;2}^{(\varphi=0°)} = \bar{Y} \pm \sqrt{V_{YY}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - \bar{X}\right)^2}{V_{XX}}}$$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=90°)} = \bar{Y} \pm \sqrt{V_{XX}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - \bar{X}\right)^2}{V_{YY}}}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=0°)} = \bar{Y} \pm \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{V_{XX}} \cdot \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=90°)} = \bar{Y} \pm \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{V_{YY}} \cdot \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

Eine Kontrollmöglichkeit ergibt über die inverse Bestimmung von n.

$$n = \frac{V_{XX} + V_{YY}}{V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)}}$$

$\Rightarrow$

$$1 = \frac{V_{XX}/n + V_{YY}/n}{V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)}}$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)} = \frac{V_{XX}}{n} + \frac{V_{YY}}{n}$$

2.2 Erweiterungen der Berechnungsgrundlagen

Berechnung fehlender Werte.

Erweiterungen

Eine Möglichkeit ist, die fehlenden Werte aus der bekannten Ellipsengleichung zu extrahieren.

• **Ermittlung des Wertes von** $V_{XX}^{(\varphi)}$

Gegeben ist die Ellipsenfunktionsgleichung, umgestellt in die „Normalform“.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0,2885 \cdot (X - 695) \pm 0,8101 \cdot \sqrt{124296{,}42 - (X - 695)^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} + \alpha \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \beta \cdot \sqrt{\gamma - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

Damit gegeben:

$$\alpha = 0,2885 \qquad \beta = 0,8101 \qquad \gamma = 124296,42$$

Die allgemeine Ellipsengleichung zeigt folgenden Aufbau:

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

Damit sind $V_{YY}^{(\varphi)}$ und $C^{(\varphi)}$ ablesbar.

$$V_{YY}^{(\varphi)} = \gamma = 124296,42 \qquad \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} = \alpha = +0,2885$$

$\Rightarrow$

$$C^{(\varphi)} = -\alpha \cdot V_{YY}^{(\varphi)} = -0,2885 \cdot 124296,42 = -35859,52$$

Ein Term ist definiert:

$$\frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} = \beta = 0,8101$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX} \cdot V_{YY}}{n^2} = \beta^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)2} = 0,8101^2 \cdot 124268,21^2 = 10134383851,4$$

Mit der in „Elliptische Regression von Datenpunkten über die Hauptkomponentenanalyse“ entwickelten Vorschrift

$$V_{XX} \cdot V_{YY} = n^2 \cdot \left(V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)2}\right)$$

kann weiterentwickelt werden.

$$V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)2} = \beta^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)2}$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\varphi)} = \frac{\beta^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)2} + C^{(\varphi)2}}{V_{YY}^{(\varphi)}} = \beta^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)} + \frac{C^{(\varphi)2}}{V_{YY}^{(\varphi)}} = \beta^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - \alpha \cdot C^{(\varphi)}$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\varphi)} = 0,8101^2 \cdot 124268,21 + 0,2885 \cdot 35851,52 = 81552,51 + 10343,2 = 91895,71$$

• **Ermittlung des Wertes von** C

Die Kovarianz C der ungedrehten Ellipse ist aus den Anstiegen der Achsen der abszissen- und ordinatenparallelen Ellipsen berechenbar.

$$\tilde{Y}_1 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \cdot X \qquad \tilde{Y}_2 = \left(\frac{V_{YY} - V_{XX}}{C} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\right) \cdot X + \frac{V_{XX} - V_{YY}}{C} \cdot \bar{X} + 2 \cdot \bar{Y}$$

$\Rightarrow$

$$-\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = \frac{V_{YY} - V_{XX}}{C} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\bar{X}^2 - \bar{Y}^2}{\bar{X} \cdot \bar{Y}} \cdot \frac{C}{V_{XX} - V_{YY}} = \frac{n}{n}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{C}{n} = \frac{\bar{X} \cdot \bar{Y}}{\bar{X}^2 - \bar{Y}^2} \cdot \left(\frac{V_{XX}}{n} - \frac{V_{YY}}{n} \right)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{C}{n} = \frac{695 \cdot 449}{695^2 - 449^2} \cdot (147412 - 68732) = 87243,76$$

• **Ermittlung des Wertes von** ρ_{XY}

Der Korrelationskoeffizient ρ_{XY} lässt sich über die eigene allgemeine Berechnungsgrundlage ermitteln.

$$\rho_{XY} = \frac{C}{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}$$

$\Rightarrow$

$$\rho_{XY} = \frac{C/n}{\sqrt{V_{XX}/n \cdot V_{YY}/n}}$$

$\Rightarrow$

$$\rho_{XY} = \frac{87243,76}{\sqrt{10134383851{,}4}} = 0,867$$

Eine weitere Möglichkeit ist die Berechnung über den Anstieg der Hauptachse nach der „Methode der kleinsten Quadrate“ a_{MKQ}.

$$\rho_{XY} = a_{MKQ} \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{n} \cdot \frac{n}{V_{YY}}} = a_{MKQ} \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{V_{YY}}} = 0,5928 \cdot \sqrt{\frac{147412}{68732}} = 0,868$$

• **Ermittlung des Wertes von** n

Es gibt keine Möglichkeit n zu rekonstruieren. Jedoch ist das für die weitere Verwendung kein Problem, da in den Berechnungsgrundlagen der Ellipsenfunktionsgleichung, der Achsenfunktionen und der abszissen- und ordinatenparallelen Ellipsen immer V/n gefordert wird.

2.3 Zusammenfassung der Singulärwertzerlegung - II

Zusammenf. II

Ermittlung von $V_{XX}^{(\varphi)}$ und n. Beide sind nicht ablesbar aus den Funktionsgleichungen der Ellipse.

Die Ermittlung der ungedrehten (Ko)Varianzen aus der Normalform der Ellipsenfunktionsgleichung.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} + \alpha \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \beta \cdot \sqrt{\gamma - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

$C^{(\varphi)}$ist berechenbar.

$$C^{(\varphi)} = -\alpha \cdot \gamma$$

$V_{XX}^{(\varphi)}$kann entwickelt werden.

$$V_{XX}^{(\varphi)} = \beta^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - \alpha \cdot C^{(\varphi)} = \left(\alpha^2 + \beta^2\right) \cdot V_{YY}^{(\varphi)}$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\varphi)} = \left(\alpha^2 + \beta^2\right) \cdot \gamma$$

Die Kovarianz C der ungedrehten Ellipse ist aus den Anstiegen der Achsen der abszissen- und ordinatenparallelen Ellipsen berechenbar.

$$\frac{C}{n} = \frac{\bar{X} \cdot \bar{Y}}{\bar{X}^2 - \bar{Y}^2} \cdot \left(\frac{V_{XX}}{n} - \frac{V_{YY}}{n}\right)$$

Der Korrelationskoeffizient ρ_{XY} lässt sich über die eigene allgemeine Berechnungsgrundlage ermitteln.

$$\rho_{XY} = \frac{C/n}{\sqrt{V_{XX}/n \cdot V_{YY}/n}}$$

Eine weitere Möglichkeit ist die Berechnung über den Anstieg der Hauptachse nach der „Methode der kleinsten Quadrate“ a_{MKQ}.

$$\rho_{XY} = a_{MKQ} \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{n} \cdot \frac{n}{V_{YY}}}$$

3 Beispiel

3.1 Beispiel - I

Beispiel - I

i	X_i	Y_i	$X_i - \bar{X}$	$Y_i - \bar{Y}$	$\left(X_i - \bar{X}\right)^2$	$\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2$	$\left(X_i - \bar{X}\right) \cdot \left(Y_i - \bar{Y}\right)$
1	128	100	-567	-349	321 489	121 801	+197 883
2	256	250	-439	-199	192 721	39 601	+87 361
3	440	510	-255	+61	65 025	3 721	-15 555
4	640	160	-55	-289	3 025	83 521	+15 895
5	768	400	+73	-49	5 329	2 401	-3 577
6	896	520	+201	+71	40 401	5 041	+14 271
7	1152	750	+457	+301	208 849	90 601	+137 557
8	1280	900	+585	+451	342 225	203 401	+263 835
Σ	5560	3590	0	0	1 179 064	550 090	+697 670

$\Rightarrow$

$$\bar{X} = \frac{5560}{8} = 695 \qquad \bar{Y} = \frac{3590}{8} = 449$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 1179064 \qquad C_{XY} = C_{YX} = 697670 \qquad V_{YY} = 550090$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX}}{n} = 147383 \qquad \frac{C}{n} = 87208,75 \qquad \frac{V_{YY}}{n} = 68761,25$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX}}{V_{YY}} = 2,144 \qquad \frac{V_{YY}}{V_{XX}} = 0,466$$

Der Anstieg der Hauptachse.

$$\varphi = \arctan \frac{449}{695} = 0,574 \equiv 32,86^\circ$$

Die Ellipsenachsen.

$$\tilde{Y}_1 = +0,646 \cdot X \qquad \tilde{Y}_2 = -1,548 \cdot X + 1525$$

Die gedrehten (Ko)Varianzen.

$$V_{XX}^{(\varphi)} = 91876,04 \qquad C^{(\varphi)} = -35851,52 \qquad V_{YY}^{(\varphi)} = 124268,21$$

Die rekonstruierten, ungedrehten (Ko)Varianzen.

- $\lambda_1^{(\varphi)} = 147412,24$

$$Z_{11} = 300 \cdot 10^{12} \qquad Z_{22} = 644,1 \cdot 10^{12}$$

$\Rightarrow$

$$S_1 = 4369601006$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX} = n \cdot 68732 = 549856 \qquad V_{YY} = n \cdot 147412,24 = 1179298$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX}}{V_{YY}} = 0,466$$

- $\lambda_2^{(\varphi)} = 68732$

$$Z_{11} = 268,4 \cdot 10^{12} \qquad Z_{22} = 125,2 \cdot 10^{12}$$

$\Rightarrow$

$$S_2 = 1820977613$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX} = n \cdot 147412,24 = 1179298 \qquad V_{YY} = n \cdot 68732 = 549856$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX}}{V_{YY}} = 2,144$$

Die Ellipsenfunktionen sind definiert.

$$Y_{1;2}^{(\varphi=0^\circ)} = 449 \pm 0,6828 \cdot \sqrt{147412 - (X-695)^2}$$
$$Y_{1;2}^{(\varphi=90^\circ)} = 449 \pm 1,4645 \cdot \sqrt{68732 - (X-695)^2}$$

Sowie:

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0,2885 \cdot (X-695) \pm 0,8101 \cdot \sqrt{124296{,}42 - (X-695)^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} + \alpha \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \beta \cdot \sqrt{\gamma - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$\alpha = 0,2885 \qquad \beta = 0,8101 \qquad \gamma = 124296,42$$

$\Rightarrow$

$$V_{YY}^{(\varphi)} = 124296,42$$

$\Rightarrow$

$$C^{(\varphi)} = -35859,52$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\varphi)} = 91895,71$$

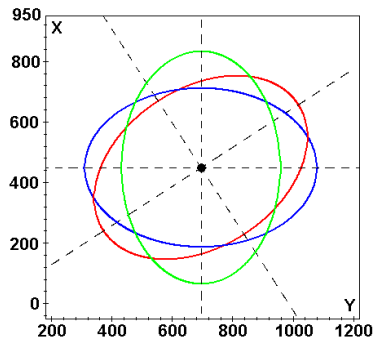
Die Kovarianz C.

$$\frac{C}{n} = 87243,76$$

Der Korrelationskoeffizient ρ_{XY}.

$$\rho_{XY} = 0,867$$

Die Ergebnisse grafisch dargestellt.



Schwarz Die Ellipsenachsen mit Mittelpunkt,
Rot regressierte verschobene, gedrehte Ellipse,
Blau abszissenparallele Ellipse,
Grün ordinatenparallele Ellipse

3.2 Beispiel - II

Beispiel - II

Mit den Werten aus [Rol] wurde in [Dip] als ein dort genutztes Beispiel zwei Ellipsen ermittelt:

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = -6,7032 + 0,400 \cdot x \pm 0,004680 \cdot \sqrt{3591 - 14000 \cdot x - 62500 \cdot x^2}$$
$$Y_{3;4}^{(\varphi)} = -6,7770 - 0,259 \cdot x \pm 0,003036 \cdot \sqrt{5966 - 14000 \cdot x - 62500 \cdot x^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = -6,748 + 0,400 \cdot (x + 0,112) \pm 1,170 \cdot \sqrt{0,070 - (x + 0,112)^2}$$
$$Y_{3;4}^{(\varphi)} = -6,748 - 0,259 \cdot (x + 0,112) \pm 0,759 \cdot \sqrt{0,108 - (x + 0,112)^2}$$

Nach Überführung in die „Normalform“ können die Koeffizienten α, β, γ und die Mittelwerte $\bar{X}$ und $\bar{Y}$ ermittelt werden.

$$Y_{1;2;3;4}^{(\varphi)} = \bar{Y} + \alpha \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \beta \cdot \sqrt{\gamma - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{Y}_{1;2;3;4} = -6,748 \qquad \bar{X}_{1;2;3;4} = -0,112$$

Sowie:

$$\alpha_{1;2} = +0,400 \qquad \beta_{1;2} = \pm 1,170 \qquad \gamma_{1;2} = +0,070$$
$$\alpha_{3;4} = -0,259 \qquad \beta_{3;4} = \pm 0,759 \qquad \gamma_{3;4} = +0,108$$

Damit können alle $V^{(\varphi)}$ und $C_{XY}^{(\varphi)} = C_{YX}^{(\varphi)} = C^{(\varphi)}$ berechnet werden.

$$V_{YY\,1;2}^{(\varphi)} = \gamma_{1;2} = +0,070$$
$$V_{XX\,3;4}^{(\varphi)} = \gamma_{3;4} = +0,108$$

$\Rightarrow$

$$C_{1;2}^{(\varphi)} = -\alpha_{1;2} \cdot V_{YY\,1;2}^{(\varphi)} = +0,400 \cdot 0,070 = +0,028$$
$$C_{3;4}^{(\varphi)} = -\alpha_{3;4} \cdot V_{XX\,3;4}^{(\varphi)} = -0,259 \cdot 0,108 = -0,028$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX\,1;2}^{(\varphi)} = \beta_{1;2}^2 \cdot V_{YY\,1;2}^{(\varphi)} - \alpha_{1;2} \cdot C_{1;2}^{(\varphi)} = \left(\alpha_{1;2}^2 + \beta_{1;2}^2\right) \cdot V_{YY\,1;2}^{(\varphi)}$$
$$V_{YY\,3;4}^{(\varphi)} = \beta_{3;4}^2 \cdot V_{XX\,3;4}^{(\varphi)} - \alpha_{3;4} \cdot C_{3;4}^{(\varphi)} = \left(\alpha_{3;4}^2 + \beta_{3;4}^2\right) \cdot V_{XX\,3;4}^{(\varphi)}$$

$$V_{XX\,1;2}^{(\varphi)} = \left(0,400^2 + 1,170^2\right) \cdot 0,070 = +0,108$$
$$V_{YY\,3;4}^{(\varphi)} = \left(0,259^2 + 0,759^2\right) \cdot 0,108 = +0,070$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\varphi)} = +0,108 \qquad C^{(\varphi)} = \pm 0,028 \qquad V_{YY}^{(\varphi)} = +0,070$$

Die Eigenwerte $\lambda_1^{(\varphi)}$ und $\lambda_2^{(\varphi)}$.

$$2 \cdot \lambda_{1;2}^{(\varphi)} = V_{YY}^{(\varphi)} + V_{XX}^{(\varphi)} \pm \sqrt{\left(V_{YY}^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 + 4 \cdot C^{(\varphi)2}}$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1^{(\varphi)} = 0,123 \qquad \lambda_2^{(\varphi)} = 0,055$$

Wobei gelten muss:

$$\lambda_1^{(\varphi)} + \lambda_1^{(\varphi)} = 0,123 + 0,055 = 0,178 = 0,108 + 0,070 = V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)}$$

Die ungedrehten Varianzen V und Covarianzen C sind berechenbar.

$$\frac{V_{XX\leftarrow\lambda_1;1,YY\leftarrow\lambda_2;1}}{n} = \frac{\left(\lambda_{1;2} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - 2 \cdot C^{(\varphi)2} \cdot \left(\lambda_{1;2} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) + C^{(\varphi)2} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{\left(\lambda_{1;2} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 + C^{(\varphi)2}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX;1}}{n} = \frac{(0,123 - 0,108)^2 \cdot 0,108 - 2 \cdot 0,028^2 \cdot (0,123 - 0,108) + 0,028^2 \cdot 0,070}{(0,123 - 0,108)^2 + 0,028^2}$$

$$\frac{V_{YY;1}}{n} = \frac{(0,055 - 0,108)^2 \cdot 0,108 - 2 \cdot 0,028^2 \cdot (0,055 - 0,108) + 0,028^2 \cdot 0,070}{(0,055 - 0,108)^2 + 0,028^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX;1}}{n} = 0,055 \qquad \frac{V_{YY;1}}{n} = 0,123$$

Und:

$$\frac{V_{XX\leftarrow\lambda_1;2,YY\leftarrow\lambda_2;2}}{n} = \frac{\left(\lambda_{1;2} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)} + 2 \cdot C^{(\varphi)2} \cdot \left(\lambda_{1;2} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) + C^{(\varphi)2} \cdot V_{XX}^{(\varphi)}}{\left(\lambda_{1;2} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 + C^{(\varphi)2}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX;2}}{n} = \frac{(0,123 - 0,108)^2 \cdot 0,070 + 2 \cdot 0,028^2 \cdot (0,123 - 0,108) + 0,028^2 \cdot 0,108}{(0,123 - 0,108)^2 + 0,028^2}$$

$$\frac{V_{YY;2}}{n} = \frac{(0,055 - 0,108)^2 \cdot 0,070 + 2 \cdot 0,028^2 \cdot (0,055 - 0,108) + 0,028^2 \cdot 0,108}{(0,055 - 0,108)^2 + 0,028^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX;2}}{n} = 0,076 \qquad \frac{V_{YY;2}}{n} = 0,101$$

Der Wert für n ist aus [Dip] bekannt mit $n = 8$. Es ist jedoch auch ohne der Kenntnis von n möglich, weiter zu rechnen.

$$V_{XX;1} = 8 \cdot 0,055 = 0,440 \qquad V_{YY;1} = 8 \cdot 0,123 = 0,984$$
$$V_{XX;2} = 8 \cdot 0,076 = 0,610 \qquad V_{YY;2} = 8 \cdot 0,101 = 0,808$$

Somit können die Funktionsgleichungen der abszissen- und ordinatenparallelen Ellipsen genannt werden.

$$Y_{1;2}^{(\varphi=0°)} = \bar{Y} \pm \sqrt{V_{YY}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - \bar{X}\right)^2}{V_{XX}}}$$

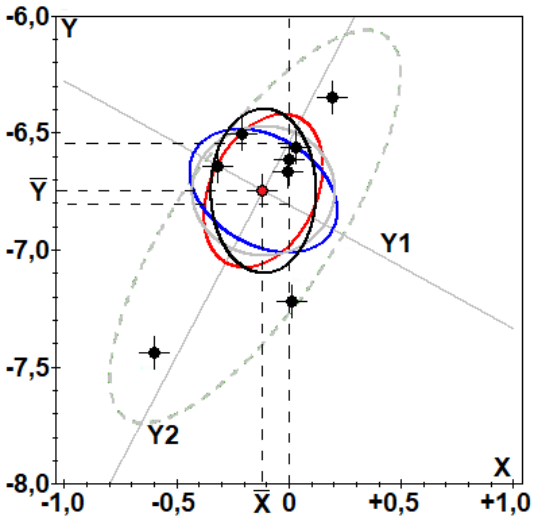
$$Y_{1;2}^{(\varphi=90°)} = \bar{Y} \pm \sqrt{V_{XX}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - \bar{X}\right)^2}{V_{YY}}}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=0°)} = -6,748 \pm \sqrt{0,984} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{(X + 0,112)^2}{0,440}}$$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=90°)} = -6,748 \pm \sqrt{0,610} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{(X + 0,112)^2}{0,808}}$$

Grafisch veranschaulicht.



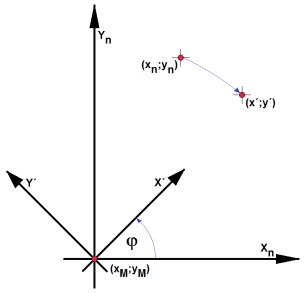
Grau die Ellipsenachsen mit Mittelpunkt aus [Rol],
Rot regressierte verschobene, gedrehte Ellipse - I aus [Dip],
Blau regressierte verschobene, gedrehte Ellipse - II aus [Dip],
Grau abszissenparallele Ellipse, **Schwarz** ordinatenparallele Ellipse
Weiterhin eingezeichnet, der originale Datensatz aus [Rol] und **grau** gestrichelt, die dort genutzte Ellipse.

LaTeX 2_ε

$$\oiint$$

3.2.4 Elliptische Regression nach HKA - Drehen und Zentrieren der Ellipse

Zentrieren und Rückkippen einer Ellipse, gewonnen aus der Regression nach der Hauptkomponentenanalyse



Centering and tilting back an ellipse

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 6. Juli 2017 – Letzte Revision: 13. Juni 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Durchführung Drehung und Zentrierung **3**
1.1 Verschiebung in den Ellipsenmittelpunkt . . . 3
1.2 Drehung des Systems . . . 4
1.3 Zusammenfassen der Verschiebung und Drehung . . . 5
1.4 Ermittlung der Haupt- und Nebenachse . . . 6
1.5 Ermittlung neue Ellipsenfunktion . . . 7

2 Anhang **9**
2.1 Eigenschaften von $\tan\varphi$ . . . 9
2.2 Zusammenfassung der Berechnungsgrundlagen . . . 10

3 Beispiele **11**
3.1 Beispiel I – vollständige Auflösung . . . 11
3.2 Beispiel II – unvollständige Auflösung . . . 13
3.3 Beispiel III . . . 15

Literatur

[Dipa] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten - Prinzip HKA. www.Zenithpoint.de.

[Dipb] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten - Prinzip MKQ. www.Zenithpoint.de.

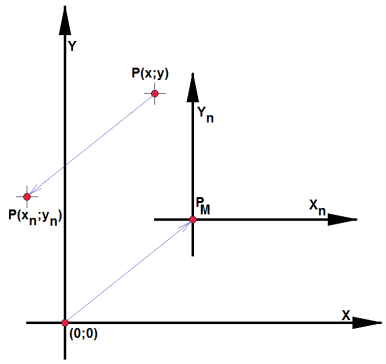
[Dipc] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Ermittlung der abszissen und ordinatenparallelen Ellipse über die Singulärwertzerlegung. www.Zenithpoint.de.

[Rol] Roland Weingärtner, Leon Schiller, Alexander Kinstler, Richard Neumann, Frank Brunner, Eldad Bahat Treidel, Enrico Brusaterra, Matthias Marx, Sven Besendörfer. Impact of Dislocation Networks on Leakage Currents of GaN-on-GaN pn-Diodes: A Statistical Approach Comparing X-Ray Topography with Electrical Characteristics.

1 Durchführung der Drehung und Zentrierung

1.1 Verschiebung des Systems in den Ellipsenmittelpunkt $P_M\left(x_M, y_M\right)$

Der erste Schritt ist es, die Ellipse zu zentrieren. Dazu wird das Koordinatensystem in den Mittelpunkt der Ellipse verschoben, Bekannt sind der Mittelpunkt der Ellipse mit $P_M\left(x_M, y_M\right)$



und

$$x_M = \bar{X} = \frac{\{X_i\}}{n} \qquad y_M = \bar{Y} = \frac{\{Y_i\}}{n}$$

aus der Verschiebung ergeben sich neue Datenpunktangaben $P_i\left(x_i; y_i\right)$ mit:

$$x_n = x - x_M \qquad y_n = y - y_M$$

Beispiel aus [Dipa]:

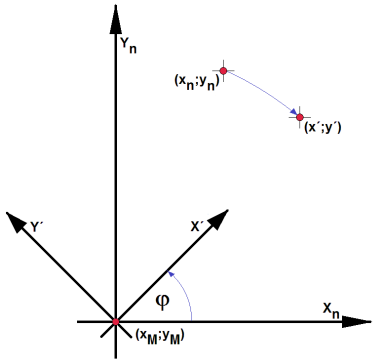
i	x_i	y_i	x_n	y_n
1	128	100	-567	-349
2	256	250	-439	-199
3	440	510	-255	+61
4	640	160	-55	-289
5	768	400	+73	-49
6	896	520	+201	+71
7	1152	750	+457	+301
8	1280	900	+585	+451
$\sum$	5560	3590	0	≈ 0

Mit:

$$x_M = \frac{5560}{8} = 695 \qquad y_M = \frac{3590}{8} = 449$$

1.2 Drehung des Systems auf die Abszisse $Y^{(b=0)}$

Die nun zentrierte jedoch noch gekippte Ellipse wird nun abszissenparallel gestellt. Dazu wird der bekannte Kippwinkel φ der Ellipse genutzt. Die Vorzeichen werden so gesetzt, dass eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn ein positives φ erfordert.



$\Rightarrow$

$$x' = x_n \cdot \cos\varphi + y_n \cdot \sin\varphi \qquad y' = y_n \cdot \cos\varphi - x_n \cdot \sin\varphi$$

Auch für den Winkel φ gibt es aus der HKA eine Berechnungsgrundlage.

$$\varphi = \arctan\frac{y_M}{x_M}$$

$\Rightarrow$

$$x' = \frac{x_n \cdot x_M + y_n \cdot y_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}} \qquad y' = \frac{y_n \cdot x_M - x_n \cdot y_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}$$

Damit ist die Ellipse zentriert und ungekippt. Das genutzte Beispiel wird weiter entwickelt.

i	x_n	y_n	x'	y'
1	-567	-349	-666	+13
2	-439	-199	-477	+70
3	-255	+61	-181	+189
4	-55	-289	-203	-213
5	+73	-49	+35	-81
6	+201	+71	+207	-49
7	+457	+301	+547	+6
8	+585	+451	+736	+63
$\sum$	0	≈ 0	≈ 0	≈ 0

1.3 Zusammenfassen der Verschiebung und Drehung

Die Berechnungsgrundlagen für die Verschiebung und Drehung können zusammen gefasst werden. Daraus ergeben sich die folgenden Gesamtgleichungen:

$$x_n = x - x_M \qquad y_n = y - y_M$$

Mit

$$x' = \frac{x_n \cdot x_M + y_n \cdot y_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}} \qquad y' = \frac{y_n \cdot x_M - x_n \cdot y_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x' = \frac{(x - x_M) \cdot x_M + (y - y_M) \cdot y_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}} \qquad y' = \frac{(y - y_M) \cdot x_M - (x - x_M) \cdot y_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}$$

1.4 Neuermittlung von Haupt- und Nebenachse $Y^{(\varphi=0°)}, Y^{(\varphi=90°)}$

Die allgemeine Berechnungsgrundlage der Haupt- und Nebenachse der Ellipse ist aus [Dipb] gegeben mit:

$$Y^{(\varphi,b=0)} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \cdot X \qquad Y^{(\varphi,b\neq 0)} = \left(\frac{V_{YY} - V_{XX}}{C} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\right) \cdot X + \frac{V_{XX} - V_{YY}}{C} \cdot \bar{X} + 2 \cdot \bar{Y}$$

Die Achse $Y^{(\varphi,b=0)}$ ist aus den Werten $\bar{X}$ und $\bar{Y}$ nicht definiert, da beide nach der Verschiebung den Wert Null ergeben. Durch die anschließende Drehung wurde jedoch festgelegt:

$$Y^{(\varphi=0,b=0)} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \stackrel{def}{=} 0$$

Damit kann dann auch $Y^{(\varphi=0,b\neq 0)}$ ermittelt werden.

$$Y^{(\varphi,b\neq 0)} = \frac{V_{YY} - V_{XX}}{C} \cdot X - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \cdot X + \frac{V_{XX} - V_{YY}}{C} \cdot \bar{X} + 2 \cdot \bar{Y}$$

$\Rightarrow$

$$Y^{(\varphi=0,b\neq 0)} = \frac{V_{YY} - V_{XX}}{C} \cdot X$$

Ideal müsste die Achse $Y^{(\varphi=0,b\neq 0)}$ senkrecht auf $Y^{(\varphi=0,b=0)}$ stehen. Daraus folgt, dass $C \to 0$ geht. Das ist jedoch nur dann der Fall, wenn die Varianzen der Originaldaten vollständig aufgelöst werden können. Der Winkel zwischen den Achsen ist demnach ein Indikator der Regression und der Hauptkomponentenanalyse.

$$\tan\varphi = \frac{V_{YY} - V_{XX}}{C}$$

1.5 Ermitteln der neuen Ellipsenfunktion $Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)}$

Aus den gewonnen Werten x' und y' kann die Ellipsenfunktion ermittelt werden. Die allgemeine Berechnungsgrundlage aus [Dipb] ist gegeben mit:

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = y_M + \frac{B}{A} \cdot (x - x_M) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_M)^2}$$

Der Kippwinkel φ der neugewonnenen Ellipse ist Null, da diese ungekippt nun vorliegt. Gleichzeitig fällt x_M und y_M weg, da die Zentrierung abgeschlossen ist.

$$Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)} = \frac{B}{A} \cdot x \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - x^2}$$

Für ein $\varphi = 0$ ist der Anstieg einer Achse $a = 0$. Für die Koeffizienten A und B ist dann bekannt:

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} \qquad B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2}$$

$\Rightarrow$

$$A^{(\varphi=0)} = f^2 \qquad B^{(\varphi=0)} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)} = \pm \frac{e}{f} \cdot \sqrt{f^2 - x^2}$$

Die Haupt- und die Nebenachse ist definiert.

$$e^2 = \frac{V_{YY}}{n} \qquad f^2 = \frac{V_{XX}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)} = \pm \sqrt{\frac{V_{YY}}{V_{XX}}} \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{n} - x^2}$$

Für vorliegendes Beispiel ergibt sich somit ein $Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)}$ von:

i	x'	y'	x'^2	y'^2	$x' \cdot y'$
1	-666	+13	443.556	169	-8.658
2	-477	+70	227.529	4.900	-33.390
3	-181	+189	32.761	35.721	-34.209
4	-203	-213	41.209	45.369	+43.239
5	+35	-81	1.225	6.561	-2.835
6	+207	-49	42.849	2.401	-10.143
7	+547	+6	299.209	36	+3.282
8	+736	+63	541.696	3.969	+46.368
$\sum$	0	≈ 0	1.630.034	99.126	+3.654

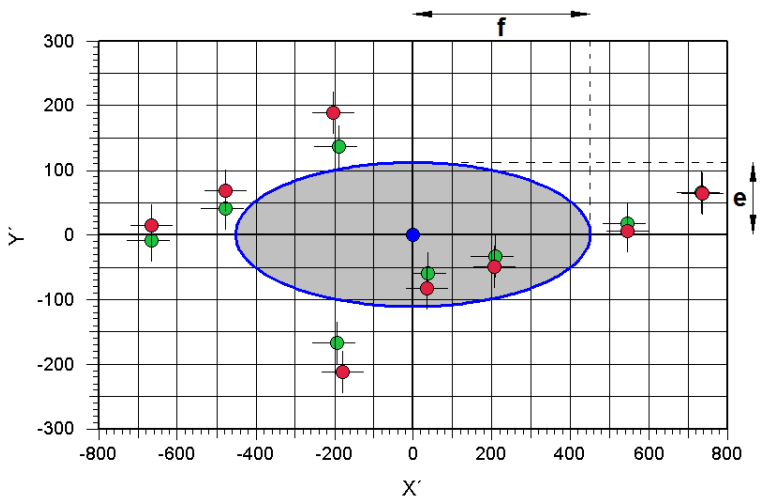
$$V_{XX} = 1630034 \qquad V_{YY} = 99126$$

$$C = C_{XY} = C_{YX} = 3654$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)} = \pm \sqrt{\frac{99126}{1630034}} \cdot \sqrt{\frac{1630034}{8} - x^2} = \pm \sqrt{12390,75 - 0,0608 \cdot x^2}$$

Die grafische Darstellung dazu folgend, wobei ROT ermittelte Datenpunkte aus der Hauptkomponentenanalyse (HKA) und GRÜN die nach der Methode der kleinsten Quadrate (MKQ) darstellt.



Mit:

$$e = \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} = 111,3 \qquad f = \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} = 451,4$$

Und:

$$\varphi = \arctan \frac{V_{YY} - V_{XX}}{C} = -89,9^\circ \equiv -0,499 \cdot \pi$$

Aus Interesse sollen die gedrehten (Ko)Varianzen ermittelt werden. Aus [Dipc] folgt:

$$\begin{aligned} V_{XX}^{(\varphi)} &= \frac{V_{YY}}{n} \cdot \cos^2 \varphi + \frac{V_{XX}}{n} \cdot \sin^2 \varphi \\ V_{Y}^{(\varphi)} &= \frac{V_{YY}}{n} \cdot \sin^2 \varphi + \frac{V_{XX}}{n} \cdot \cos^2 \varphi \\ C^{(\varphi)} &= \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \left(\frac{V_{YY}}{n} - \frac{V_{XX}}{n} \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\varphi=0)} = \frac{V_{YY}}{n} \qquad C^{(\varphi=0)} = 0 \qquad V_{YY}^{(\varphi=0)} = \frac{V_{XX}}{n}$$

Die gedrehten Varianzen sind gleich der ungedrehten. Die für die Ellipsendrehung verantwortliche gedrehte Kovarianz $C^{(\varphi=0)}$ ist gleich Null.

2 Anhang

2.1 Eigenschaft und Rolle von $\tan\varphi$

Die allgemeine Berechnungsgrundlage der Haupt- und Nebenachse der Ellipse ist aus [Dipb] ist gegeben mit:

$$Y^{(\varphi,b=0)} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \cdot X \qquad Y^{(\varphi,b\neq 0)} = \left(\frac{V_{YY} - V_{XX}}{C} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}\right) \cdot X + \frac{V_{XX} - V_{YY}}{C} \cdot \bar{X} + 2 \cdot \bar{Y}$$

Definiert man als Hauptachse die Achse, welche durch den Koordinatenursprung verläuft $Y^{(\varphi,b=0)}$ und als Nebenachse, die orthogonal dazu verlaufende $Y^{(\varphi,b\neq 0)}$, dann gilt für die Anstiege:

$$Y^{(\varphi,b=0)} = -\frac{1}{Y^{(\varphi,b\neq 0)}}$$

$\Rightarrow$

$$-\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = \frac{V_{YY} - V_{XX}}{C} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\bar{Y}}{\bar{X}} - \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = \tan\varphi = \frac{V_{YY} - V_{XX}}{C}$$

Diese Aussage ist für die zentrierte Ellipse richtig, da $x_M = y_M = 0$ gilt. Damit gilt für den Normalfall und den vordefinierten Quotienten:

$$\frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = 0 \qquad \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = \pm\infty$$

$\Rightarrow$

$$\tan\varphi = \pm\infty \qquad V_{YY} - V_{XX} \neq 0 \qquad C \to 0$$

Das Pendant dazu hat folgende Form:

$$V_{YY} - V_{XX} = 0 \qquad C \neq 0$$

$\Rightarrow$

$$\tan\varphi = 0$$

Damit sind zwei globale Fälle unterscheidbar.

- $\tan\varphi = \pm\infty$

Die Haupt- und die Nebenachse sind orthogonal zueinander. Die Varianzen sind auflösbar / unterscheidbar.

- $\tan\varphi = 0$

Die Haupt- und die Nebenachse sind identisch. Es liegt eine Kreisregression vor. Die Varianzen sind nicht auflösbar / unterscheidbar.

2.2 Zusammenfassung der Berechnungsgrundlagen

Das Verschieben und Drehen eines Datensatzes im Zusammenhang mit der Elliptischen Regression HKA erfolgt durch folgende Berechnungsgrundlage.

$$x' = \frac{(x - x_M) \cdot x_M + (y - y_M) \cdot y_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}} \qquad y' = \frac{(y - y_M) \cdot x_M - (x - x_M) \cdot y_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}$$

Wobei $P_i\,(x_i; y_i)$ den alte Datenpunkt und $P_i\,(x_i'; y_i')$ den neuen darstellt. Es werden dazu lediglich die Mittelwerte x_M und y_M benötigt.

Die nun zentrierte und ungekippte Ellipse besitzt die Form:

$$Y_{1;2}^{'(\varphi' = x'_M = y'_M = 0)} = \pm\sqrt{\frac{V'_{YY}}{V'_{XX}}} \cdot \sqrt{\frac{V'_{XX}}{n} - x^2}$$

Mit den Varianzen V'_{XX} und V'_{YY}.

Die Haupt- und Nebenachse besitzen einen Winkel φ'. Dieser ist definiert durch:

$$\tan\varphi' = \frac{V'_{YY} - V'_{XX}}{C'}$$

Idealerweise ist dieser 90°. Bedeutet, dass die Kovarianz C' des Datensatzes $P_i'\,(x_i'; y_i')$ gegen Null geht. Ist das der Fall, konnten die Varianzen des Originaldatensatzes $P_i\,(x_i; y_i)$ vollständig aufgelöst werden.

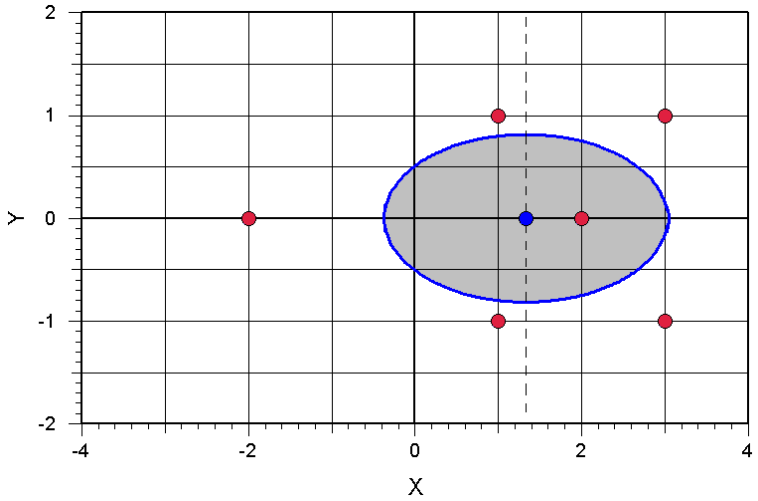
3 Beispiele

3.1 Beispiel I – vollständige Auflösung

Gegeben ist folgender Datensatz

i	x_i	y_i	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$	$(x_i - x_M) \cdot (y_i - y_M)$
1	+3	-1	2,778	1	-1,667
2	-2	0	11,112	0	0,000
3	+1	+1	0,112	1	-0,334
4	+1	-1	0,112	1	+0,334
5	+2	0	0,445	0	0,000
6	+3	+1	2,778	1	+1,667
$\sum$	+8	0	17,337	4	0,000

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 17,337 \qquad C = 0 \qquad V_{YY} = 4$$

$\Rightarrow$

$$f = \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} = 1,700 \qquad e = \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} = 0,816$$

Mit:

$$y_H = 0 \qquad x_N = 1,334$$

Bei:

$$x_M = \frac{8}{6} = 1,334 \qquad y_M = \frac{0}{6} = 0$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = 2,890 \qquad B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = y_M + \frac{B}{A} \cdot (x - x_M) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_M)^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \pm 0,480 \cdot \sqrt{2,890 - (x - 1,334)^2}$$

Sowie:

$$\tan \varphi = \frac{V_{YY} - V_{XX}}{C} = -\infty$$

$\Rightarrow$

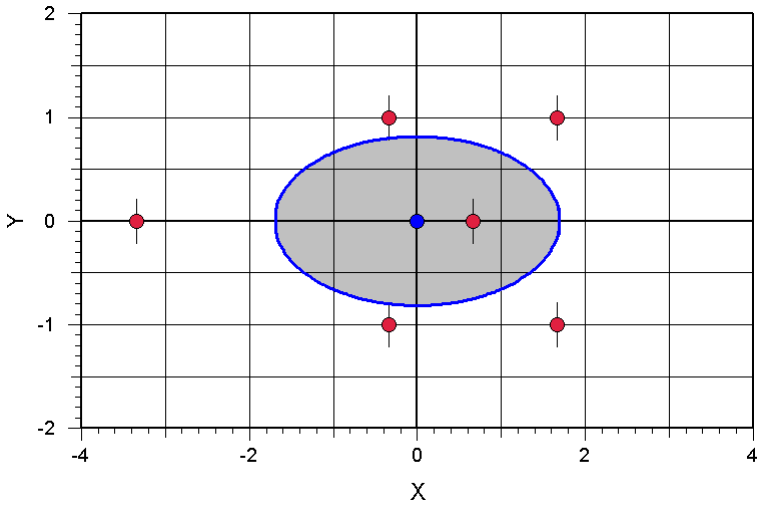
$$\varphi = 90^\circ$$

Damit können die Varianzen vollständig aufgelöst werden.

Die Ermittlung der Werte x' und y'.

i	x_i	y_i	x'_i	y'_i	$(x'_i - x'_M)^2$	$(y'_i - y'_M)^2$	$(x'_i - x'_M) \cdot (y'_i - y'_M)$
1	+3	-1	+1,667	-1	2,779	1	-1,667
2	-2	0	-3,334	0	11,116	0	0,000
3	+1	+1	-0,334	+1	0,112	1	-0,334
4	+1	-1	-0,334	-1	0,112	1	+0,334
5	+2	0	+0,667	0	0,445	0	0,000
6	+3	+1	+1,667	+1	2,779	1	+1,667
$\sum$	+8	0	0	0	17,334	4	0

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 17,334 \qquad C = 0 \qquad V_{YY} = 4$$

$\Rightarrow$

$$f = \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} = 1,700 \qquad e = \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} = 0,816$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi = x_M = y_M = 0)} = \pm\sqrt{\frac{V_{YY}}{V_{XX}}} \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{n} - x^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi = x_M = y_M = 0)} = \pm 0,480 \cdot \sqrt{2,890 - x^2}$$

Sowie:

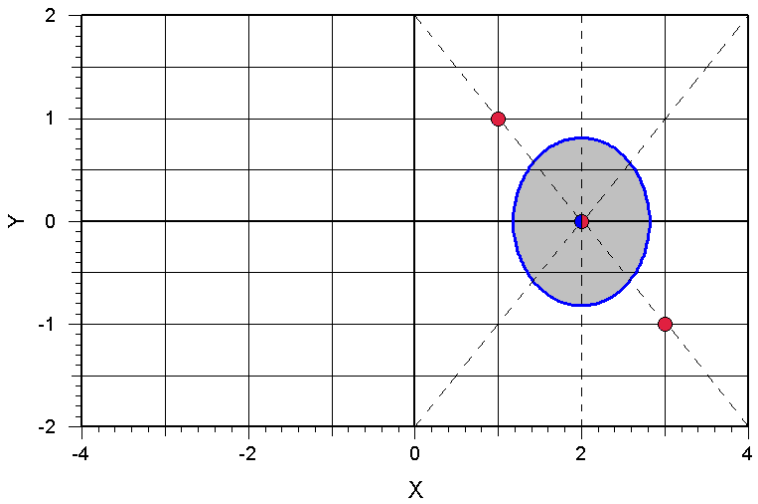
$$\tan\varphi = \frac{V_{YY} - V_{XX}}{C} = -\infty \qquad \rightarrow \qquad \varphi = 90^\circ$$

3.2 Beispiel II – unvollständige Auflösung

Gegeben ist folgender Datensatz

i	x_i	y_i	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$	$(x_i - x_M) \cdot (y_i - y_M)$
1	3	-1	1	1	-1
2	2	0	0	0	0
3	1	+1	1	1	-1
4	1	+1	1	1	-1
5	2	0	0	0	0
6	3	-1	1	1	-1
$\sum$	12	0	4	4	-4

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 4 \qquad C = -4 \qquad V_{YY} = 4$$

Es liegt eine Kreisregression vor.

$$f = \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} = 0,816 \qquad e = \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} = 0,816$$

Mit Linearer Regression – MKQ:

$$y_{H;MKQ} = -x + 2 \qquad y_{N;MKQ} = x - 2$$

Mit Linearer Regression – HKA:

$$y_{H;HKA} = 0 \qquad x_{N;HKA} = 2$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = 0,667 \qquad B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = y_M + \frac{B}{A} \cdot (x - x_M) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_M)^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \pm\sqrt{0,667 - (x - 2)^2}$$

Bei:

$$x_M = \frac{12}{6} = 2 \qquad y_M = \frac{0}{6} = 0$$

Sowie:

$$\tan\varphi = \frac{V_{YY} - V_{XX}}{C} = 0$$

$\Rightarrow$

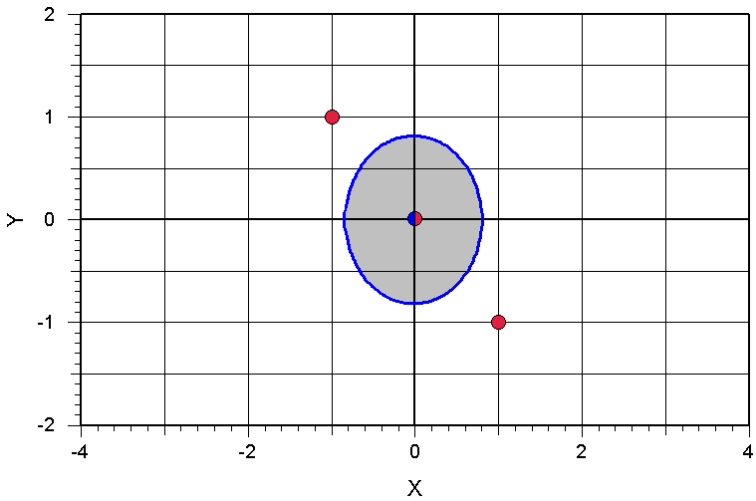
$$\varphi = 0°$$

Damit können die Varianzen nicht aufgelöst werden.

Die Ermittlung der Werte x' und y'.

i	x_i	y_i	x'_i	y'_i	$(x'_i - x'_M)^2$	$(y'_i - y'_M)^2$	$(x'_i - x'_M) \cdot (y'_i - y'_M)$
1	3	-1	+1	-1	1	1	-1
2	2	0	0	0	0	0	0
3	1	+1	-1	+1	1	1	-1
4	1	+1	-1	+1	1	1	-1
5	2	0	0	0	0	0	0
6	3	-1	+1	-1	1	1	-1
$\sum$	12	0	0	0	4	4	-4

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 4 \qquad C = -4 \qquad V_{YY} = 4$$

Es liegt eine Kreisregression vor.

$$f = \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} = 0,816 \qquad e = \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} = 0,816$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi = x_M = y_M = 0)} = \pm\sqrt{\frac{V_{YY}}{V_{XX}}} \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{n} - x^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi = x_M = y_M = 0)} = \pm\sqrt{0,667 - x^2}$$

Sowie:

$$\tan\varphi = \frac{V_{YY} - V_{XX}}{C} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \varphi = 0°$$

3.3 Beispiel III

[Rol]

Nach Messwerten in [Rol] sind in [Dipa] Datenpunkte zu einer Elliptischen Regression angegeben.

i	X_i	Y_i	$(X_i - X_M) \cdot (Y_i - Y_M)$
1	+0, 192 2	-6, 340 0	+0, 123 957
2	+0, 014 9	-7, 213 8	-0, 058 961
3	-0, 208 7	-6, 511 2	-0, 022 972
4	-0, 001 9	-6, 610 3	+0, 015 107
5	+0, 031 8	-6, 565 2	+0, 026 216
6	-0, 008 3	-6, 662 1	+0, 008 872
7	-0, 320 6	-6, 644 1	-0, 021 696
8	-0, 592 7	-7, 436 8	+0, 331 369
8	-0, 893 3	-53, 983 5	+0, 401 892

$X_i \cdot X_i$	$X_i \cdot Y_i$	$(X_i - X_M)^2$	$(Y_i - Y_M)^2$
+0, 036 941	-1, 218 548	+0, 092 333	+0, 166 413
+0, 000 222	-0, 107 486	+0, 016 018	+0, 217 027
+0, 043 556	+1, 358 889	+0, 009 416	+0, 056 045
+0, 000 004	+0, 012 560	+0, 012 048	+0, 018 944
+0, 001 011	-0, 208 773	+0, 020 582	+0, 033 393
+0, 000 069	+0, 055 295	+0, 010 684	+0, 007 368
+0, 102 784	+2, 130 098	+0, 043 655	+0, 010 782
+0, 351 293	+4, 407 791	+0, 231 397	+0, 474 531
+0, 535 880	+6, 429 826	+0, 436 133	+0, 984 503

Woraus sich folgende Werte ergeben:

$$X_m = \frac{\{X_i\}}{n} = \frac{-0,8933}{8} = -0,112 \qquad Y_m = \frac{\{Y_i\}}{n} = \frac{-53,9835}{8} = -6,748$$

Damit sind die neuen Werte für X_i' und Y_i' und weitere berechenbar.

i	X_i	Y_i	X_i'	Y_i'
1	+0, 192 2	-6, 340 0	-0, 413	+0, 297
2	+0, 014 9	-7, 213 8	+0, 464	+0, 134
3	-0, 208 7	-6, 511 2	-0, 235	-0, 101
4	-0, 001 9	-6, 610 3	-0, 139	+0, 107
5	+0, 031 8	-6, 565 2	-0, 185	+0, 140
6	-0, 008 3	-6, 662 1	-0, 088	+0, 102
7	-0, 320 6	-6, 644 1	-0, 100	-0, 211
8	-0, 592 7	-7, 436 8	+0, 697	-0, 470
8	-0, 893 3	-53, 983 5	0	0

Sowie:

$$V_{XX} = \left\{(X_i - X_m)^2\right\} = 0,436133 \approx 0,436$$
$$V_{YY} = \left\{(Y_i - Y_m)^2\right\} = 0,984503 \approx 0,984$$
$$C_{XY} = C_{YX} = C = \{(X_i - X_m) \cdot (Y_i - Y_m)\} = 0,401892 \approx 0,402$$

i	$X'_i \cdot X'_1$	$Y'_i \cdot Y'_i$	$X'_i \cdot Y'_i$
1	+0, 170	+0, 088	-0, 123
2	+0, 215	+0, 018	+0, 062
3	+0, 055	+0, 010	+0, 024
4	+0, 019	+0, 012	-0, 015
5	+0, 034	+0, 020	-0, 026
6	+0, 008	+0, 010	-0, 009
7	+0, 010	+0, 044	+0, 021
8	+0, 485	+0, 220	-0, 327
8	+0, 996	+0, 422	-0, 393

Fortfahrend die zentrierte und ungekippte Ellipse besitzt die Form:

$$V'_{XX} = \left\{ {X'_i}^2 \right\} = 0,996$$
$$V'_{YY} = \left\{ {Y'_i}^2 \right\} = 0,422$$
$$C'_{XY} = C'_{YX} = C' = \{X'_i \cdot Y'_i\} = -0,393$$

$\Rightarrow$

$$Y'_{1;2} = \pm 0,651 \cdot \sqrt{0,124 - x^2}$$

Die Winkel $\tan\varphi$ und $\tan\varphi'$ der unzentrierten und der zentrierten Ellipse im Vergleich.

$$\tan\varphi = \frac{V_{YY} - V_{XX}}{C} = \frac{0,984 - 0,436}{0,402} = 1,363$$
$$\tan\varphi' = \frac{V'_{YY} - V'_{XX}}{C'} = \frac{,422 - 0,996}{-0,393} = 1,461$$

$\Rightarrow$

$$\varphi = 0,938 \equiv 53,733^\circ \qquad \varphi' = 0,971 \equiv 55,610^\circ$$

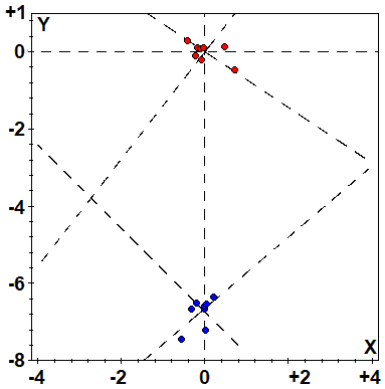
$\Rightarrow$

$$\varphi_\perp = 53,733^\circ - 90^\circ = -36,267^\circ \qquad \varphi'_\perp = 55,610^\circ - 90^\circ = -34,390^\circ$$

Die Korrelation ρ und ρ' dazu.

$$\rho_{XY} = \frac{C}{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}} = \frac{0,402}{\sqrt{0,436 \cdot 0,984}} = +0,614$$
$$\rho'_{XY} = \frac{C'}{\sqrt{V'_{XX} \cdot V'_{YY}}} = \frac{-0,393}{\sqrt{0,996 \cdot 0,422}} = -0,606$$

Die grafische Darstellung der durchgeführten Drehung und Zentrierung der Datenpunkte. Wobei blau den originale Datensatz darstellt und rot den gedrehten und zentrierten.



Über [Dipb] ist die unzentrierte Ausgangsellipse bekannt.

$$Y = -6,748 + 0,395 \cdot (X + 0,112) \pm 0,955 \cdot \sqrt{0,086 - (X + 0,112)^2}$$

- **Fall 1**

Die der zentrierten und gedrehten Datenpunkte ist ermittelbar. [1]

$$e^2 = \frac{\{X_i'^2\}}{n} = \frac{0,966}{8} = 0,121 \qquad f^2 = \frac{\{Y_i'^2\}}{n} = \frac{0,422}{8} = 0,053$$

Mit

$$a = \tan \varphi'_\perp = \tan(-34,390°) = -0,684 \qquad a^2 = 0,468$$

ergibt sich nach [Dipb] für die Formfaktoren A und B

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{0,121 \cdot 0,468 + 0,053}{1 + 0,468} = 0,075$$
$$B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = -0,684 \cdot \frac{0,053 - 0,121}{1 + 0,468} = 0,032$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e \cdot f}{A} = \frac{\sqrt{0,121 \cdot 0,053}}{0,075} = 1,068 \qquad \frac{B}{A} = \frac{0,032}{0,075} = 0,427$$

Die Funktionsgleichung Y' der gesuchten Ellipse ist somit definiert.

$$Y' = \frac{B}{A} \cdot X \pm \frac{e \cdot f}{A} \cdot \sqrt{A - X^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y' = 0,427 \cdot X \pm 1,068 \cdot \sqrt{0,075 - X^2}$$

- **Fall 2**

Die der zentrierten und gedrehten Datenpunkte ist ermittelbar.

$$e^2 = \frac{\{Y_i'^2\}}{n} = \frac{0,422}{8} = 0,053 \qquad f^2 = \frac{\{X_i'^2\}}{n} = \frac{0,966}{8} = 0,121$$

Mit

$$a = \tan \varphi' = \tan(55,610°) = 1,461 \qquad a^2 = 2,135$$

ergibt sich nach [Dipb] für die Formfaktoren A und B

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{0,053 \cdot 2,135 + 0,121}{1 + 2,135} = 0,075$$
$$B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = 1,461 \cdot \frac{0,121 - 0,053}{1 + 2,135} = 0,032$$

Weiter wie Fall 1. [2]

[1] In [Dipa] ist erklärt, dass für die Hauptkomponente bei $\varphi'_\perp$ gilt $f^2 > e^2$. Für die Nebenkomponente dementsprechend $f^2 < e^2$.

[2] Das dem so ist, lässt sich nachweisen über:

$$A_\leftrightarrow = \frac{e^2 \cdot a_\leftrightarrow^2 + f^2}{1 + a_\leftrightarrow^2} \qquad A_\updownarrow = \frac{f^2 \cdot a_\updownarrow^2 + e^2}{1 + a_\updownarrow^2}$$

Mit:

$$A_\leftrightarrow = A_\updownarrow$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e^2 \cdot a_\leftrightarrow^2 + f^2}{1 + a_\leftrightarrow^2} = \frac{f^2 \cdot a_\updownarrow^2 + e^2}{1 + a_\updownarrow^2}$$

$\Rightarrow$

$$a_\leftrightarrow^2 = \frac{1}{a_\updownarrow^2}$$

- **Fall 3**

Die der zentrierten und gedrehten Datenpunkte ist ermittelbar.

$$e^2 = \frac{\{Y_i'^2\}}{n} = \frac{0,422}{8} = 0,053 \qquad f^2 = \frac{\{X_i'^2\}}{n} = \frac{0,966}{8} = 0,121$$

Mit

$$a = \tan \varphi_\perp' = \tan(-34,390°) = -0,684 \qquad a^2 = 0,468$$

ergibt sich nach [Dipb] für die Formfaktoren A und B

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{0,053 \cdot 0,468 + 0,121}{1 + 0,468} = 0,099$$
$$B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = -0,684 \cdot \frac{0,121 - 0,053}{1 + 0,468} = -0,032$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e \cdot f}{A} = \frac{\sqrt{0,053 \cdot 0,121}}{0,099} = 0,809 \qquad \frac{B}{A} = -\frac{0,032}{0,099} = -0,323$$

Die Funktionsgleichung Y' der gesuchten Ellipse ist somit definiert.

$$Y' = \frac{B}{A} \cdot X \pm \frac{e \cdot f}{A} \cdot \sqrt{A - X^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y' = -0,323 \cdot X \pm 0,809 \cdot \sqrt{0,099 - X^2}$$

Sowie:

$$B_\leftrightarrow = a_\leftrightarrow \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a_\leftrightarrow^2} \qquad B_\updownarrow = a_\updownarrow \cdot \frac{e^2 - f^2}{1 + a_\updownarrow^2}$$

Mit:

$$B_\leftrightarrow = B_\updownarrow$$

$\Rightarrow$

$$a_\leftrightarrow \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a_\leftrightarrow^2} = a_\updownarrow \cdot \frac{e^2 - f^2}{1 + a_\updownarrow^2}$$

$\Rightarrow$

$$a_\leftrightarrow^2 + \frac{1 + a_\updownarrow^2}{a_\updownarrow} \cdot a_\leftrightarrow + 1 = 0$$

$\Rightarrow$

$$2 \cdot a_{\leftrightarrow 1;2} = -\frac{1 + a_\updownarrow^2}{a_\updownarrow} \pm \frac{1}{a_\updownarrow} \cdot \sqrt{\left(1 + a_\updownarrow^2\right)^2 - 4 \cdot a_\updownarrow^2}$$

Mit der bekannten Bedingung $a_\leftrightarrow^2 = a_\updownarrow^{-2}$ ergibt sich vereinfacht:

$$a_\leftrightarrow \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a_\leftrightarrow^2} = a_\updownarrow \cdot \frac{e^2 - f^2}{1 + a_\updownarrow^2}$$

Mit:

$$a_\leftrightarrow^2 = \frac{1}{a_\updownarrow^2}$$

$\Rightarrow$

$$a_\leftrightarrow \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + \frac{1}{a_\updownarrow^2}} = a_\updownarrow \cdot \frac{e^2 - f^2}{1 + a_\updownarrow^2}$$

$\Rightarrow$

$$a_\leftrightarrow = -\frac{1}{a_\updownarrow}$$

- **Fall 4**

Die der zentrierten und gedrehten Datenpunkte ist ermittelbar.

$$e^2 = \frac{\{X_i'^2\}}{n} = \frac{0,966}{8} = 0,121 \qquad f^2 = \frac{\{Y_i'^2\}}{n} = \frac{0,422}{8} = 0,053$$

Mit

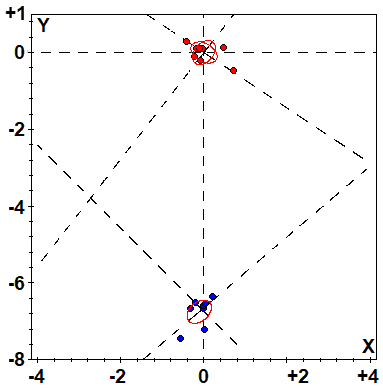
$$a = \tan \varphi' = \tan(55,610°) = 1,461 \qquad a^2 = 2,135$$

ergibt sich nach [Dipb] für die Formfaktoren A und B

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{0,121 \cdot 2,135 + 0,053}{1 + 2,135} = 0,099$$
$$B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = 1,461 \cdot \frac{0,053 - 0,121}{1 + 2,135} = -0,032$$

Weiter wie Fall 3.

Die grafische Darstellung aller Fälle folgend dazu.

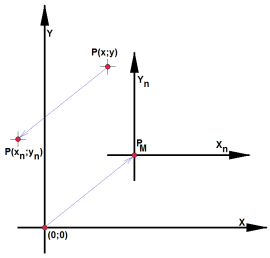


LaTeX 2_ε

$$\oiint$$

3.2.5 Elliptische Regression nach MKQ - Drehen und Zentrieren der Ellipse

Zentrieren und Rückkippen einer Ellipse, gewonnen aus der Regression nach der Methode der kleinsten Quadrate



Centering and tilting back an ellipse

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 8. Juli 2017 – Letzte Revision: 13. Juni 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Durchführung Drehung und Zentrierung **5**
2.1 Verschiebung in den Ellipsenmittelpunkt 5
2.2 Drehung des Systems 6
2.3 Zusammenfassen der Verschiebung und Drehung 7
2.4 Ermittlung der Haupt- und Nebenachse 8
2.5 Ermittlung der neuen Ellipsenfunktion 9

3 Anhang **11**
3.1 Eigenschaft von $\tan\varphi$ 11
3.2 Zusammenfassung 12

4 Beispiele **13**
4.1 Beispiel I – vollständige Auflösung 13
4.2 Beispiel II – unvollständige Auflösung 15
4.3 Beispiel III 17

Literatur

[Dipa] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten - Prinzip HKA. www.Zenithpoint.de.

[Dipb] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten - Prinzip MKQ. www.Zenithpoint.de.

[Dipc] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Ermittlung der abszissen und ordinatenparallelen Ellipse über die Singulärwertzerlegung. www.Zenithpoint.de.

[Rol] Roland Weingärtner, Leon Schiller, Alexander Kinstler, Richard Neumann, Frank Brunner, Eldad Bahat Treidel, Enrico Brusaterra, Matthias Marx, Sven Besendörfer. Impact of Dislocation Networks on Leakage Currents of GaN-on-GaN pn-Diodes: A Statistical Approach Comparing X-Ray Topography with Electrical Characteristics.

1 Einleitung zum Thema

Ziel dieses Arbeitsblattes ist es, die Elliptische Regression über die Methode der kleinsten Quadrate (MKQ) in der Ebene zu vervollständigen. In [Dipb] war am Ende eine unzentrierte und gekippte Ellipse als Ergebnis ermittelt. Diese soll zentriert und zurückgekippt werden. Die Eigenschaften der Varianzen als ein Indikator wird aufgezeigt. Einleitung

Für die weitere Nutzung der in [Dipb] gewonnenen Berechnungsgrundlagen, werden diese auf die Varianz- bzw. Kovarianzdarstellung umgestellt. So gilt für die Anstiege und Inhomogenitäten der Haupt und Nebenachse:

$$a = \frac{\{x\} \cdot \{y\} - n \cdot \{x \cdot y\}}{\{x\}^2 - n \cdot \{x^2\}} \qquad b = \frac{\{x \cdot y\} \cdot \{x\} - \{y\} \cdot \{x^2\}}{\{x\}^2 - n \cdot \{x^2\}}$$

$$c = \frac{n \cdot \{x^2\} - \{x\}^2}{\{x\} \cdot \{y\} - n \cdot \{x \cdot y\}} \qquad d = \frac{\{y\} - c \cdot \{x\}}{n}$$

Folgende Zusammenhänge sind bekannt:

$$\{x\} = n \cdot \overline{x} = x_M \qquad \{y\} = n \cdot \overline{y} = y_M$$

$$\{x \cdot y\} = C \qquad \{x^2\} = V_{XX}$$

Damit ergibt sich letztendlich für a, b, c und d:

$$a = \frac{n \cdot x_M \cdot y_M - C}{n \cdot x_M^2 - V_{XX}} \qquad b = \frac{C \cdot x_M - y_M \cdot V_{XX}}{n \cdot x_M^2 - V_{XX}}$$

$$c = \frac{V_{XX} - n \cdot x_M^2}{n \cdot x_M \cdot y_M - C} \qquad d = y_M - c \cdot x_M$$

Für die zentrierte, jedoch noch gekippte Ellipse gilt dann mit $x_M = y_M = 0$:

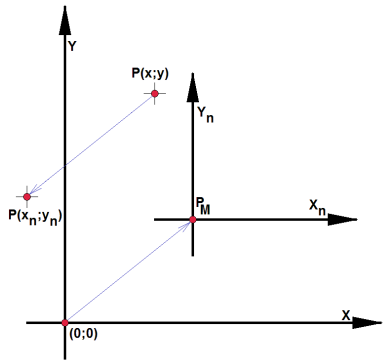
$$a^{x_M = y_M = 0} = +\frac{C}{V_{XX}} \qquad b^{x_M = y_M = 0} = 0$$

$$c^{x_M = y_M = 0} = -\frac{V_{XX}}{C} \qquad d^{x_M = y_M = 0} = 0$$

2 Durchführung der Drehung und Zentrierung

2.1 Verschiebung des Systems in den Ellipsenmittelpunkt $P_M\left(x_M, y_M\right)$

Der erste Schritt ist es, die Ellipse zu zentrieren. Dazu wird das Koordinatensystem in den Mittelpunkt der Ellipse verschoben, Bekannt sind der Mittelpunkt der Ellipse mit $P_M\left(x_M, y_M\right)$ Verschiebung



und

$$x_M = \bar{X} = \frac{\{X_i\}}{n} \qquad y_M = \bar{Y} = \frac{\{Y_i\}}{n}$$

aus der Verschiebung ergeben sich neue Datenpunktangaben $P_i\left(x_i; y_i\right)$ mit:

$$x_n = x - x_M \qquad y_n = y - y_M$$

Beispiel aus [Dipa]:

i	x_i	y_i	x_n	y_n
1	128	100	-567	-349
2	256	250	-439	-199
3	440	510	-255	+61
4	640	160	-55	-289
5	768	400	+73	-49
6	896	520	+201	+71
7	1152	750	+457	+301
8	1280	900	+585	+451
$\sum$	5560	3590	0	≈ 0

Mit:

$$x_M = \frac{5560}{8} = 695 \qquad y_M = \frac{3590}{8} = 449$$

Und aus [Dipa]:

$$V_{XX} = \left(x_i - x_M\right)^2 \qquad C = \left(x_i - x_M\right) \cdot \left(y_i - y_M\right) \qquad V_{YY} = \left(y_i - y_M\right)^2$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 1.179.064 \qquad C = 697.670 \qquad V_{YY} = 550.088$$

$\Rightarrow$

$$a = \frac{C}{V_{XX}} = \frac{697670}{1179064} = 0,5917$$

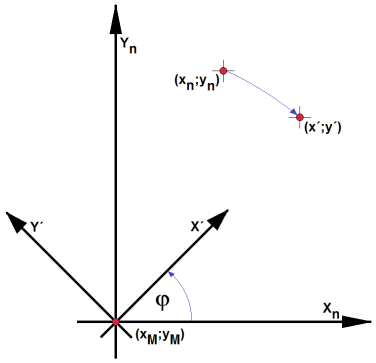
Sowie aus [Dipb]:

$$a = 0,5928$$

2.2 Drehung des Systems auf die Abszisse $Y^{(b=0)}$

Drehung

Die nun zentrierte jedoch noch gekippte Ellipse wird nun abszissenparallel gestellt. Dazu wird der bekannte Kippwinkel φ der Ellipse genutzt. Die Vorzeichen werden so gesetzt, dass eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn ein positives φ erfordert.



$\Rightarrow$

$$x' = x_n \cdot \cos\varphi + y_n \cdot \sin\varphi \qquad y' = y_n \cdot \cos\varphi - x_n \cdot \sin\varphi$$

Auch für den Winkel φ gibt es aus der HKA eine Berechnungsgrundlage.

$$\varphi = \arctan a = \arctan \frac{C}{V_{XX}}$$

$\Rightarrow$

$$x' = \frac{x_n + y_n \cdot a}{\sqrt{1+a^2}} \qquad y' = \frac{y_n - x_n \cdot a}{\sqrt{1+a^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x' = \frac{V_{XX} \cdot x_n + y_n \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}} \qquad y' = \frac{V_{XX} \cdot y_n - x_n \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}}$$

Damit ist die Ellipse zentriert und ungekippt. Das genutzte Beispiel wird weiter entwickelt.

i	x_n	y_n	x'	y'
1	-567	-349	-666	-11
2	-439	-199	-479	+53
3	-255	+61	-188	+183
4	-55	-289	-195	-221
5	+73	-49	+38	-79
6	+201	+71	+209	-41
7	+457	+301	+547	+26
8	+585	+451	+733	+90
$\sum$	0	≈ 0	≈ 0	≈ 0

2.3 Zusammenfassen von Verschiebung und Drehung

Die Berechnungsgrundlagen für die Verschiebung und Drehung können zusammen gefasst werden. Daraus ergeben sich die folgenden Gesamtgleichungen:

$$x_n = x - x_M \qquad y_n = y - y_M$$

Mit:

$$x' = \frac{V_{XX} \cdot x_n + y_n \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}} \qquad y' = \frac{V_{XX} \cdot y_n - x_n \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x' = \frac{V_{XX} \cdot (x - x_M) + (y - y_M) \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}} \qquad y' = \frac{V_{XX} \cdot (y - y_M) - (x - x_M) \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}}$$

2.4 Neuermittlung von Haupt- und Nebenachse $Y^{(\varphi=0°)}, Y^{(\varphi=90°)}$

Achsen

Die allgemeine Berechnungsgrundlage der Haupt- und Nebenachse der Ellipse ist aus [Dipb] gegeben mit:

$$Y^{(\varphi,1)} = a \cdot X + b \qquad Y^{(\varphi,2)} = c \cdot X + d$$

Damit sind die neuen Achsen sämtlichst definiert.

$$Y^{(\varphi=0°)} = a^{(\varphi=0°)} \cdot X + b^{(\varphi=0°)} \qquad Y^{(\varphi=90°)} = c^{(\varphi=90°)} \cdot X + d^{(\varphi=90°)}$$

$\Rightarrow$

$$Y^{(\varphi=0°)} = +\frac{C}{V_{XX}} \cdot X \qquad Y^{(\varphi=90°)} = -\frac{V_{XX}}{C} \cdot X$$

Ideal müsste die Achse $Y^{(\varphi=90°)}$ senkrecht auf $Y^{(\varphi=0°)}$ stehen. Daraus folgt, dass $C \to 0$ gilt mit $V_{XX} \neq 0$. Der Winkel zwischen den Achsen ist demnach ein Indikator der linearen Regression nach der Methode der kleinsten Quadrate.

$$\tan\varphi = -\frac{V_{XX}}{C}$$

2.5 Ermitteln der neuen Ellipsenfunktion $Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)}$

Aus den gewonnen Werten x' und y' kann die Ellipsenfunktion ermittelt werden. Die allgemeine Berechnungsgrundlage aus [Dipb] ist gegeben mit: Ellipse

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = y_M + \frac{B}{A} \cdot (x - x_M) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_M)^2}$$

Der Kippwinkel φ der neugewonnenen Ellipse ist Null, da diese ungekippt nun vorliegt. Gleichzeitig fällt x_M und y_M weg, da die Zentrierung abgeschlossen ist.

$$Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)} = \frac{B}{A} \cdot x \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - x^2}$$

Für ein $\varphi = 0$ ist der Anstieg einer Achse $a = 0$. Für die Koeffizienten A und B ist dann bekannt:

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} \qquad B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2}$$

$\Rightarrow$

$$A^{(\varphi=0)} = f^2 \qquad B^{(\varphi=0)} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)} = \pm \frac{e}{f} \cdot \sqrt{f^2 - x^2}$$

Die Haupt- und die Nebenachse ist definiert.

$$e^2 = \frac{V_{YY}}{n} \qquad f^2 = \frac{V_{XX}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)} = \pm \sqrt{\frac{V_{YY}}{V_{XX}}} \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{n} - x^2}$$

Für vorliegendes Beispiel ergibt sich somit ein $Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)}$ von:

i	x'	y'	x'^2	y'^2	$x' \cdot y'$
1	-666	-11	443.556	121	+7.326
2	-479	+53	229.441	2.809	-25.387
3	-188	+183	35.344	33.489	-34.404
4	-195	-221	38.025	48.841	+43.095
5	+38	-79	1.444	6.241	-3.002
6	+209	-41	43.681	1.681	-8.569
7	+547	+26	299.209	676	+14.222
8	+733	-90	537.289	8.100	+65.970
$\sum$	≈ 0	0	1.627.989	101.958	+59.251

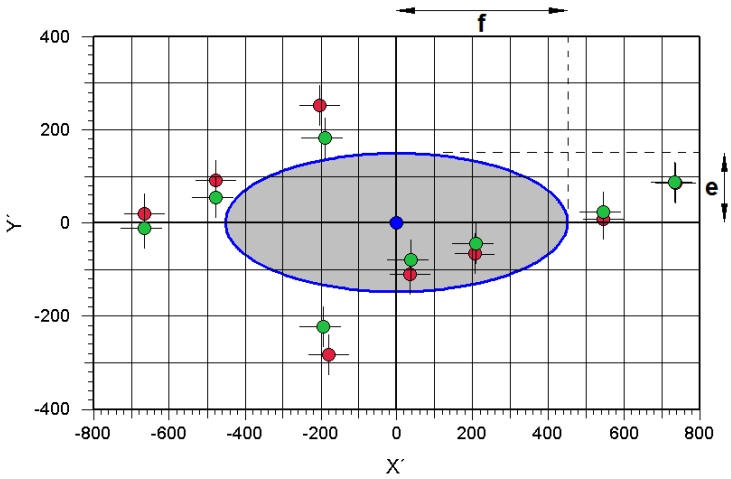
$$V_{XX} = 1.627.989 \qquad V_{YY} = 101.958$$

$$C = C_{XY} = C_{YX} = 59.251$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)} = \pm \sqrt{\frac{101958}{1627989}} \cdot \sqrt{\frac{1627989}{8} - x^2} = \pm \sqrt{12744,75 - 0,0626 \cdot x^2}$$

Die grafische Darstellung dazu folgend, wobei ROT ermittelte Datenpunkte aus der Hauptkomponentenanalyse (HKA) und GRÜN die nach der Methode der kleinsten Quadrate (MKQ) darstellt.



Mit:

$$e = \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} = 112,9 \qquad f = \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} = 451,1$$

Und:

$$\varphi = -\arctan\frac{V_{XX}}{C} = -87,9^\circ \equiv -0,488 \cdot \pi$$

Aus Interesse soll die gedrehte Kovarianz ermittelt werden. Aus [Dipc] folgt:

$$C^{(\varphi)} = \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \left(\frac{V_{YY}}{n} - \frac{V_{XX}}{n}\right)$$

$\Rightarrow$

$$C^{(\varphi=0)} = 0$$

Die für die Ellipsendrehung verantwortliche gedrehte Kovarianz $C^{(\varphi=0)}$ ist gleich Null.

3 Anhang

3.1 Eigenschaft und Rolle von $\tan\varphi$

Die allgemeine Berechnungsgrundlage der Haupt- und Nebenachse der zentrierten und ungekippten Ellipse ist gegeben mit:

$$Y^{(\varphi=0^\circ)} = \frac{C}{V_{XX}} \cdot X \qquad\qquad Y^{(\varphi=90^\circ)} = -\frac{V_{XX}}{C} \cdot X$$

Der Indikator ist definiert mit:

$$\tan\varphi = -\frac{V_{XX}}{C}$$

Da die Summe ständig positiver Zahlen ein $V_{XX} > 0$ impliziert, für C das jedoch nicht gilt, daher auch den Wert 0 annehmen kann, sind zwei globale Fälle unterscheidbar.

- $\tan\varphi = \pm\infty$

Die Haupt- und die Nebenachse sind orthogonal zueinander. Die Varianzen sind auflösbar / unterscheidbar.

- $\tan\varphi = 0$

Die Haupt- und die Nebenachse sind identisch. Es liegt eine Kreisregression vor. Die Varianzen sind nicht auflösbar / unterscheidbar.

3.2 Zusammenfassung der Berechnungsgrundlagen

Zusammenfassung

Das Verschieben und Drehen eines Datensatzes im Zusammenhang mit der Elliptischen Regression erfolgt durch folgende Berechnungsgrundlage.

$$x' = \frac{V_{XX} \cdot (x - x_M) + (y - y_M) \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}} \qquad y' = \frac{V_{XX} \cdot (y - y_M) - (x - x_M) \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}}$$

Wobei $P_i\,(x_i; y_i)$ den alten Datenpunkt und $P_i\,(x_i'; y_i')$ den neuen darstellt.

Die nun zentrierte und ungekippte Ellipse besitzt die Form:

$$Y_{1;2}^{'(\varphi' = x_M' = y_M' = 0)} = \pm\sqrt{\frac{V_{YY}'}{V_{XX}'}} \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}'}{n} - x^2}$$

Mit den Varianzen V_{XX}' und V_{YY}'.

Die Haupt- und Nebenachse besitzen einen Winkel φ'. Dieser ist definiert durch:

$$\tan\varphi' = -\frac{V_{XX}'}{C'}$$

Idealerweise mit dem Wert 90°. Bedeutet, dass die Kovarianz C' des Datensatzes $P_i'\,(x_i'; y_i')$ gegen Null geht. Ist das der Fall, konnten die Varianzen des Originaldatensatzes $P_i\,(x_i; y_i)$ vollständig aufgelöst werden.

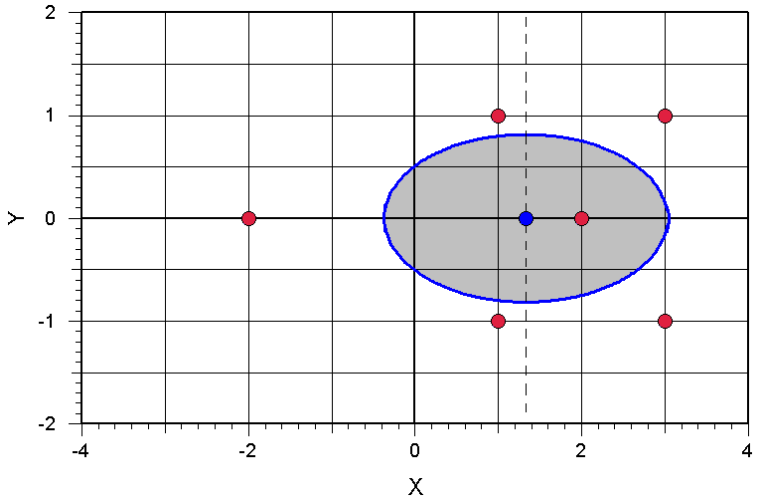
4 Beispiele

4.1 Beispiel I – vollständige Auflösung

Gegeben ist folgender Datensatz Beispiel I

i	x_i	y_i	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$	$(x_i - x_M) \cdot (y_i - y_M)$
1	+3	-1	2,778	1	-1,667
2	-2	0	11,112	0	0,000
3	+1	+1	0,112	1	-0,334
4	+1	-1	0,112	1	+0,334
5	+2	0	0,445	0	0,000
6	+3	+1	2,778	1	+1,667
$\sum$	+8	0	17,337	4	0,000

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 17,337 \qquad C = 0 \qquad V_{YY} = 4$$

$\Rightarrow$

$$f = \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} = 1,700 \qquad e = \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} = 0,816$$

Mit:

$$y_H = 0 \qquad x_N = 1,334$$

Bei:

$$x_M = \frac{8}{6} = 1,334 \qquad y_M = \frac{0}{6} = 0$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = 2,890 \qquad B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = y_M + \frac{B}{A} \cdot (x - x_M) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_M)^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \pm 0,480 \cdot \sqrt{2,890 - (x - 1,334)^2}$$

Sowie:

$$\tan \varphi = -\frac{V_{XX}}{C} = -\infty$$

$\Rightarrow$

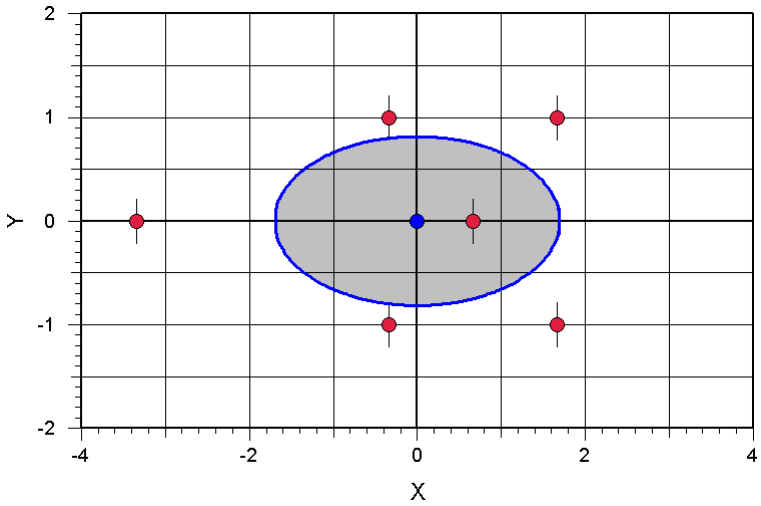
$$\varphi = 90°$$

Damit können die Varianzen vollständig aufgelöst werden.

Die Ermittlung der Werte x' und y'.

i	x_i	y_i	x'_i	y'_i	$(x'_i - x'_M)^2$	$(y'_i - y'_M)^2$	$(x'_i - x'_M) \cdot (y'_i - y'_M)$
1	+3	-1	+1,667	-1	2,779	1	-1,667
2	-2	0	-3,334	0	11,116	0	0,000
3	+1	+1	-0,334	+1	0,112	1	-0,334
4	+1	-1	-0,334	-1	0,112	1	+0,334
5	+2	0	+0,667	0	0,445	0	0,000
6	+3	+1	+1,667	+1	2,779	1	+1,667
$\sum$	+8	0	0	0	17,334	4	0

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 17,334 \qquad C = 0 \qquad V_{YY} = 4$$

$\Rightarrow$

$$f = \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} = 1,700 \qquad e = \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} = 0,816$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi = x_M = y_M = 0)} = \pm\sqrt{\frac{V_{YY}}{V_{XX}}} \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{n} - x^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi = x_M = y_M = 0)} = \pm 0,480 \cdot \sqrt{2,890 - x^2}$$

Sowie:

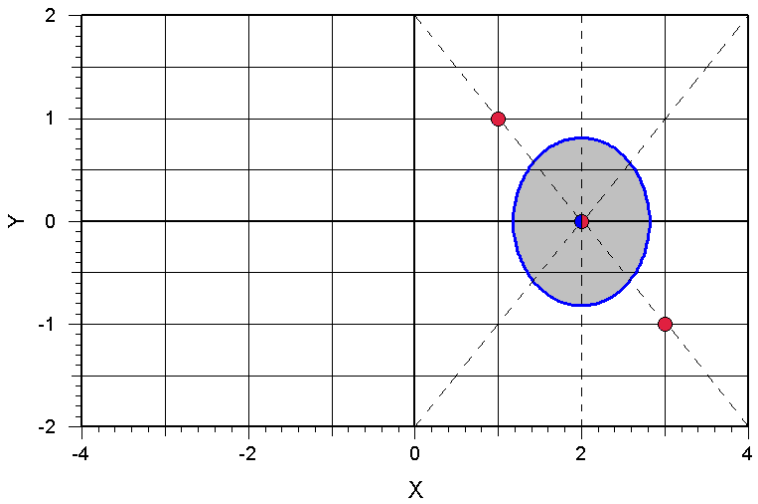
$$\tan\varphi = -\frac{V_{XX}}{C} = -\infty \qquad \rightarrow \qquad \varphi = 90°$$

4.2 Beispiel II – unvollständige Auflösung

Gegeben ist folgender Datensatz Beispiel II

i	x_i	y_i	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$	$(x_i - x_M) \cdot (y_i - y_M)$
1	3	-1	1	1	-1
2	2	0	0	0	0
3	1	+1	1	1	-1
4	1	+1	1	1	-1
5	2	0	0	0	0
6	3	-1	1	1	-1
$\sum$	12	0	4	4	-4

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 4 \qquad C = -4 \qquad V_{YY} = 4$$

Es liegt eine Kreisregression vor.

$$f = \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} = 0,816 \qquad e = \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} = 0,816$$

Mit Linearer Regression – MKQ:

$$y_{H;MKQ} = -x + 2 \qquad y_{N;MKQ} = x - 2$$

Mit Linearer Regression – HKA:

$$y_{H;HKA} = 0 \qquad x_{N;HKA} = 2$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{e^2 + f^2}{2} = 0,667 \qquad B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = \frac{e^2 - f^2}{2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = y_M + \frac{B}{A} \cdot (x - x_M) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_M)^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \pm\sqrt{0,667 - (x - 2)^2}$$

Bei:

$$x_M = \frac{12}{6} = 2 \qquad y_M = \frac{0}{6} = 0$$

Sowie:

$$\tan\varphi = -\frac{V_{XX}}{C} = 1$$

$\Rightarrow$

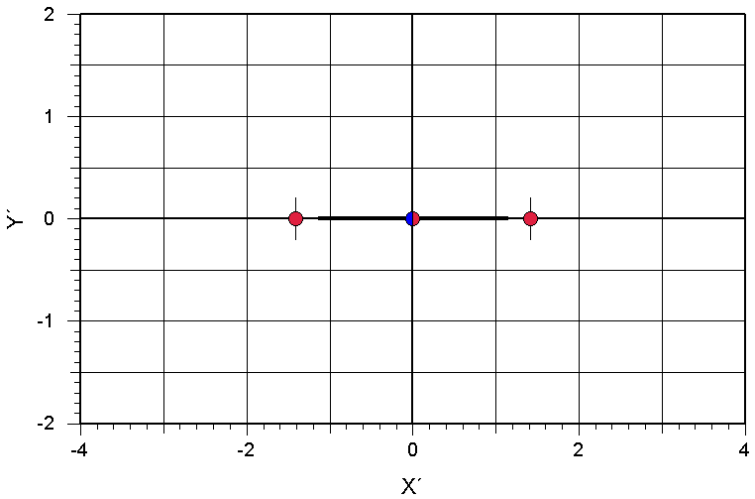
$$\varphi = 45°$$

Damit können die Varianzen nicht aufgelöst werden.

Die Ermittlung der Werte x' und y'.

i	x_i	y_i	x'_i	y'_i	$(x'_i - x'_M)^2$	$(y'_i - y'_M)^2$	$(x'_i - x'_M) \cdot (y'_i - y'_M)$
1	3	-1	$+\sqrt{2}$	0	2	0	0
2	2	0	0	0	0	0	0
3	1	+1	$-\sqrt{2}$	0	2	0	0
4	1	+1	$-\sqrt{2}$	0	2	0	0
5	2	0	0	0	0	0	0
6	3	-1	$+\sqrt{2}$	0	2	0	0
$\sum$	12	0	0	0	8	0	0

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 8 \qquad C = 0 \qquad V_{YY} = 0$$

Es liegt eine Kreisregression vor.

$$f = \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} = 1,155 \qquad e = \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi = x_M = y_M = 0)} = \pm\sqrt{\frac{V_{YY}}{V_{XX}}} \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{n} - x^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi = x_M = y_M = 0)} = 0$$

Sowie:

$$\tan\varphi = -\frac{V_{XX}}{C} = -\infty \qquad \rightarrow \qquad \varphi = 90°$$

4.3 Beispiel III

[Rol]

Nach Messwerten in [Rol] sind in [Dipa] Datenpunkte zu einer Elliptischen Regression angegeben.

i	X_i	Y_i	$(X_i - X_M) \cdot (Y_i - Y_M)$
1	+0, 192 2	-6, 340 0	+0, 123 957
2	+0, 014 9	-7, 213 8	-0, 058 961
3	-0, 208 7	-6, 511 2	-0, 022 972
4	-0, 001 9	-6, 610 3	+0, 015 107
5	+0, 031 8	-6, 565 2	+0, 026 216
6	-0, 008 3	-6, 662 1	+0, 008 872
7	-0, 320 6	-6, 644 1	-0, 021 696
8	-0, 592 7	-7, 436 8	+0, 331 369
8	-0, 893 3	-53, 983 5	+0, 401 892

$X_i \cdot X_i$	$X_i \cdot Y_i$	$(X_i - X_M)^2$	$(Y_i - Y_M)^2$
+0, 036 941	-1, 218 548	+0, 092 333	+0, 166 413
+0, 000 222	-0, 107 486	+0, 016 018	+0, 217 027
+0, 043 556	+1, 358 889	+0, 009 416	+0, 056 045
+0, 000 004	+0, 012 560	+0, 012 048	+0, 018 944
+0, 001 011	-0, 208 773	+0, 020 582	+0, 033 393
+0, 000 069	+0, 055 295	+0, 010 684	+0, 007 368
+0, 102 784	+2, 130 098	+0, 043 655	+0, 010 782
+0, 351 293	+4, 407 791	+0, 231 397	+0, 474 531
+0, 535 880	+6, 429 826	+0, 436 133	+0, 984 503

Woraus sich folgende Werte ergeben:

$$X_m = \frac{\{X_i\}}{n} = \frac{-0,8933}{8} = -0,112 \qquad Y_m = \frac{\{Y_i\}}{n} = \frac{-53,9835}{8} = -6,748$$

Sowie:

$$V_{XX} = \left\{(X_i - X_m)^2\right\} = 0,436133 \approx 0,436$$
$$V_{YY} = \left\{(Y_i - Y_m)^2\right\} = 0,984503 \approx 0,984$$
$$C_{XY} = C_{YX} = C = \{(X_i - X_m) \cdot (Y_i - Y_m)\} = 0,401892 \approx 0,402$$

Damit sind die neuen Werte für X_i' und Y_i' und weitere berechenbar.

i	X_i	Y_i	X_i'	Y_i'
1	+0, 192 2	-6, 340 0	+0, 500	+0, 094
2	+0, 014 9	-7, 213 8	-0, 223	-0, 428
3	-0, 208 7	-6, 511 2	+0, 089	+0, 240
4	-0, 001 9	-6, 610 3	+0, 174	+0, 027
5	+0, 031 8	-6, 565 2	+0, 229	+0, 037
6	-0, 008 3	-6, 662 1	+0, 134	-0, 007
7	-0, 320 6	-6, 644 1	-0, 083	+0, 218
8	-0, 592 7	-7, 436 8	-0, 821	-0, 181
8	-0, 893 3	-53, 983 5	0	0

i	$X'_i \cdot X'_i$	$Y'_i \cdot Y'_i$	$X'_i \cdot Y'_i$
1	+0, 250	+0, 009	+0, 047
2	+0, 050	+0, 184	+0, 095
3	+0, 008	+0, 058	+0, 021
4	+0, 030	+0, 001	+0, 005
5	+0, 053	+0, 001	+0, 008
6	+0, 018	+0, 000	-0, 001
7	+0, 007	+0, 048	-0, 018
8	+0, 673	+0, 033	+0, 148
8	+1, 089	+0, 334	+0, 305

Fortfahrend die zentrierte und ungekippte Ellipse besitzt die Form:

$$V'_{XX} = \left\{ {X'_i}^2 \right\} = 1,089$$
$$V'_{YY} = \left\{ {Y'_i}^2 \right\} = 0,334$$
$$C'_{XY} = C'_{YX} = C' = \{X'_i \cdot Y'_i\} = 0,305$$

$\Rightarrow$

$$Y'_{1;2} = \pm 0,554 \cdot \sqrt{0,136 - x^2}$$

Die Winkel $\tan\varphi$ und $\tan\varphi'$ der unzentrierten und der zentrierten Ellipse im Vergleich.

$$\tan\varphi = -\frac{V_{XX}}{C} = -\frac{0,436}{0,402} = -1,085 \qquad \tan\varphi' = -\frac{V'_{XX}}{C'} = -\frac{1,089}{0,305} = -3,570$$

$\Rightarrow$

$$\varphi = -0,826 \equiv -47,334^\circ \qquad \varphi' = -1,298 \equiv -74,382^\circ$$

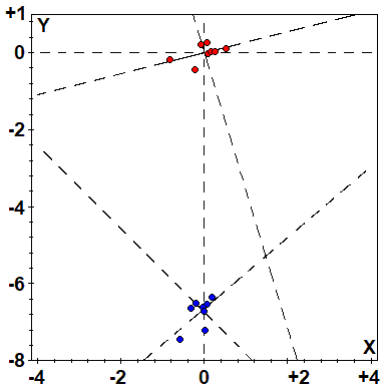
$\Rightarrow$

$$\varphi_\perp = -47,334^\circ + 90^\circ = +42,666^\circ \qquad \varphi'_\perp = -74,382^\circ + 90^\circ = +15,618^\circ$$

Die Korrelation ρ und ρ' dazu.

$$\rho_{XY} = \frac{C}{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}} = \frac{0,402}{\sqrt{0,436 \cdot 0,984}} = 0,614$$
$$\rho'_{XY} = \frac{C'}{\sqrt{V'_{XX} \cdot V'_{YY}}} = \frac{0,305}{\sqrt{1,089 \cdot 0,334}} = 0,506$$

Die grafische Darstellung der durchgeführten Drehung und Zentrierung der Datenpunkte. Wobei blau den originale Datensatz darstellt und rot den gedrehten und zentrierten.



Über [Dipb] ist die unzentrierte Ausgangsellipse bekannt.

$$Y = -6,748 + 0,395 \cdot (X + 0,112) \pm 0,955 \cdot \sqrt{0,086 - (X + 0,112)^2}$$

- **Fall 1**

Die der zentrierten und gedrehten Datenpunkte ist ermittelbar. [1]

$$e^2 = \frac{\{X_i'^2\}}{n} = \frac{1,089}{8} = 0,136 \qquad f^2 = \frac{\{Y_i'^2\}}{n} = \frac{0,334}{8} = 0,042$$

Mit

$$a = \tan \varphi_\perp' = \tan(15,618°) = 0,280 \qquad a^2 = 0,078$$

ergibt sich nach [Dipb] für die Formfaktoren A und B

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{0,136 \cdot 0,078 + 0,042}{1 + 0,078} = +0,049$$
$$B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = 0,280 \cdot \frac{0,042 - 0,136}{1 + 0,078} = -0,024$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e \cdot f}{A} = \frac{\sqrt{0,136 \cdot 0,042}}{0,049} = +1,542 \qquad \frac{B}{A} = -\frac{0,024}{0,049} = -0,490$$

Die Funktionsgleichung Y' der gesuchten Ellipse ist somit definiert.

$$Y' = \frac{B}{A} \cdot X \pm \frac{e \cdot f}{A} \cdot \sqrt{A - X^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y' = -0,490 \cdot X \pm 1,542 \cdot \sqrt{0,049 - X^2}$$

- **Fall 2**

Die der zentrierten und gedrehten Datenpunkte ist ermittelbar.

$$e^2 = \frac{\{Y_i'^2\}}{n} = \frac{0,334}{8} = 0,042 \qquad f^2 = \frac{\{X_i'^2\}}{n} = \frac{1,089}{8} = 0,136$$

Mit

$$a = \tan \varphi' = \tan(-74,382°) = -3,577 \qquad a^2 = 12,797$$

ergibt sich nach [Dipb] für die Formfaktoren A und B

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{0,042 \cdot 12,797 + 0,136}{1 + 12,797} = +0,049$$
$$B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = -3,577 \cdot \frac{0,136 - 0,042}{1 + 12,797} = -0,024$$

Weiter wie Fall 1. [2]

[1] In [Dipb] ist erklärt, dass für die Hauptachse bei $\varphi_\perp'$ gilt $f^2 > e^2$. Für die Nebenachse dementsprechend $f^2 < e^2$.

[2] Das dem so ist, lässt sich nachweisen über:

$$A_\leftrightarrow = \frac{e^2 \cdot a_\leftrightarrow^2 + f^2}{1 + a_\leftrightarrow^2} \qquad A_\updownarrow = \frac{f^2 \cdot a_\updownarrow^2 + e^2}{1 + a_\updownarrow^2}$$

Mit:

$$A_\leftrightarrow = A_\updownarrow$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e^2 \cdot a_\leftrightarrow^2 + f^2}{1 + a_\leftrightarrow^2} = \frac{f^2 \cdot a_\updownarrow^2 + e^2}{1 + a_\updownarrow^2}$$

$\Rightarrow$

$$a_\leftrightarrow^2 = \frac{1}{a_\updownarrow^2}$$

- **Fall 3**

Die der zentrierten und gedrehten Datenpunkte ist ermittelbar.

$$e^2 = \frac{\{Y_i'^2\}}{n} = \frac{0,334}{8} = 0,042 \qquad f^2 = \frac{\{X_i'^2\}}{n} = \frac{1,089}{8} = 0,136$$

Mit

$$a = \tan \varphi'_{\perp} = \tan(15,618°) = 0,280 \qquad a^2 = 0,078$$

ergibt sich nach [Dipb] für die Formfaktoren A und B

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{0,042 \cdot 0,078 + 0,136}{1 + 0,078} = 0,129$$
$$B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = 0,280 \cdot \frac{0,136 - 0,042}{1 + 0,078} = 0,024$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e \cdot f}{A} = \frac{\sqrt{0,042 \cdot 0,136}}{0,129} = 0,586 \qquad \frac{B}{A} = \frac{0,024}{0,129} = 0,186$$

Die Funktionsgleichung Y' der gesuchten Ellipse ist somit definiert.

$$Y' = \frac{B}{A} \cdot X \pm \frac{e \cdot f}{A} \cdot \sqrt{A - X^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y' = 0,186 \cdot X \pm 0,586 \cdot \sqrt{0,129 - X^2}$$

Sowie:

$$B_{\leftrightarrow} = a_{\leftrightarrow} \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a_{\leftrightarrow}^2} \qquad B_{\updownarrow} = a_{\updownarrow} \cdot \frac{e^2 - f^2}{1 + a_{\updownarrow}^2}$$

Mit:

$$B_{\leftrightarrow} = B_{\updownarrow}$$

$\Rightarrow$

$$a_{\leftrightarrow} \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a_{\leftrightarrow}^2} = a_{\updownarrow} \cdot \frac{e^2 - f^2}{1 + a_{\updownarrow}^2}$$

$\Rightarrow$

$$a_{\leftrightarrow}^2 + \frac{1 + a_{\updownarrow}^2}{a_{\updownarrow}} \cdot a_{\leftrightarrow} + 1 = 0$$

$\Rightarrow$

$$2 \cdot a_{\leftrightarrow 1;2} = -\frac{1 + a_{\updownarrow}^2}{a_{\updownarrow}} \pm \frac{1}{a_{\updownarrow}} \cdot \sqrt{\left(1 + a_{\updownarrow}^2\right)^2 - 4 \cdot a_{\updownarrow}^2}$$

Mit der bekannten Bedingung $a_{\leftrightarrow}^2 = a_{\updownarrow}^{-2}$ ergibt sich vereinfacht:

$$a_{\leftrightarrow} \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a_{\leftrightarrow}^2} = a_{\updownarrow} \cdot \frac{e^2 - f^2}{1 + a_{\updownarrow}^2}$$

Mit:

$$a_{\leftrightarrow}^2 = \frac{1}{a_{\updownarrow}^2}$$

$\Rightarrow$

$$a_{\leftrightarrow} \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + \frac{1}{a_{\updownarrow}^2}} = a_{\updownarrow} \cdot \frac{e^2 - f^2}{1 + a_{\updownarrow}^2}$$

$\Rightarrow$

$$a_{\leftrightarrow} = -\frac{1}{a_{\updownarrow}}$$

- **Fall 4**

Die der zentrierten und gedrehten Datenpunkte ist ermittelbar.

$$e^2 = \frac{\{X_i'^2\}}{n} = \frac{1,089}{8} = 0,136 \qquad f^2 = \frac{\{Y_i'^2\}}{n} = \frac{0,334}{8} = 0,042$$

Mit

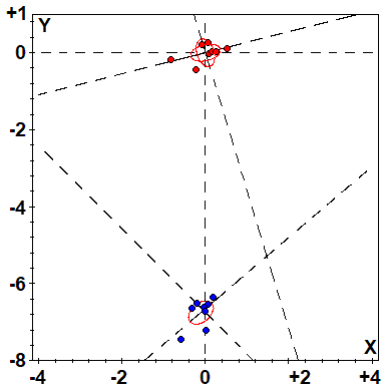
$$a = \tan\varphi' = \tan(-74,382°) = -3,577 \qquad a^2 = 12,797$$

ergibt sich nach [Dipb] für die Formfaktoren A und B

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{0,136 \cdot 12,797 + 0,042}{1 + 12,797} = 0,129$$
$$B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = -3,577 \cdot \frac{0,042 - 0,136}{1 + 12,797} = 0,024$$

Weiter wie Fall 3.

Die grafische Darstellung aller Fälle folgend dazu.

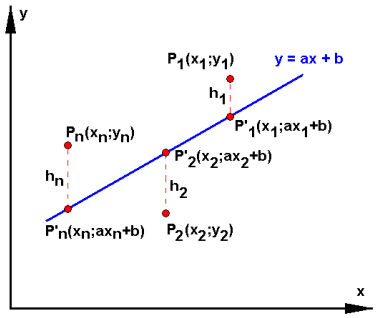


LaTeX 2_ε

$$\oiint$$

3.2.6 Kreisregression nach der Reduktionsmethode

Die Kreisregression als ein Sonderfall der Elliptischen Regression



die Reduktionsmethode

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 16. Februar 2015 – Letzte Revision: 7. Januar 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Der Übergang der Elliptischen Regression zur Kreisregression. 3

1.1 Die Kreisregression für die ungekippte Ellipse $\varphi = 0$ 4

1.2 Die Kreisregression für die gekippte Ellipse $\varphi \neq 0$ 5

1.3 Der Kreismittelpunkt $P_{MP}\,(x_{MP}; y_{MP})$ 6

2 Die Reduzierung der Elliptischen Relationen durch den Übergang $e^2 = f^2 \rightarrow r^2$ 7

2.1 Die Anstiege a und c 7

2.2 Der Winkel φ 8

2.3 Die A- und B- Koeffizienten 9

2.4 Sonstige Relationen 11

3 Die Ermittlung des Radiuses r 13

4 Die Reduzierung der Elliptischen Punktdefinitionen durch den Übergang $e^2 = f^2 \rightarrow r^2$ 15

4.1 MP = Mittelpunkt 15

4.2 WB = Westlicher Brennpunkt 16

4.3 OB = Östlicher Brennpunkt 17

4.4 SZ = Scheinbarer Zenit 18

4.5 SN = Scheinbarer Nadir 19

4.6 WZ = Wahrer Zenit 20

4.7 WN = Wahrer Nadir 21

4.8 OS = Östlicher scheinbarer Scheitelpunkt 22

4.9 WS = Westlicher scheinbarer Scheitelpunkt 23

4.10 OW = Östlicher wahrer Scheitelpunkt 24

4.11 WW = Westlicher wahrer Scheitelpunkt 25

5 Die Reduzierung der Elliptischen Achsdefinitionen durch den Übergang $e^2 = f^2 \to r^2$ 27
5.1 Die Hauptachse y_H 27
5.2 Die Nebenachse y_N 28
5.3 Die Scheitelachse y_S 29
5.4 Die Extremaachse y_E 30

6 Die Reduzierung der Elliptischen Winkelrelationen durch den Übergang $e^2 = f^2 \to r^2$ 31
6.1 Der Winkel α zwischen Abszisse und den Achsen $y_H; y_N; y_S$ und y_E 31
6.2 Der Winkel β zwischen den Achsen $y_H; y_N; y_S$ und y_E 32
6.3 Der Zusammenhang zwischen Korrelationskoeffizient ρ_{XY} und Winkel β 33

7 Vergleich zur Kreisregression nach der „Methode der kleinsten Quadrate“ 35

8 Zusammenfassung 39

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

1 Der Übergang der Elliptischen Regression zur Kreisregression.

In „Elliptische Regression von Datenpunkten“ ist eine Möglichkeit der Elliptischen Regression entwickelt worden. Mit Hilfe der dort gefundenen Arbeitsgleichung lässt sich auch eine Kreisregression entwickeln als Sonderfall. Die vorliegende Datei wird sich im folgenden Verlauf ein wenig mit dieser Thematik beschäftigen. Übergang

1.1 Die Kreisregression für die ungekippte Ellipse $\varphi = 0$

[001]ff. Der Übergang von der Ellipse zum Kreis ist gegeben mit der Transformation

$$e^2 = f^2 \to r^2$$

über die allgemeine Ellipsengleichung der ungekippten Ellipse.

$$\frac{(y - y_M)^2}{e^2} + \frac{(x - x_M)^2}{f^2} = 1$$

$\Rightarrow$

$$(y - y_M)^2 + (x - x_M)^2 = r^2$$

Da dies sofort der Kreisgleichung entspricht, ist der Übergang von der Elliptischen Regression zur Kreisregression ohne weitere Randbedingungen erlaubt und möglich.

1.2 Die Kreisregression für die gekippte Ellipse $\varphi \neq 0$

Dann erweitert sich die regressierte Ellipsenfunktion zu:[1]

$$\frac{((x - x_M) \cdot \cos\varphi + (y - y_M) \cdot \sin\varphi)^2}{f^2} + \frac{((y - y_M) \cdot \cos\varphi - (x - x_M) \cdot \sin\varphi)^2}{e^2} = 1$$

$\Rightarrow$

$$(y - y_M)^2 + (x - x_M)^2 = r^2$$

$\Rightarrow$

$$y = y_M \pm \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2}$$

Mit:

$$A = r^2 \qquad B = 0$$

Die A- und B- Koeffizienten aus der Elliptischen Regression.

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} \qquad B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B}{A} = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2}$$

Die goniometrischen Parameter.

$$\sin^2\varphi = \sin^2 \arctan a = \frac{a^2}{1 + a^2}$$

$$\cos^2\varphi = \cos^2 \arctan a = \frac{1}{1 + a^2}$$

$$\cos\varphi \cdot \sin\varphi = \cos\arctan a \cdot \sin\arctan a = \frac{a}{1 + a^2}$$

Der Anstieg der Hauptachse lässt sich über den Korrelationskoeffizienten ρ_{XY} darstellen.

$$\rho_{XY} = a \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$$

Für den Kreis muss gelten:

$$\rho_{XY} = 0 \qquad \sigma_X = \sigma_Y$$

$\Rightarrow$

$$0 = a$$

Der Anstieg der Nebenachse ist über den festgelegten Zusammenhang zwischen a und c zu zeigen.

$$a \cdot c = -1$$

$\Rightarrow$

$$c = -\infty$$

[1] Für die Herleitung der Arbeitsgleichung der Elliptischen Regression siehe „Elliptische Regression von Datenpunkten.“

1.3 Der Kreismittelpunkt $P_{MP}\left(x_{MP}; y_{MP}\right)$

Der Kreismittelpunkt ist weiterhin gemäß der Vorschrift aus der Elliptischen Regression definiert.

$$x_{MP} = \frac{\{x_i\}}{n} \qquad\qquad y_{MP} = \frac{\{y_i\}}{n}$$

Wobei im folgenden $\{\bullet\}$ die Summe der einzelnen Werte entspricht.

2 Die Reduzierung der Elliptischen Relationen durch den Übergang $e^2 = f^2 \to r^2$

Es sind daher die Grenzwerte zu bilden.

reduzierte Relationen

2.1 Die Anstiege a und c

Verschiedene Darstellungsformen des Anstiegs a:

$$\tan\varphi = \frac{B}{A - e^2} = \frac{0}{r^2 - r^2} = \frac{0}{0} = \text{n.def.}$$

Verschiedene Darstellungsformen des Anstiegs c:

$$-\cot\varphi = \frac{e^2 - A}{B} = \frac{r^2 - r^2}{0} = \frac{0}{0} = \text{n.def.}$$

Vereinfachung von a:

$$\frac{B + e^2 \cdot a}{A} = a$$

$\Rightarrow$

$$\frac{0 + r^2 \cdot 0}{r^2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$0 = 0$$

Vereinfachung von c:

$$\frac{-A}{B + e^2 \cdot a} = c$$

$\Rightarrow$

$$\frac{-r^2}{0 + r^2 \cdot 0} = -\infty$$

$\Rightarrow$

$$\frac{-r^2}{0} = -\infty$$

Zusammenhang zwischen den Anstiegen a und c:[2]

$$a \cdot c = -1$$

$\Rightarrow$

$$0 \cdot (-\infty) = -1$$

[2] Hier und nur hier als Grenzwert gültig

2.2 Der Winkel φ

Der $\sin$ des Winkels φ:

$$\frac{a^2}{1+a^2} = \frac{A \cdot a^2 \cdot f^2}{(B \cdot a + A)^2 + e^2 \cdot f^2 \cdot a^2} = \frac{A \cdot a^2}{f^2 + e^2 \cdot a^2} = \sin^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{0^2}{1+0^2} = \frac{r^2 \cdot 0^2 \cdot r^2}{(0 \cdot 0 + r^2)^2 + r^2 \cdot r^2 \cdot 0^2} = \frac{r^2 \cdot 0^2}{r^2 + r^2 \cdot 0^2} = \sin^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{0^2}{1+0^2} = \sin^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$0 = \varphi$$

Der $\cos$ des Winkels φ:

$$\frac{1}{1+a^2} = \frac{A \cdot f^2}{(B \cdot a + A)^2 + e^2 \cdot f^2 \cdot a^2} = \frac{A \cdot e^2}{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2} = \frac{A}{f^2 + e^2 \cdot a^2} = \cos^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{1+0^2} = \frac{r^2 \cdot r^2}{(0 \cdot 0 + r^2)^2 + r^2 \cdot r^2 \cdot 0^2} = \frac{r^2 \cdot r^2}{r^2 \cdot r^2 + (0 - r^2 \cdot 0)^2} = \frac{r^2}{r^2 + r^2 \cdot 0^2} = \cos^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{1+0^2} = \cos^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$0 = \varphi$$

Das Produkt von $\sin$ und $\cos$:

$$\frac{a}{1+a^2} = \frac{1}{a-c} = \frac{A \cdot a}{f^2 + e^2 \cdot a^2} = \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{0}{1+0^2} = \frac{1}{0+\infty} = \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

$\Rightarrow$

$$0 = \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

Sonstige Zusammenhänge und Vereinfachungen:

$$\frac{1-a}{1+a^2} = \cos^2 \varphi - \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \cos \varphi \cdot (\cos \varphi - \sin \varphi)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1-0}{1+0^2} = \cos^2 \varphi - 0 = \cos \varphi \cdot (\cos \varphi - 0)$$

$\Rightarrow$

$$0 = \varphi$$

2.3 Die A- und B- Koeffizienten

Müssen sich per Definition zu 0 oder r^{2n} reduzieren.

Verschiedene Darstellungsformen des Koeffizienten A:

$$\frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{B + e^2 \cdot a}{a} = f^2 - B \cdot a = e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi = A$$

$\Rightarrow$

$$\frac{r^2 \cdot 0^2 + r^2}{1 + 0^2} = \frac{0 + r^2}{1} = r^2 - 0 \cdot 0 = r^2 \cdot \sin^2 \varphi + r^2 \cdot \cos^2 \varphi = r^2$$

$\Rightarrow$

$$r^2 = r^2$$

Verschiedene Darstellungsformen des Koeffizienten B:

$$a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = a \cdot \left(A - e^2\right) = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = B$$

$\Rightarrow$

$$0 = 0$$

Summe von A und B:

$$\left(e^2 + f^2\right) \cdot \left(e^2 - f^2\right) \cdot \sin^2 \varphi + f^4 = e^4 \cdot \sin^2 \varphi + f^4 \cdot \cos^2 \varphi = \frac{e^4 \cdot a^2 + f^4}{1 + a^2} = A^2 + B^2$$

$\Rightarrow$

$$\left(r^2 + r^2\right) \cdot \left(r^2 - r^2\right) \cdot \sin^2 \varphi + r^4 = r^4 \cdot \sin^2 \varphi + r^4 \cdot \cos^2 \varphi = \frac{r^4 \cdot 0^2 + r^4}{1 + 0^2} = r^4 + 0$$

$\Rightarrow$

$$r^4 = r^4$$

Produkt von A und B:

$$\left(e^2 \cdot a^2 + f^2\right) \cdot \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sin \varphi \cdot \cos^3 \varphi = A \cdot B$$

$\Rightarrow$

$$\left(r^2 \cdot 0^2 + r^2\right) \cdot \left(r^2 - r^2\right) \cdot \sin \varphi \cdot \cos^3 \varphi = r^2 \cdot 0$$

$\Rightarrow$

$$0 = 0$$

Produkt von A und B mit dem Anstieg a:

$$\left(e^2 \cdot a^2 + f^2\right) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi = A \cdot a$$

$\Rightarrow$

$$\left(r^2 \cdot 0^2 + r^2\right) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi = r^2 \cdot 0$$

$\Rightarrow$

$$r^2 \cdot 0 = r^2 \cdot 0$$

Sowie:

$$\left(f^2 - e^2\right) \cdot \sin^2 \varphi = B \cdot a$$

$\Rightarrow$

$$\left(r^2 - r^2\right) \cdot \frac{0^2}{1 + 0^2} = 0 \cdot a$$

$\Rightarrow$

$$0 = 0$$

Quotient von A und B:

$$a \cdot \frac{f^2 - e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2} = \frac{B}{A}$$

$\Rightarrow$

$$0 \cdot \frac{r^2 - r^2}{r^2 \cdot 0^2 + r^2} = \frac{0}{r^2}$$

$\Rightarrow$

$$0 = 0$$

Sowie:

$$\frac{f^2}{B} - a = \frac{A}{B}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{r^2}{0} - 0 = \frac{r^2}{0} = \text{n.def.}$$

Verschiedene Zusammenhänge und Vereinfachungen:

$$A \cdot a - B = e^2 \cdot a$$

$\Rightarrow$

$$r^2 \cdot 0 - 0 = r^2 \cdot 0$$

$\Rightarrow$

$$r^2 \cdot 0 = r^2 \cdot 0$$

Sowie:

$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} = \frac{A}{B} + a + c$$

$\Rightarrow$

$$\frac{0^2 + r^2 \cdot r^2}{r^2 \cdot 0} = \frac{r^2}{0} + 0 - \frac{1}{0}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{r^2}{0} = \frac{r^2}{0} = \text{n.def.}$$

Sowie:

$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A} = f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{0^2 + r^2 \cdot r^2}{r^2} = r^2 \cdot \sin^2 \varphi + r^2 \cdot \cos^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$r^2 = r^2$$

Sowie:

$$\frac{B^2 \cdot A}{B^2 + f^2 \cdot e^2} = \left(f^2 - e^2\right)^2 \cdot \frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{0^2 \cdot r^2}{0^2 + r^2 \cdot r^2} = \left(r^2 - r^2\right)^2 \cdot \frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{r^2 \cdot \sin^2 \varphi + r^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

$\Rightarrow$

$$0 = 0$$

Sowie:

$$\frac{A}{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2} = \frac{1}{e^2} \cdot \cos^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{r^2}{r^2 \cdot r^2 + (0 - r^2 \cdot 0)^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \cos^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$0 = \varphi$$

2.4 Sonstige Relationen

Vereinfachung von e:

$$\frac{A \cdot a - B}{a} = \frac{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2}{A} \cdot \cos^2 \varphi = e^2$$

$\Rightarrow$

$$\frac{r^2 - 0}{1} = \frac{r^2 \cdot r^2 + \left(0 - r^2 \cdot 0\right)^2}{r^2} \cdot \frac{1}{1 + 0^2} = r^2$$

$\Rightarrow$

$$r^2 = r^2$$

Vereinfachung von f:

$$A + B \cdot a = f^2$$

$\Rightarrow$

$$r^2 + 0 \cdot 0 = r^2$$

$\Rightarrow$

$$r^2 = r^2$$

Zusammenhang zwischen e und f:

$$A^2 - B^2 + \frac{a^2 - 1}{a} \cdot A \cdot B = A \cdot \left(f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi\right) - B^2 = e^2 \cdot f^2$$

$\Rightarrow$

$$r^4 - 0^2 + \frac{0 - 1}{1} \cdot r^2 \cdot 0 = r^2 \cdot \left(r^2 \cdot \sin^2 \varphi + r^2 \cdot \cos^2 \varphi\right) - 0^2 = r^2 \cdot r^2$$

$\Rightarrow$

$$r^4 = r^4$$

3 Die Ermittlung des Radiuses r

Wie aber nun den Radius r berechnen? Die Berechnungsgrundlage steckt in der allgemeinen Kreisgleichung selbst.

Radius r

$$(y - y_M)^2 + (x - x_M)^2 = r^2$$

Da es sich um eine Regression handelt wird der Radius berechnet aus:

$$\frac{\left\{(y - y_M)^2\right\}}{n} + \frac{\left\{(x - x_M)^2\right\}}{n} = r^2$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_Y^2 + \sigma_X^2 = r^2$$

Wobei die Klammerwerte $\{\bullet\}$ die Summe aller Einzelwerte darstellt.

Beispiel

x_i	y_i	i	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$	r_i^2
128	100	1	321 489	121 627	443 116
256	250	2	192 721	39 502	232 223
440	510	3	65 025	3 752	68 777
640	160	4	3 025	83 376	86 401
768	400	5	5 329	2 377	7 706
896	520	6	40 401	5 077	45 478
1152	750	7	208 849	90 752	299 601
1280	900	8	342 225	203 627	545 852
5 560	3 590	8	1 179 064	550 090	1 729 154

Damit ist gegeben:

$$x_M = \frac{5560}{8} = 695 \qquad y_M = \frac{3590}{8} = 448,75$$

Und:

$$r^2 = \frac{1729154}{8} = 216144,25$$

$\Rightarrow$

$$r = 464,9$$

Wobei vor dem Übergang galt:

$$f^2 = \frac{1179064}{8} = 147383 \qquad e^2 = \frac{550090}{8} = 68761,25$$

$\Rightarrow$

$$f = 383,9 \qquad e = 262,22$$

Aus der Definition von e^2, f^2 und r^2 ist ersichtlich, dass im kartesischen Koordinaten gelten muss:

$$x \perp y$$

$\Rightarrow$

$$r^2 = e^2 + f^2$$

$\Rightarrow$

$$464,9^2 \stackrel{?}{=} 262,22^2 + 383,9^2$$

$\Rightarrow$

$$216144 \overset{!}{=} 216144$$

Sowie:

$$r \leq e + f$$

$\Rightarrow$

$$464,9 \overset{?}{\leq} 262,22 + 383,9$$

$\Rightarrow$

$$464,9 \overset{!}{<} 646,12$$

4 Die Reduzierung der Elliptischen Punktdefinitionen durch den Übergang $e^2 = f^2 \to r^2$

4.1 MP = Mittelpunkt

$$x_{MP} = \frac{\{x_i\}}{n}$$

Sowie:

$$y_{MP} = \frac{\{y_i\}}{n}$$

reduzierte Punktdefinitionen

4.2 WB = Westlicher Brennpunkt

Die lineare Exzentrizität ε_L ist definiert.

$$\varepsilon_L = \sqrt{|\{e^2\} - \{f^2\}|} = \sqrt{|\{r^2\} - \{r^2\}|} = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{WB} = x_{MP} - \varepsilon_L \cdot \cos\varphi$$

$\Rightarrow$

$$x_{WB} = x_{MP}$$

Sowie:

$$y_{WB} = y_{MP} - \varepsilon_L \cdot \sin\varphi$$

$\Rightarrow$

$$y_{WB} = y_{MP}$$

4.3 OB = Östlicher Brennpunkt

$$x_{OB} = x_{MP} + \varepsilon_L \cdot \cos\varphi$$

$\Rightarrow$

$$x_{OB} = x_{MP}$$

Sowie:

$$y_{OB} = y_{MP} + \varepsilon_L \cdot \sin\varphi$$

$\Rightarrow$

$$y_{OB} = y_{MP}$$

4.4 SZ = Scheinbarer Zenit

$$y_{SZ} = y_{MP} + e \cdot \cos\varphi = y_{MP} + r \cdot \cos 0$$

$\Rightarrow$

$$y_{SZ} = y_{MP} + r$$

Sowie:

$$x_{SZ} = x_{MP} - e \cdot \sin\varphi = x_{MP} - r \cdot \sin 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{SZ} = x_{MP}$$

4.5 SN = Scheinbarer Nadir

$$y_{SN} = y_{MP} - e \cdot \cos\varphi = y_{MP} - r \cdot \cos 0$$

$\Rightarrow$

$$y_{SN} = y_{MP} - r$$

Sowie:

$$x_{SN} = x_{MP} + e \cdot \sin\varphi = x_{MP} + r \cdot \sin 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{SN} = x_{MP}$$

4.6 WZ = Wahrer Zenit

$$x_{WZ} = x_{MP} + \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}} = x_{MP} + \left(r^2 - r^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 0 \cdot \cos^2 0}{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{WZ} = x_{MP}$$

Sowie:

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi} = y_{MP} + \sqrt{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WZ} = y_{MP} + r$$

4.7 WN = Wahrer Nadir

$$x_{WN} = x_{MP} - \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}} = x_{MP} - \left(r^2 - r^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 0 \cdot \cos^2 0}{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{WN} = x_{MP}$$

Sowie:

$$y_{WN} = y_{MP} - \sqrt{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi} = y_{MP} - \sqrt{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WN} = y_{MP} - r$$

4.8 OS = Östlicher scheinbarer Scheitelpunkt

$$x_{OS} = x_{MP} + f \cdot \cos\varphi = x_{MP} + r \cdot \cos 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{OS} = x_{MP} + r$$

Sowie:

$$y_{OS} = y_{MP} + f \cdot \sin\varphi = y_{MP} + r \cdot \sin 0$$

$\Rightarrow$

$$y_{OS} = y_{MP}$$

4.9 WS = Westlicher scheinbarer Scheitelpunkt

$$x_{WS} = x_{MP} - f \cdot \cos\varphi = x_{MP} - r \cdot \cos 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{WS} = x_{MP} - r$$

Sowie:

$$y_{WS} = y_{MP} - f \cdot \sin\varphi = y_{MP} - r \cdot \sin 0$$

$\Rightarrow$

$$y_{WS} = y_{MP}$$

4.10 OW = Östlicher wahrer Scheitelpunkt

$$x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi} = x_{MP} + \sqrt{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}$$

$\Rightarrow$

$$x_{OW} = x_{MP} + r$$

Sowie:

$$y_{OW} = y_{MP} + \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi}} = y_{MP} + \left(r^2 - r^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 0 \cdot \cos^2 0}{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{OW} = y_{MP}$$

4.11 WW = Westlicher wahrer Scheitelpunkt

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi} = x_{MP} - \sqrt{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}$$

$\Rightarrow$

$$x_{WW} = x_{MP} - r$$

Sowie:

$$y_{WW} = y_{MP} - \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi}} = y_{MP} - \left(r^2 - r^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 0 \cdot \cos^2 0}{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WW} = y_{MP}$$

5 Die Reduzierung der Elliptischen Achsdefinitionen durch den Übergang $e^2 = f^2 \to r^2$

5.1 Die Hauptachse y_H

$$y_H = a \cdot x_H + b$$

$\Rightarrow$

$$y_H = 0 \cdot x_H + b$$

reduzierte Achsdefinitionen

$\Rightarrow$

$$y_H = b$$

5.2 Die Nebenachse y_N

$$y_N = c \cdot x_N + d$$

$\Rightarrow$

$$y_N = -\infty \cdot \operatorname{sgn} x_N + d$$

5.3 Die Scheitelachse y_S

$$y_S = \frac{B}{A} \cdot x_S + \frac{e^2 \cdot a}{A} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{0}{r^2} \cdot x_S + \frac{r^2 \cdot 0}{r^2} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = b$$

Oder:

$$y_S = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_S + e^2 \cdot \frac{\tan\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \left(r^2 - r^2\right) \cdot \frac{\sin 0 \cdot \cos 0}{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0} \cdot x_S + r^2 \cdot \frac{\tan 0}{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = b$$

Oder:

$$y_S = \frac{f^2 - e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2} \cdot a \cdot x_S + \frac{e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2} \cdot a \cdot \left(1 + a^2\right) \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{r^2 - r^2}{r^2 \cdot 0^2 + r^2} \cdot 0 \cdot x_S + \frac{r^2}{r^2 \cdot 0^2 + r^2} \cdot 0 \cdot \left(1 + 0^2\right) \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = b$$

5.4 Die Extremaachse y_E

$$y_E = \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} \cdot x_E + e^2 \cdot \frac{a \cdot B - f^2}{A \cdot B} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{0^2 + r^2 \cdot r^2}{r^2 \cdot 0} \cdot x_E + r^2 \cdot \frac{0 \cdot 0 - r^2}{r^2 \cdot 0} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \infty \cdot \operatorname{sgn}(x_E - x_{MP}) + b$$

Oder:

$$y_E = \frac{f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi}{(f^2 - e^2) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi} \cdot x_E - \frac{e^2}{(f^2 - e^2) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}{(r^2 - r^2) \cdot \sin 0 \cdot \cos 0} \cdot x_E - \frac{r^2}{(r^2 - r^2) \cdot \sin 0 \cdot \cos 0} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \infty \cdot \operatorname{sgn}(x_E - x_{MP}) + b$$

Oder:

$$y_E = \frac{f^2 \cdot a^2 + e^2}{f^2 - e^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot x_E - \frac{e^2}{f^2 - e^2} \cdot \frac{1 + a^2}{a} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \infty \cdot \operatorname{sgn}(x_E - x_{MP}) + b$$

6 Die Reduzierung der Elliptischen Winkelrelationen durch den Übergang $e^2 = f^2 \to r^2$

6.1 Der Winkel α zwischen Abszisse und den Achsen $y_H; y_N; y_S$ und y_E

Erfolgt mit den betreffenden Anstieg m nach der Berechnungsgrundlage:

reduzierte Winkel

$$\tan\alpha = m$$

$\tan\alpha =$	y_H	y_N	y_S	y_E
Koeffizientendarst.	$\frac{B}{A-e^2}$	$\frac{e^2-A}{B}$	$\frac{B}{A}$	$\frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B}$
Achsendarstellung	a	$-\frac{1}{a}$	$\frac{f^2-e^2}{e^2\cdot a^2+f^2}\cdot a$	$\frac{f^2\cdot a^2+e^2}{f^2-e^2}\cdot\frac{1}{a}$
Goniometrische Darst.	$\tan\varphi$	$-\cot\varphi$	$\frac{\left(f^2-e^2\right)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{e^2\cdot\sin^2\varphi+f^2\cdot\cos^2\varphi}$	$\frac{f^2\cdot\sin^2\varphi+e^2\cdot\cos^2\varphi}{(f^2-e^2)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}$

$\Rightarrow$

$\tan\alpha =$	y_H	y_N	y_S	y_E
Koeffizientendarst.	n.def.	n.def.	0	∞
Achsendarstellung	0	$-\infty$	0	∞
Goniometrische Darst.	n.def.	n.def.	0	∞

6.2 Der Winkel β zwischen den Achsen $y_H; y_N; y_S$ und y_E

Erfolgt mit den betreffenden Anstiegen m_1 und m_2 nach der Berechnungsgrundlage:

$$\tan\beta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$$

$\Rightarrow$

$\tan\beta =$	y_H	y_N	y_S	y_E
y_H	0	∞	$\left\lvert\frac{B-A\cdot a}{A+B\cdot a}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{B\cdot(B-A\cdot a)+e^2\cdot f^2}{B\cdot(A+B\cdot a)+a\cdot e^2\cdot f^2}\right\rvert$
y_N	∞	0	$\left\lvert\frac{A+B\cdot a}{B-A\cdot a}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{B\cdot(A+B\cdot a)+a\cdot e^2\cdot f^2}{B\cdot(B-A\cdot a)+e^2\cdot f^2}\right\rvert$
y_S	$\left\lvert\frac{e^2}{f^2}\cdot\tan\varphi\right\rvert$	$\left\lvert\frac{f^2}{e^2}\cdot\cot\varphi\right\rvert$	0	$\left\lvert\frac{A}{B}\cdot\frac{e^2\cdot f^2}{A^2+B^2+e^2\cdot f^2}\right\rvert$
y_E	$\left\lvert\frac{e^2}{f^2}\cdot\cot\varphi\right\rvert$	$\left\lvert\frac{f^2}{e^2}\cdot\tan\varphi\right\rvert$	$\left\lvert\frac{e^2\cdot f^2}{e^4-f^4}\cdot\sin^{-1}\varphi\cdot\cos^{-1}\varphi\right\rvert$	0

$\Rightarrow$

$\tan\beta =$	y_H	y_N	y_S	y_E
y_H	0	∞	0	∞
y_N	∞	0	∞	0
y_S	n.def.	n.def.	0	∞
y_E	n.def.	n.def.	∞	0

Rechts oben Koeffizientendarstellung, Links unten die Goniometrische Darstellung

6.3 Der Zusammenhang zwischen Korrelationskoeffizient ρ_{XY} und Winkel β

In „Elliptische Regression von Datenpunkten“ wurde der lineare Korrelationskoeffizient ρ_{XY} definiert. Mit dessen Hilfe ist der Schnittwinkel β ebenfalls beschreibbar, so gilt:

$$\rho_{XY} = a \cdot \sqrt{\frac{f^2}{e^2}} = a \cdot \sqrt{\frac{r^2}{r^2}} = a = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{f^2}{e^2} = \rho_{XY}^2 \cdot \cot^2 \varphi \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{e^2}{f^2} = \frac{\tan^2 \varphi}{\rho_{XY}^2}$$

$\Rightarrow$[3]

$$\frac{r^2}{r^2} = 0^2 \cdot \text{ n.def} \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{r^2}{r^2} = \frac{\text{n.def.}}{0^2}$$

$\Rightarrow$

$$1 = \text{ n.def.} \qquad \leftrightarrow \qquad 1 = \text{ n.def.}$$

$\Rightarrow$

$\tan\beta =$	y_H	y_N	y_S
y_S	$\rho_{XY}^{-2} \cdot \left\lvert \tan^3 \varphi \right\rvert$	$\rho_{XY}^{+2} \cdot \left\lvert \cot^3 \varphi \right\rvert$	-
y_E	$\rho_{XY}^{-2} \left\lvert \tan \varphi \right\rvert$	$\rho_{XY}^{+2} \cdot \left\lvert \cot \varphi \right\rvert$	$\left\lvert \frac{\rho_{XY}^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{\sin^4\varphi - \rho_{XY}^4 \cdot \cos^4\varphi} \right\rvert$

$\Rightarrow$

$\tan\beta =$	y_H	y_N	y_S
y_S	n.def.	n.def.	-
y_E	n.def.	n.def.	n.def.

$\Rightarrow$

$\rho_{XY}^2 =$	y_H	y_N	y_S
y_S	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2 \varphi$	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2 \varphi$	-
y_E	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2 \varphi$	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2 \varphi$	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2 \varphi$

$\Rightarrow$

[3] Hier und nur hier so gültig

$\rho^2_{XY} =$	y_H	y_N	y_S
y_S	n.def.	n.def.	-
y_E	n.def.	n.def.	n.def.

Der Korrelationskoeffizient ρ_{XY} ist nur über obig erstgenannte Berechnungsgrundlage definiert.

7 Vergleich zur Kreisregression nach der „Methode der kleinsten Quadrate“

Für die Berechnung der Mittelpunktkoordinaten und des Radius nach der allgemein bekannten Methode der Kreisregression werden Koeffizienten benötigt. Vergleich

$$A = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \left(n \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \qquad B = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \left(n \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

$$C = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \left(n \cdot y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \right) \qquad D = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \left(n \cdot y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \right)$$

$$E = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \left(n \cdot x_i^2 + n \cdot y_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)$$

$$F = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \left(n \cdot x_i^2 + n \cdot y_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)$$

Aus den Koeffizienten ergeben sich die Mittelpunktskoordinaten.

$$x_{MP} = \frac{D \cdot E - C \cdot F}{A \cdot D - B \cdot C} \qquad y_{MP} = \frac{A \cdot F - B \cdot E}{A \cdot D - B \cdot C}$$

Sowie der Radius.

$$r^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left((x_i - x_{MP})^2 + (y_i - y_{MP})^2 \right)$$

Mit den im Beispiel angegebenen Datenpaaren ergeben sich folgende Werte.

$$A = 18.865.024 \qquad B = 11.162.720 \qquad C = 11.162.720$$

$$D = 8.801.400 \qquad E = 18.844.156.512 \qquad F = 12.651.783.800$$

$\Rightarrow$

$$x_{MP} = 594{,}38 \qquad y_{MP} = 683{,}63$$

$\Rightarrow$

$$r^2 = 281434{,}11$$

$\Rightarrow$

$$r = 530{,}50$$

Ein tabellarischer Vergleich beider Methoden.

	Reduktionsmethode	Kleinste- Quadrate-Methode	Relative Abweichung in %
x_{MP}	695,00	594,38	16,93
y_{MP}	448,75	683,63	34,36
r	464,90	530,50	12,37

Warum diese Abweichungen obwohl beide Verfahren nach der Methode der kleinsten Quadrate entwickelt wurden. Die Antwort liegt in den Randbedingungen. Wurde im vorliegenden Fall für die Anstiege der Haupt- a und Nebenachse c festgelegt

$$a \cdot c = -1$$

$\Rightarrow$

$$a = 0 \qquad c \to -\infty$$

und dann je eine Fehlerfunktion (für die Haupt- und Nebenachse separat) minimiert, so liegt in der fremden Methode nur eine Fehlerfunktion vor

$$\sum_{i=1}^{n}\left(r^2-(x_i-x_{MP})^2-(y_i-y_{MP})^2\right)^2 \to MIN$$

ohne Beachtung des Winkels zwischen Haupt- und Nebenachse. Was auch verständlich ist, da bei einer Kreisregression dies ursächlich nicht von Interesse ist.

Für die Berechnung des Kreismittelpunktes sind Vorgaben bekannt.

Kleinste- Quadrate:

$$x_{MP}=\frac{D\cdot E-C\cdot F}{A\cdot D-B\cdot C} \qquad y_{MP}=\frac{A\cdot F-B\cdot E}{A\cdot D-B\cdot C}$$

Reduktionsmethode:

$$x_{MP}=\frac{d-b}{a-c} \qquad y_{MP}=\frac{d\cdot a-c\cdot b}{a-c}$$

Aus diesen beiden Berechnungsgrundlagen können die Anstiege der Haupt- und Nebenachse für die Methode „Kleinste- Quadrate“ ermittelt werden. So sind folgende Äquivalenzen extrahierbar.

$$a-c=A\cdot D-B\cdot C \qquad d-b=D\cdot E-C\cdot F \qquad d\cdot a-c\cdot b=A\cdot F-B\cdot E$$

Das c wird substituiert durch $c=-\frac{1}{a}$.

$$a+\tfrac{1}{a}=A\cdot D-B\cdot C \qquad d-b=D\cdot E-C\cdot F \qquad d\cdot a+\tfrac{1}{a}\cdot b=A\cdot F-B\cdot E$$

Das $\frac{1}{a}$ der linken Gleichung wird in die rechte eingesetzt und umgestellt.

$$d-b=D\cdot E-C\cdot F \qquad d\cdot a+(A\cdot D-B\cdot C-a)\cdot b=A\cdot F-B\cdot E$$

$\Rightarrow$

$$d-b=D\cdot E-C\cdot F \qquad (d-b)\cdot a+(A\cdot D-B\cdot C)\cdot b=A\cdot F-B\cdot E$$

Der Ausdruck $d-b$ wird von links nach rechts ersetzt.

$$(D\cdot E-C\cdot F)\cdot a+(A\cdot D-B\cdot C)\cdot b=A\cdot F-B\cdot E$$

Der rechte Term ist ersetzbar.

$$A\cdot F-B\cdot E=d\cdot a-c\cdot b$$

$\Rightarrow$

$$(D\cdot E-C\cdot F)\cdot a+(A\cdot D-B\cdot C)\cdot b=d\cdot a-c\cdot b$$

Damit ist c und d bekannt.

$$c=B\cdot C-A\cdot D \qquad d=D\cdot E-C\cdot F$$

Somit auch a und b.

$$a=A\cdot D-B\cdot C+c \qquad b=C\cdot F-D\cdot E+d$$

$\Rightarrow$

$$a=0 \qquad b=0$$

Als kleine Probe kann gelten.

$$a-c=A\cdot D-B\cdot C \qquad d-b=D\cdot E-C\cdot F \qquad d\cdot a-c\cdot b=A\cdot F-B\cdot E$$

$\Rightarrow$

$$-c=A\cdot D-B\cdot C \qquad d-=D\cdot E-C\cdot F \qquad 0=A\cdot F-B\cdot E$$

$\Rightarrow$

$$-(B\cdot C-A\cdot D)=A\cdot D-B\cdot C \qquad D\cdot E-C\cdot F=D\cdot E-C\cdot F$$

Insbesondere:

$$A \cdot F - B \cdot E = 0$$

Mit den berechneten Werten von c und d ist ablesbar, dass die Bedingung

$$c = -\infty$$

nicht erfüllt ist. Für vorliegendes Beispiel ist $c_{\text{Kleinste- Quadrate}}$

$$c_{\text{K-Q}} = -41.432.304.435.200 \neq -\infty$$

Sowie:

$$d_{\text{K-Q}} = 24.626.639.064.780.800$$

Und:

$$A \cdot F - B \cdot E = 28.324.162.250.178.560 \neq 0$$

Letztendlich ist es Sinn einer Kreisregression, dass der Ausdruck F wahr wird.

$$F = \sum_{i=1}^{n} \left(r^2 - (x_i - x_{MP})^2 - (y_i - y_{MP})^2 \right) = 0$$

Für das Verfahren nach der Reduktionsmethode.

$$r^2 = 216144,25$$

x_i	y_i	i	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$	F
128	100	1	321 489	121 627	-226 971, 75
256	250	2	192 721	39 502	-16 078, 75
440	510	3	65 025	3 752	+147 367, 25
640	160	4	3 025	83 376	+129 743, 25
768	400	5	5 329	2 377	+208 438, 25
896	520	6	40 401	5 077	+170 666, 25
1152	750	7	208 849	90 752	-83 456, 75
1280	900	8	342 225	203 627	-329 707, 75
5 560	3 590	8	1 179 064	550 090	**0**

Muss auch so sein, da letztendlich r^2 ermittelt wurde über:

$$\frac{\left\{(y - y_M)^2\right\}}{n} + \frac{\left\{(x - x_M)^2\right\}}{n} = r^2$$

Für das Verfahren nach Kleinste- Quadrate.

$$x_{MP} = 594{,}38 \qquad y_{MP} = 683{,}63 \qquad r^2 = 281434{,}11$$

x_i	y_i	i	$(x_i - x_{MP})^2$	$(y_i - y_{MP})^2$	F
128	100	1	217 510	340 624	-276 700
256	250	2	114 501	188 035	-21 102
440	510	3	23 833	30 147	+227 454
640	160	4	2 081	274 188	+ 5 165
768	400	5	30 144	80 446	+170 844
896	520	6	90 975	26 775	+163 684
1152	750	7	310 940	4 405	-33 911
1280	900	8	470 075	46 816	-235 457
5 560	3 590	8	1 260 059	991 436	**0**

Beide Verfahren sind infolge des Ergebnisses **Null** gleichberechtigte Kreisregressionen.

8 Zusammenfassung

Die Kreisregression ist ein Sonderfall der Elliptischen Regression und kann daher aus dieser gebildet werden. Die Arbeitsgleichung ist gegeben mit: Zusammenfassung

$$(y - y_{MP})^2 + (x - x_{MP})^2 = r^2$$

Wobei sich die Außermittigkeiten y_{MP} und x_{MP} durch den Mittelwert der Datenpaare ergeben.

$$y_M = \frac{\{y_i\}}{n} \qquad x_M = \frac{\{x_i\}}{n}$$

Der Radius r des regressierten Kreises ist ermittelbar über die Arbeitsgleichung.

$$\frac{\left\{(y - y_M)^2\right\} + \left\{(x - x_M)^2\right\}}{n} = r^2$$

Wobei n die maximale Anzahl der Datenpaare darstellt.

Sie, die Kreisregression vorgestellter Art, erfüllt die Minimierung der Fehlerfunktion F.

$$F = \sum_{i=1}^{n} \left(r^2 - (x_i - x_{MP})^2 - (y_i - y_{MP})^2\right) = 0$$

LaTeX 2_ε

$$\oiint$$

3.3 Lineare

3.3.1 Diskrete, stückweise, lineare und kontinuierliche, stückweise, lineare Regression

Herleitung und Durchführung der
–
diskreten, stückweisen, linearen Regression
kontinuierlichen, stückweisen, linearen Regression
Ermittlung der Wichtungsfunktion

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 01. März 2016 – Letzte Revision: 19. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Symbole und Formelzeichen **3**

2 Einleitung **4**

3 Herleitung der stückweisen, linearen Regression **5**
3.1 Fall 1 6
3.2 Fall 2 7

4 Herleitung der diskreten, stückweisen, linearen Regression **8**
4.1 Fall 1 9
4.2 Fall 2 10

5 Herleitung der kontinuierlichen, stückweisen, linearen Regression **11**
5.1 Fall 1 11
5.2 Fall 2 12

6 Herleitung der Erweiterungen **13**
6.1 Fall 1 – Mittelwertbildung 14
6.2 Fall 2 – Mittelwertbildung 15
6.3 Fall 1 – Zweipunktform 16
6.4 Fall 2 – Zweipunktform 17

7 Beispiel I **18**
7.1 Jahr – gesamt 19
7.2 März 28
7.3 April 30
7.4 Mai 32
7.5 Juni 34
7.6 Juli 36
7.7 August 38
7.8 September 40
7.9 Oktober 42
7.10 November 44
7.11 Dezember 46
7.12 Januar 48

7.13 Februar 50
7.14 Ermittlung der linearen Wichtungsfunktion 52
7.15 Grafische Darstellungen 53

8 Beispiel II **55**
8.1 November 2013 58
8.2 November 2014 60
8.3 November 2015 62
8.4 Ermittlung der linearen Wichtungsfunktion 64
8.5 Grafische Darstellungen 65

9 Zusammenfassung **67**
9.1 Durchführung der diskreten, stückweisen, linearen Regression 67
9.2 Durchführung der kontinuierlichen, stückweisen, linearen Regression 68
9.3 Erweiterungen 69

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

1 Symbole und Formelzeichen

- **Allgemein**

x	Funktionsargument einer Funktion
y	Funktionswert einer Funktion
a	Anstieg der linearen Funktion
b	Inhomogenität der linearen Funktion
a	Anstieg der diskreten/kontinuierlichen, stückweisen, linearen Regression
b	Inhomogenität der diskreten, stückweisen, linearen Regression
$\bar{a}$	gewichteter Anstieg aller Stücke der stückweisen, linearen Regression
$\widetilde{b}$	Inhomogenität der kontinuierlichen, stückweisen, linearen Regression
N	Nennerterm der stückweisen, linearen Regression
Z	Zählerterm der stückweisen, linearen Regression

- **Bezeichner – n**

$x^{(n)}$	Funktionsargument für das Intervall n
$y^{(n)}$	Funktionswert für das Intervall n
$x_a^{(n)}$	Anfangsargument für das Intervall n
$x_e^{(n)}$	Endargument für das Intervall n
N_n	Nennerterm der stückweisen, linearen Regression für das Intervall n
Z_n	Zählerterm der stückweisen, linearen Regression für das Intervall n

- **Bezeichner – sonstige**

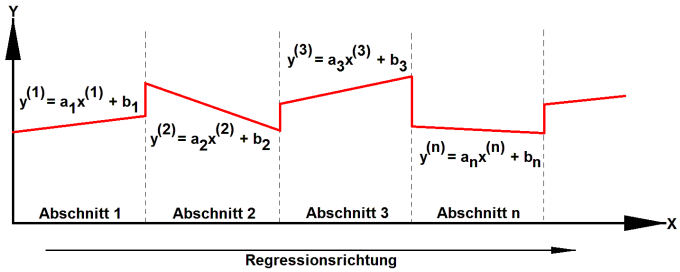
y_W	Wichtungsfunktion
${}^{(F_1)}\bullet$	Wert $\bullet$ für den Fall 1
${}^{(F_2)}\bullet$	Wert $\bullet$ für den Fall 2
$\{\bullet\}$	Summe von $\bullet$

2 Einleitung

[001] Die stückweise, lineare Regression ist eine häufig angewandte mathematische Methode um Daten weitergehend statistisch behandeln zu können, ohne komplizierte Funktionen vorliegen zu haben.

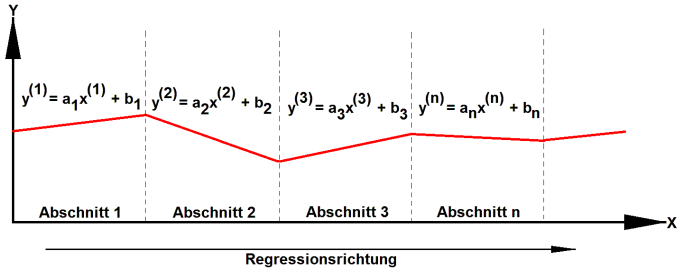
Die Ermittlung einer linearen Regressionsfunktion ist umfassend bekannt. Die Ermittlung einer stückweise linearen Regressionsfunktion ebenfalls. Der Unterschied ist die Aufteilung der Daten in Intervalle.

Fügt man die Intervalle nach erfolgreichen Regressionen wieder zusammen, dann erkennt man, dass an den Grenzen des Intervalls die Regressionsgraphen nicht immer zusammenfallen. Unstetigkeitstellen sind die Folge.



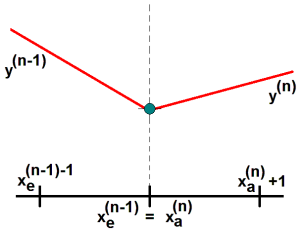
3 Herleitung der stückweisen, linearen Regression

Möchte man dennoch Funktionen ermitteln, welche keine Sprünge generieren, dann ist das möglich durch das Festlegen der Inhomogenität b_n im Intervall n aus der Regressionsfunktion $a_{n-1} \cdot x_e^{(n-1)} + b_{n-1} = y_{n-1}$ des vorhergehenden Intervalls $n-1$.



Zwei Fälle am Übergabepunkt sind mindestens zu unterscheiden.

3.1 Fall 1



Damit ist festgelegt:

$$x_e^{(n-1)} = x_e^{(n-1)} \quad \text{und} \quad x_a^{(n)} = 0$$

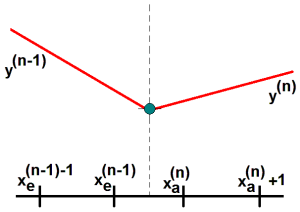
$\Rightarrow$

$$a_{n-1} \cdot x_e^{(n-1)} + b_{n-1} = a_n \cdot x_a^{(n)} + b_n$$

$\Rightarrow$

$$b_n = a_{n-1} \cdot x_e^{(n-1)} + b_{n-1}$$

3.2 Fall 2



Damit ist festgelegt:

$$x_e^{(n-1)} = x_e^{(n-1)} \quad \text{und} \quad x_a^{(n)} = 1$$

$\Rightarrow$

$$a_{n-1} \cdot \left(x_e^{(n-1)} + \frac{x_e^{(n-1)} - \left(x_e^{(n-1)} - 1 \right)}{2} \right) + b_{n-1} = a_n \cdot \left(x_a^{(n)} - \frac{x_a^{(n)} + 1 - x_a^{(n)}}{2} \right) + b_n$$

$\Rightarrow$

$$a_{n-1} \cdot \left(x_e^{(n-1)} + \frac{1}{2} \right) + b_{n-1} = a_n \cdot \left(x_a^{(n)} - \frac{1}{2} \right) + b_n$$

$\Rightarrow$

$$b_n = a_{n-1} \cdot x_e^{(n-1)} + b_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot (a_{n-1} - a_n)$$

4 Herleitung der diskreten, stückweisen, linearen Regression

Die Durchführung der linearen Regression ist bekannt und für jedes beliebige Intervall berechenbar über:

$$a_n = \frac{\left\{x^{(n)} \cdot y^{(n)}\right\} \cdot m - \left\{x^{(n)}\right\} \cdot \left\{y^{(n)}\right\}}{\left\{{x^{(n)}}^2\right\} \cdot m - \left\{x^{(n)}\right\}^2} \qquad b_n = \frac{\left\{{x^{(n)}}^2\right\} \cdot \left\{y^{(n)}\right\} - \left\{x^{(n)} \cdot y^{(n)}\right\} \cdot \left\{x^{(n)}\right\}}{\left\{{x^{(n)}}^2\right\} \cdot m - \left\{x^{(n)}\right\}^2}$$

Ein Zusammenhang ist erkennbar.

$$\frac{\left\{{x^{(n)}}^2\right\} \cdot \left\{y^{(n)}\right\} - \left\{x^{(n)} \cdot y^{(n)}\right\} \cdot \left\{x^{(n)}\right\}}{b_n} = \frac{\left\{x^{(n)} \cdot y^{(n)}\right\} \cdot m - \left\{x^{(n)}\right\} \cdot \left\{y^{(n)}\right\}}{a_n}$$

$\Rightarrow$

$$a_n = \frac{\left\{x^{(n)} \cdot y^{(n)}\right\} \cdot m - \left\{x^{(n)}\right\} \cdot \left\{y^{(n)}\right\}}{\left\{{x^{(n)}}^2\right\} \cdot \left\{y^{(n)}\right\} - \left\{x^{(n)} \cdot y^{(n)}\right\} \cdot \left\{x^{(n)}\right\}} \cdot b_n$$

$\Rightarrow$

$$a_n = \frac{Z_n}{N_n} \cdot b_n$$

Damit können die zwei zu untersuchenden Fälle weiter entwickelt werden.

4.1 Fall 1

Für b_n ist eine Berechnungsgrundlage aus den vorhergehenden Abschnitten bekannt.

$$^{(F_1)}b_n = a_{n-1} \cdot x_e^{(n-1)} + \widetilde{b}_{n-1}$$

$\Rightarrow$

$$^{(F_1)}a_n = \frac{Z_n}{N_n} \cdot \left(a_{n-1} \cdot x_e^{(n-1)} + \widetilde{b}_{n-1}\right)$$

$\Rightarrow$

$$^{(F_1)}a_n = \frac{Z_n}{N_n} \cdot b_n$$

Die Darstellung einer linearen Funktion im Intervall n ist gegeben. Diese wird genutzt.

$$^{(F_1)}y^{(n)} = a_n \cdot x^{(n)} + b_n$$

4.2 Fall 2

Für b_n ist eine Berechnungsgrundlage aus den vorhergehenden Abschnitten bekannt.

$$^{(F_2)}b_n = a_{n-1} \cdot x_e^{(n-1)} + \widetilde{b}_{n-1} + \frac{1}{2} \cdot (a_{n-1} - a_n)$$

$\Rightarrow$

$$^{(F_2)}b_n = \frac{2 \cdot N_n}{2 \cdot N_n + Z_n} \cdot \left(a_{n-1} \cdot \left(x_e^{(n-1)} + \frac{1}{2} \right) + \widetilde{b}_{n-1} \right)$$

$\Rightarrow$

$$^{(F_2)}a_n = \frac{2 \cdot Z_n}{2 \cdot N_n + Z_n} \cdot \left(a_{n-1} \cdot \left(x_e^{(n-1)} + \frac{1}{2} \right) + \widetilde{b}_{n-1} \right)$$

$\Rightarrow$

$$^{(F_2)}a_n = \frac{Z_n}{N_n} \cdot b_n$$

Die Darstellung einer linearen Funktion im Intervall n ist gegeben. Diese wird genutzt.

$$^{(F_2)}y^{(n)} = a_n \cdot x^{(n)} + b_n$$

5 Herleitung der kontinuierl., stückw., linearen Regression

Die Überführung der diskreten in die kontinuierliche, stückweise, lineare Regression erfolgt durch:

5.1 Fall 1

$$y^{(n)} = a_n \cdot \left(x^{(n)} - x_e^{(n-1)}\right) + b_n$$

$\Rightarrow$

$$y^{(n)} = a_n \cdot x^{(n)} - a_n \cdot x_e^{(n-1)} + b_n = a_n \cdot x^{(n)} + \widetilde{b}_n$$

Damit sind der Anstieg und die Inhomogenität ermittelbar.

Inhomogenität:

$$^{(F_1)}\widetilde{b}_n = b_n - a_n \cdot x_e^{(n-1)}$$

Anstieg:

$$^{(F_1)}a_n = \frac{Z_n}{N_n} \cdot b_n$$

Wobei für Fall 1 bekanntermaßen gilt:

$$x_e^{(n-1)} = x_a^{(n)}$$

Die Darstellung einer linearen Funktion im Intervall n ist gegeben. Diese wird genutzt.

$$^{(F_1)}y^{(n)} = a_n \cdot x^{(n)} + \widetilde{b}_n$$

5.2 Fall 2

Die Überführung der diskreten in die kontinuierliche, stückweise, lineare Regression erfolgt durch:

$$y^{(n)} = a_n \cdot \left(x^{(n)} - x_e^{(n-1)}\right) + b_n$$

$\Rightarrow$

$$y^{(n)} = a_n \cdot x^{(n)} - a_n \cdot x_e^{(n-1)} + b_n = a_n \cdot x^{(n)} + \widetilde{b}_n$$

Damit sind der Anstieg und die Inhomogenität ermittelbar.

Inhomogenität:

$$^{(F_2)}\widetilde{b}_n = b_n - a_n \cdot x_e^{(n-1)}$$

Anstieg:

$$^{(F_2)}a_n = \frac{Z_n}{N_n} \cdot b_n$$

Wobei für Fall 2 bekanntermaßen gilt:

$$x_e^{(n-1)} + \frac{1}{2} = x_a^{(n)} - \frac{1}{2}$$

Die Darstellung einer linearen Funktion im Intervall n ist gegeben. Diese wird genutzt.

$$^{(F_2)}y^{(n)} = a_n \cdot x^{(n)} + \widetilde{b}_n$$

6 Herleitung der Erweiterungen

Die allgemeine Gleichung der linearen Regressionsfunktion ist gegeben als:

$$y^{(n)} = a_n \cdot x^{(n)} + b_n$$

Von Interesse ist der Anfangs- und Endpunkt und deren Differenz.

$$y_a^{(n)} = a_n \cdot x_a^{(n)} + b_n \qquad\qquad y_e^{(n)} = a_n \cdot x_e^{(n)} + b_n$$

$\Rightarrow$

$$\Delta y^{(n)} = y_e^{(n)} - y_a^{(n)} = a_n \cdot \left(x_e^{(n)} - x_a^{(n)} \right)$$

6.1 Fall 1 – Mittelwertbildung

Der Anfangspunkt für Fall 1 ist bekannt ${}^{(F_1)}x_a^{(n)} = 0$.

$$\Delta^{(F_1)}y^{(n)} = {}^{(F_1)}a_n \cdot x_e^{(n)}$$

Die Summe aller dieser Differenzen wird gebraucht.

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta^{(F_1)}y^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} {}^{(F_1)}a_i \cdot x_e^{(i)}$$

Diese ist gleich für die gesamte lineare Regressionsfunktion.

$$a \cdot x_e = \sum_{i=1}^{n} {}^{(F_1)}a_i \cdot x_e^{(i)}$$

Ein Ersatz für x_e ist bekannt.

$$x_e = \sum_{i=1}^{n} {}^{(F_1)}x_e^{(i)}$$

$\Rightarrow$

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_e^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} {}^{(F_1)}a_i \cdot x_e^{(i)}$$

Eine finale Umstellung.

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} {}^{(F_1)}a_i \cdot x_e^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} x_e^{(i)}}$$

Die diskrete, stückweise, lineare Regression für Fall 1 berücksichtigt unterschiedliche Strichprobenumfänge der Regressionen innerhalb der gewählten Intervalle.

6.2 Fall 2 – Mittelwertbildung

Der Anfangspunkt für Fall 2 ist bekannt ${}^{(F_2)}x_a^{(n)} = 1$.

$$\Delta^{(F_2)}y^{(n)} = {}^{(F_2)}a_n \cdot \left(x_e^{(n)} - 1\right)$$

Die Summe aller dieser Differenzen wird gebraucht.

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta^{(F_2)}y^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} {}^{(F_2)}a_i \cdot \left(x_e^{(i)} - 1\right)$$

Dieser ist gleich für die gesamte lineare Regressionsfunktion.

$$a \cdot (x_e - 1) = \sum_{i=1}^{n} {}^{(F_2)}a_i \cdot \left(x_e^{(i)} - 1\right)$$

Ein Ersatz für x_e ist bekannt.

$$x_e - 1 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_e^{(i)} - 1\right)$$

$\Rightarrow$

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_e^{(i)} - 1\right) = \sum_{i=1}^{n} {}^{(F_2)}a_i \cdot \left(x_e^{(i)} - 1\right)$$

Eine finale Umstellung.

$$\bar{a} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} {}^{(F_2)}a_i \cdot \left(x_e^{(i)} - 1\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_e^{(i)} - 1\right)}$$

Die diskrete, stückweise, lineare Regression für Fall 1 berücksichtigt unterschiedliche Strichprobenumfänge der Regressionen innerhalb der gewählten Intervalle.

Eine weitere Möglichkeit den gewichteten Anstieg $\bar{a}$ zu berechnen ist die über die Zweipunktform.

6.3 Fall 1 – Zweipunktform

Zuerst die Punktdefinitionen.

$$P_A\left(x_a^{(1)}; y\left(x_a^{(1)}\right)\right) \qquad P_E\left(x_e^{(n)}; y\left(x_e^{(n)}\right)\right)$$

Es erfolgt die Ermittlung der allgemeinen Wichtungsfunktion.

$$\frac{y - y\left(x_a^{(1)}\right)}{x - x_a^{(1)}} = \frac{y\left(x_e^{(n)}\right) - y\left(x_a^{(1)}\right)}{x_e^{(n)} - x_a^{(1)}}$$

$\Rightarrow$

$$y_W = \frac{y\left(x_e^{(n)}\right) - y\left(x_a^{(1)}\right)}{x_e^{(n)} - x_a^{(1)}} \cdot x + y\left(x_a^{(1)}\right) - \frac{y\left(x_e^{(n)}\right) - y\left(x_a^{(1)}\right)}{x_e^{(n)} - x_a^{(1)}} \cdot x_a^{(1)}$$

Die stückweise, lineare Regressionsfunktion wird eingesetzt.

$$y\left(x_a^{(1)}\right) = a_1 \cdot x_a^{(1)} + \widetilde{b}_1 \qquad y\left(x_e^{(n)}\right) = a_n \cdot x_e^{(n)} + \widetilde{b}_n$$

$\Rightarrow$

$$y_W = \begin{cases} +\frac{a_n \cdot x_e^{(n)} + \widetilde{b}_n - \left(a_1 \cdot x_a^{(1)} + \widetilde{b}_1\right)}{x_e^{(n)} - x_a^{(1)}} \cdot x \\ \\ +a_1 \cdot x_a^{(1)} + \widetilde{b}_1 \\ \\ -\frac{a_n \cdot x_e^{(n)} + \widetilde{b}_n - \left(a_1 \cdot x_a^{(1)} + \widetilde{b}_1\right)}{x_e^{(n)} - x_a^{(1)}} \cdot x_a^{(1)} \end{cases}$$

Da für vorliegende Randbedingung $x_a^{(1)} = 0$ gilt, vereinfacht sich der gefundene Ausdruck.

$$^{(F_1)}y_W = \frac{a_n \cdot x_e^{(n)} + \widetilde{b}_n - \widetilde{b}_1}{x_e^{(n)}} \cdot x + \widetilde{b}_1$$

$\Rightarrow$

$$\bar{a}_W = \frac{a_n \cdot x_e^{(n)} + \widetilde{b}_n - \widetilde{b}_1}{x_e^{(n)}} \qquad b_W = \widetilde{b}_1$$

6.4 Fall 2 – Zweipunktform

Zuerst die Punktdefinitionen.

$$P_A\left(x_a^{(1)}-\frac{1}{2};y\left(x_a^{(1)}-\frac{1}{2}\right)\right) \qquad P_E\left(x_e^{(n)}+\frac{1}{2};y\left(x_e^{(n)}+\frac{1}{2}\right)\right)$$

Es erfolgt die Ermittlung der allgemeinen Wichtungsfunktion.

$$\frac{y-y\left(x_a^{(1)}-\frac{1}{2}\right)}{x-\left(x_a^{(1)}-\frac{1}{2}\right)}=\frac{y\left(x_e^{(n)}+\frac{1}{2}\right)-y\left(x_a^{(1)}-\frac{1}{2}\right)}{x_e^{(n)}+\frac{1}{2}-\left(x_a^{(1)}-\frac{1}{2}\right)}$$

$\Rightarrow$

$$y_W=\begin{cases}+\frac{y\left(x_e^{(n)}+\frac{1}{2}\right)-y\left(x_a^{(1)}-\frac{1}{2}\right)}{x_e^{(n)}-x_a^{(1)}+1}\cdot x\\ +y\left(x_a^{(1)}-\frac{1}{2}\right)\\ -\frac{y\left(x_e^{(n)}+\frac{1}{2}\right)-y\left(x_a^{(1)}-\frac{1}{2}\right)}{x_e^{(n)}-x_a^{(1)}+1}\cdot\left(x_a^{(1)}-\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$

Die stückweise, lineare Regressionsfunktion wird eingesetzt.

$$y\left(x_a^{(1)}-\frac{1}{2}\right)=a_1\cdot\left(x_a^{(1)}-\frac{1}{2}\right)+\widetilde{b}_1 \qquad y\left(x_e^{(n)}+\frac{1}{2}\right)=a_n\cdot\left(x_e^{(n)}+\frac{1}{2}\right)+\widetilde{b}_n$$

$\Rightarrow$

$$y_W=\begin{cases}+\frac{a_n\cdot\left(x_e^{(n)}+\frac{1}{2}\right)+\widetilde{b}_n-\left(a_1\cdot\left(x_a^{(1)}-\frac{1}{2}\right)+\widetilde{b}_1\right)}{x_e^{(n)}-x_a^{(1)}+1}\cdot x\\ +\left(a_1\cdot\left(x_a^{(1)}-\frac{1}{2}\right)+\widetilde{b}_1\right)\\ -\frac{a_n\cdot\left(x_e^{(n)}+\frac{1}{2}\right)+\widetilde{b}_n-\left(a_1\cdot\left(x_a^{(1)}-\frac{1}{2}\right)+\widetilde{b}_1\right)}{x_e^{(n)}-x_a^{(1)}+1}\cdot\left(x_a^{(1)}-\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$

Da für vorliegende Randbedingung $x_a^{(1)}=1$ gilt, vereinfacht sich der gefundene Ausdruck.

$$^{(F_2)}y_W=\frac{a_n\cdot x_e^{(n)}+\widetilde{b}_n-\widetilde{b}_1+\frac{1}{2}\cdot(a_n-a_1)}{x_e^{(n)}}\cdot x+\frac{\left(2\cdot\widetilde{b}_1+a_1-a_n\right)\cdot\left(x_e^{(n)}+\frac{1}{2}\right)-\widetilde{b}_n}{2\cdot x_e^{(n)}}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{a}_W=\frac{a_n\cdot x_e^{(n)}+\widetilde{b}_n-\widetilde{b}_1+\frac{1}{2}\cdot(a_n-a_1)}{x_e^{(n)}} \qquad b_W=\frac{\left(2\cdot\widetilde{b}_1+a_1-a_n\right)\cdot\left(x_e^{(n)}+\frac{1}{2}\right)-\widetilde{b}_n}{2\cdot x_e^{(n)}}$$

7 Beispiel I

Eine männliche Person hatte die Aufgabe sich allmorgendlich nach Absolvierung primärer Lebensaufgaben für ein (**Schalt**)Jahr lang zu wiegen, so wie es in Zeiten des All- und Feiertags möglich ist. Die Waage rundete das ermittelte Gewicht auf 500g- Schritte. Somit sind 366 Messtage gleich 1 Jahr vorhanden in 12 Monate aufteilbar. Die stückweise lineare Regression wird innerhalb der Monate durchgeführt. Da ein Monatswechsel grundsätzlich zwischen zwei Tagen liegt, ist Fall 2 für die Durchführung relevant.

Nachfolgend die lineare Regression über ein Jahr und die stückweise, lineare Regression innerhalb eines natürlichen Monats. Ausgegeben werden die diskrete und die kontinuierliche Regression.

Das Wiegejahr erstreckte sich vom 1. März bis zum 29. Februar.

7.1 Jahr – gesamt

m	Tag	X	Y	X*Y	X*X
1	1	1	85,5	85,5	1
2	2	2	84,0	168,0	4
3	3	3	84,5	253,5	9
4	4	4	85,0	340,0	16
5	5	5	84,5	422,5	25
6	6	6	84,0	504,0	36
7	7	7	83,5	584,5	49
8	8	8	83,5	668,0	64
9	9	9	84,5	760,5	81
10	10	10	84,5	845,0	100
11	11	11	85,5	940,5	121
12	12	12	85,0	1020,0	144
13	13	13	85,5	1111,5	169
	14	0	0	0	0
	15	0	0	0	0
14	16	16	85,5	1368,0	256
15	17	17	85,0	1445,0	289
16	18	18	84,5	1521,0	324
17	19	19	84,0	1596,0	361
18	20	20	85,0	1700,0	400
19	21	21	84,5	1774,5	441
20	22	22	83,5	1837,0	484
21	23	23	84,5	1943,5	529
22	24	24	84,5	2028,0	576
23	25	25	84,0	2100,0	625
24	26	26	83,5	2171,0	676
	27	0	0	0	0
	28	0	0	0	0
25	29	29	85,0	2465,0	841
26	30	30	85,5	2565,0	900
27	31	31	84,5	2619,5	961
28	32	32	84,5	2704,0	1024
29	33	33	84,5	2788,5	1089
30	34	34	83,0	2822,0	1156
31	35	35	84,5	2957,5	1225
32	36	36	83,0	2988,0	1296
33	37	37	84,0	3108,0	1369
34	38	38	85,5	3249,0	1444
35	39	39	84,5	3295,5	1521

36	40	40	84,0	3360,0	1600
	41	0	0	0	0
	42	0	0	0	0
37	43	43	85,5	3676,5	1849
38	44	44	84,0	3696,0	1936
39	45	45	83,5	3757,5	2025
40	46	46	84,5	3887,0	2116
41	47	47	85,5	4018,5	2209
42	48	48	85,5	4104,0	2304
43	49	49	84,5	4140,5	2401
44	50	50	84,0	4200,0	2500
45	51	51	84,0	4284,0	2601
46	52	52	84,5	4394,0	2704
47	53	53	85,5	4531,5	2809
48	54	54	84,5	4563,0	2916
49	55	55	84,0	4620,0	3025
	56	0	0	0	0
50	57	57	85,5	4873,5	3249
51	58	58	85,0	4930,0	3364
52	59	59	84,5	4985,5	3481
53	60	60	85,5	5130,0	3600
	61	0	0	0	0
	62	0	0	0	0
	63	0	0	0	0
	64	0	0	0	0
	65	0	0	0	0
	66	0	0	0	0
	67	0	0	0	0
	68	0	0	0	0
	69	0	0	0	0
	70	0	0	0	0
	71	0	0	0	0
	72	0	0	0	0
	73	0	0	0	0
	74	0	0	0	0
	75	0	0	0	0
	76	0	0	0	0
	77	0	0	0	0
	78	0	0	0	0
54	79	79	84,5	6675,5	6241
55	80	80	85,0	6800,0	6400
56	81	81	85,0	6885,0	6561
57	82	82	86,0	7052,0	6724
58	83	83	85,0	7055,0	6889

	84	0	0	0	0
	85	0	0	0	0
	86	0	0	0	0
59	87	87	85,0	7395,0	7569
60	88	88	85,0	7480,0	7744
61	89	89	85,0	7565,0	7921
62	90	90	85,5	7695,0	8100
63	91	91	84,0	7644,0	8281
64	92	92	84,5	7774,0	8464
65	93	93	86,0	7998,0	8649
66	94	94	86,0	8084,0	8836
67	95	95	86,0	8170,0	9025
68	96	96	85,5	8208,0	9216
69	97	97	85,0	8245,0	9409
	98	0	0	0	0
	99	0	0	0	0
70	100	100	85,5	8550,0	10000
71	101	101	85,5	8635,5	10201
72	102	102	85,0	8670,0	10404
73	103	103	85,5	8806,5	10609
74	104	104	85,5	8892,0	10816
75	105	105	85,5	8977,5	11025
76	106	106	84,5	8957,0	11236
77	107	107	86,0	9202,0	11449
78	108	108	86,0	9288,0	11664
79	109	109	85,5	9319,5	11881
80	110	110	86,5	9515,0	12100
81	111	111	85,5	9490,5	12321
	112	0	0	0	0
	113	0	0	0	0
82	114	114	85,5	9747,0	12996
83	115	115	85,5	9832,5	13225
84	116	116	86,0	9976,0	13456
85	117	117	85,5	10003,5	13689
86	118	118	86,0	10148,0	13924
87	119	119	85,5	10174,5	14161
	120	0	0	0	0
88	121	121	85,5	10345,5	14641
89	122	122	85,0	10370,0	14884
90	123	123	86,0	10578,0	15129
91	124	124	86,5	10726,0	15376
92	125	125	85,5	10687,5	15625
	126	0	0	0	0
	127	0	0	0	0

93	128	128	86,5	11072,0	16384
94	129	129	85,5	11029,5	16641
95	130	130	85,5	11115,0	16900
96	131	131	85,0	11135,0	17161
97	132	132	86,0	11352,0	17424
	133	0	0	0	0
	134	0	0	0	0
98	135	135	85,0	11475,0	18225
99	136	136	85,5	11628,0	18496
100	137	137	85,0	11645,0	18769
101	138	138	85,0	11730,0	19044
102	139	139	85,0	11815,0	19321
	140	0	0	0	0
103	141	141	84,5	11914,5	19881
104	142	142	84,5	11999,0	20164
105	143	143	85,5	12226,5	20449
106	144	144	85,5	12312,0	20736
107	145	145	86,0	12470,0	21025
108	146	146	85,5	12483,0	21316
	147	0	0	0	0
	148	0	0	0	0
109	149	149	85,0	12665,0	22201
110	150	150	85,5	12825,0	22500
111	151	151	85,5	12910,5	22801
112	152	152	84,0	12768,0	23104
	153	0	0	0	0
	154	0	0	0	0
	155	0	0	0	0
113	156	156	85,0	13260,0	24336
114	157	157	85,0	13345,0	24649
115	158	158	85,0	13430,0	24964
116	159	159	86,0	13674,0	25281
117	160	160	85,0	13600,0	25600
	161	0	0	0	0
	162	0	0	0	0
118	163	163	85,5	13936,5	26569
119	164	164	86,0	14104,0	26896
120	165	165	85,5	14107,5	27225
121	166	166	85,5	14193,0	27556
122	167	167	85,5	14278,5	27889
	168	0	0	0	0
	169	0	0	0	0
123	170	170	85,5	14535,0	28900
124	171	171	85,0	14535,0	29241

125	172	172	85,0	14620,0	29584
126	173	173	85,0	14705,0	29929
127	174	174	84,5	14703,0	30276
128	175	175	84,5	14787,5	30625
	176	0	0	0	0
129	177	177	84,5	14956,5	31329
130	178	178	84,5	15041,0	31684
131	179	179	84,5	15125,5	32041
132	180	180	85,0	15300,0	32400
	181	0	0	0	0
	182	0	0	0	0
	183	0	0	0	0
133	184	184	85,0	15640,0	33856
134	185	185	85,0	15725,0	34225
135	186	186	85,0	15810,0	34596
136	187	187	85,0	15895,0	34969
137	188	188	85,0	15980,0	35344
138	189	189	85,5	16159,5	35721
	190	0	0	0	0
139	191	191	84,5	16139,5	36481
140	192	192	85,0	16320,0	36864
141	193	193	85,5	16501,5	37249
142	194	194	86,0	16684,0	37636
143	195	195	84,5	16477,5	38025
	196	0	0	0	0
	197	0	0	0	0
144	198	198	85,0	16830,0	39204
145	199	199	84,5	16815,5	39601
	200	200	0	0	40000
146	201	201	84,5	16984,5	40401
147	202	202	84,5	17069,0	40804
148	203	203	84,0	17052,0	41209
	204	0	0	0	0
149	205	205	84,0	17220,0	42025
150	206	206	84,5	17407,0	42436
151	207	207	84,5	17491,5	42849
	208	0	0	0	0
152	209	209	84,5	17660,5	43681
	210	0	0	0	0
	211	0	0	0	0
153	212	212	84,0	17808,0	44944
	213	0	0	0	0
154	214	214	84,5	18083,0	45796
155	215	215	84,0	18060,0	46225

156	216	216	84,5	18252,0	46656
	217	0	0	0	0
	218	0	0	0	0
	219	0	0	0	0
	220	0	0	0	0
	221	0	0	0	0
	222	0	0	0	0
	223	0	0	0	0
	224	0	0	0	0
	225	0	0	0	0
	226	0	0	0	0
	227	0	0	0	0
	228	0	0	0	0
	229	0	0	0	0
	230	0	0	0	0
	231	0	0	0	0
	232	0	0	0	0
	233	0	0	0	0
157	234	234	84,0	19656,0	54756
158	235	235	84,0	19740,0	55225
159	236	236	83,5	19706,0	55696
160	237	237	83,5	19789,5	56169
161	238	238	83,5	19873,0	56644
	239	0	0	0	0
162	240	240	83,5	20040,0	57600
163	241	241	84,0	20244,0	58081
164	242	242	84,0	20328,0	58564
165	243	243	84,0	20412,0	59049
	244	0	0	0	0
	245	0	0	0	0
	246	0	0	0	0
166	247	247	83,5	20624,5	61009
167	248	248	82,5	20460,0	61504
168	249	249	83,5	20791,5	62001
169	250	250	83,0	20750,0	62500
170	251	251	83,0	20833,0	63001
	252	0	0	0	0
	253	0	0	0	0
171	254	254	84,0	21336,0	64516
172	255	255	83,5	21292,5	65025
173	256	256	84,0	21504,0	65536
174	257	257	83,5	21459,5	66049
	258	0	0	0	0
	259	0	0	0	0

	260	0	0	0	0
175	261	261	84,0	21924,0	68121
176	262	262	84,0	22008,0	68644
177	263	263	84,0	22092,0	69169
178	264	264	83,5	22044,0	69696
179	265	265	84,5	22392,5	70225
	266	0	0	0	0
	267	0	0	0	0
180	268	268	84,0	22512,0	71824
181	269	269	84,5	22730,5	72361
182	270	270	84,0	22680,0	72900
183	271	271	84,5	22899,5	73441
184	272	272	84,0	22848,0	73984
	273	0	0	0	0
	274	0	0	0	0
185	275	275	84,0	23100,0	75625
186	276	276	84,5	23322,0	76176
187	277	277	84,0	23268,0	76729
188	278	278	83,5	23213,0	77284
189	279	279	84,5	23575,5	77841
	280	0	0	0	0
	281	0	0	0	0
190	282	282	85,5	24111,0	79524
191	283	283	85,5	24196,5	80089
192	284	284	85,0	24140,0	80656
193	285	285	84,5	24082,5	81225
194	286	286	84,5	24167,0	81796
	287	0	0	0	0
	288	0	0	0	0
195	289	289	84	24276,0	83521
196	290	290	84	24360,0	84100
197	291	291	84,5	24589,5	84681
198	292	292	84,5	24674,0	85264
	293	0	0	0	0
	294	0	0	0	0
	295	0	0	0	0
	296	0	0	0	0
	297	0	0	0	0
	298	0	0	0	0
	299	0	0	0	0
	300	0	0	0	0
	301	0	0	0	0
	302	0	0	0	0
	303	0	0	0	0

	304	0	0	0	0
	305	0	0	0	0
	306	0	0	0	0
	307	0	0	0	0
	308	0	0	0	0
	309	0	0	0	0
199	310	310	85,5	26505,0	96100
200	311	311	85,0	26435,0	96721
201	312	312	85,0	26520,0	97344
202	313	313	85,0	26605,0	97969
203	314	314	86,5	27161,0	98596
	315	0	0	0	0
	316	0	0	0	0
204	317	317	85,5	27103,5	100489
205	318	318	86,0	27348,0	101124
206	319	319	85,5	27274,5	101761
207	320	320	85,5	27360,0	102400
208	321	321	84,5	27124,5	103041
	322	0	0	0	0
	323	0	0	0	0
209	324	324	84,5	27378,0	104976
210	325	325	85,5	27787,5	105625
211	326	326	85,0	27710,0	106276
212	327	327	85,5	27958,5	106929
213	328	328	85,5	28044,0	107584
	329	0	0	0	0
	330	0	0	0	0
214	331	331	87,0	28797,0	109561
215	332	332	85,5	28386,0	110224
216	333	333	86,0	28638,0	110889
217	334	334	86,0	28724,0	111556
218	335	335	86,0	28810,0	112225
	336	0	0	0	0
	337	0	0	0	0
219	338	338	85,0	28730,0	114244
220	339	339	85,5	28984,5	114921
221	340	340	85,0	28900,0	115600
222	341	341	85,5	29155,5	116281
223	342	342	85,0	29070,0	116964
	343	0	0	0	0
	344	0	0	0	0
224	345	345	85,5	29497,5	119025
225	346	346	85,5	29583,0	119716
226	347	347	85,0	29495,0	120409

227	348	348	85,5	29754,0	121104
228	349	349	85,0	29665,0	121801
	350	0	0	0	0
	351	0	0	0	0
229	352	352	85,0	29920,0	123904
230	353	353	85,0	30005,0	124609
231	354	354	85,0	30090,0	125316
232	355	355	85,0	30175,0	126025
233	356	356	85,5	30438,0	126736
	357	0	0	0	0
	358	0	0	0	0
234	359	359	85,5	30694,5	128881
235	360	360	85,5	30780,0	129600
236	361	361	85,0	30685,0	130321
237	362	362	86,0	31132,0	131044
238	363	363	84,0	30492,0	131769
	364	0	0	0	0
	365	0	0	0	0
239	366	366	84,5	30927,0	133956
239	**∑:**	**41408**	**20280,0**	**3514278,0**	**9983866**
m	**Tag**	**X**	**Y**	**X*Y**	**X*X**

- **Gesamttrend – Jahresregression**

$$a = \frac{3514278 \cdot 239 - 41408 \cdot 20280}{9983866 \cdot 239 - 41408^2} \qquad b = \frac{9983866 \cdot 20280 - 3514278 \cdot 41408}{9983866 \cdot 239 - 41408^2}$$

$\Rightarrow$

$$a = 0,0002 \qquad b = 84,81$$

$\Rightarrow$

$$y = 0,0002 \cdot x + 84,81$$

7.2 März

m	Tag	X	Y	X*Y	X*X
1	1	1	85,5	85,5	1
2	2	2	84,0	168,0	4
3	3	3	84,5	253,5	9
4	4	4	85,0	340,0	16
5	5	5	84,5	422,5	25
6	6	6	84,0	504,0	36
7	7	7	83,5	584,5	49
8	8	8	83,5	668,0	64
9	9	9	84,5	760,5	81
10	10	10	84,5	845,0	100
11	11	11	85,5	940,5	121
12	12	12	85,0	1020,0	144
13	13	13	85,5	1111,5	169
	14	0	0	0	0
	15	0	0	0	0
14	16	16	85,5	1368,0	256
15	17	17	85,0	1445,0	289
16	18	18	84,5	1521,0	324
17	19	19	84,0	1596,0	361
18	20	20	85,0	1700,0	400
19	21	21	84,5	1774,5	441
20	22	22	83,5	1837,0	484
21	23	23	84,5	1943,5	529
22	24	24	84,5	2028,0	576
23	25	25	84,0	2100,0	625
24	26	26	83,5	2171,0	676
	27	0	0	0	0
	28	0	0	0	0
25	29	29	85,0	2465,0	841
26	30	30	85,5	2565,0	900
27	31	31	84,5	2619,5	961
27	**∑:**	**412**	**2283**	**34837,0**	**8482**
m	**Tag**	**X**	**Y**	**X*Y**	**X*X**

März → stückweise, lineare Regression

$$a = \frac{34837 \cdot 27 - 412 \cdot 2283}{8482 \cdot 27 - 412^2} \qquad b = \frac{8482 \cdot 2283 - 34837 \cdot 412}{8482 \cdot 27 - 412^2}$$

⇒

$$a = 0,0000 \qquad b = 84,55$$

⇒

$$y_{\text{Mae}} = 84,55 \qquad \text{SLR}$$

Fall 2

$$x_a^{\text{Mae}} = 1 \qquad x_e^{\text{Mae}} = 31$$

⇒

$$Z_{\text{Mae}} = 34837 \cdot 27 - 412 \cdot 2283 = 3$$
$$N_{\text{Mae}} = 8482 \cdot 2283 - 34837 \cdot 412 = 5011562$$

Keine weiteren Betrachtungen nötig, da Initialmonat.

$$^{(F_2)}y = 84,55 \qquad \text{kont.SLR}$$

⇒

$$^{(F_2)}y_{\text{Mae}} = 84,55 \qquad \text{disk.SLR}$$

⇒

$$^{(F_2)}a_{\text{Mae}} = 0 \qquad ^{(F_2)}b_{\text{Mae}} = 84,55$$

⇒

$$^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Mae}} = 84,55$$

Erweiterung

$$b_{\text{Mae}} - \widetilde{b}_{\text{Mae}} = a_{\text{Mae}} \cdot x_e^{\text{Feb}} = a_{\text{Mae}} \cdot \left(x_a^{\text{Mae}} - 1\right)$$

⇒

$$0 = 0$$

7.3 April

m	Tag	X	Y	X*Y	X*X
1	32	32	84,5	2704,0	1024
2	33	33	84,5	2788,5	1089
3	34	34	83,0	2822,0	1156
4	35	35	84,5	2957,5	1225
5	36	36	83,0	2988,0	1296
6	37	37	84,0	3108,0	1369
7	38	38	85,5	3249,0	1444
8	39	39	84,5	3295,5	1521
9	40	40	84,0	3360,0	1600
	41	0	0	0	0
	42	0	0	0	0
10	43	43	85,5	3676,5	1849
11	44	44	84,0	3696,0	1936
12	45	45	83,5	3757,5	2025
13	46	46	84,5	3887,0	2116
14	47	47	85,5	4018,5	2209
15	48	48	85,5	4104,0	2304
16	49	49	84,5	4140,5	2401
17	50	50	84,0	4200,0	2500
18	51	51	84,0	4284,0	2601
19	52	52	84,5	4394,0	2704
20	53	53	85,5	4531,5	2809
21	54	54	84,5	4563,0	2916
22	55	55	84,0	4620,0	3025
	56	0	0	0	0
23	57	57	85,5	4873,5	3249
24	58	58	85,0	4930,0	3364
25	59	59	84,5	4985,5	3481
26	60	60	85,5	5130,0	3600
	61	0	0	0	0
26	**∑:**	**1195**	**2197,5**	**101064,0**	**56813**
m	**Tag**	**X**	**Y**	**X*Y**	**X*X**

April → stückweise, lineare Regression

$$a = \frac{101064 \cdot 26 - 1195 \cdot 2197,5}{56813 \cdot 26 - 1195^2} \qquad b = \frac{56813 \cdot 2197,5 - 101064 \cdot 1195}{56813 \cdot 26 - 1195^2}$$

⇒

$$a = 0,034 \qquad b = 82,97$$

⇒

$$y_{April} = 0,034 \cdot x + 82,97 \qquad \text{SLR}$$

Fall 2

$$x_e^{\text{Mae}} = 31 \qquad a_{\text{Mae}} = 0 \qquad \widetilde{b}_{\text{Mae}} = 84,55$$

⇒

$$x_a^{\text{Apr}} = 32 \qquad x_e^{\text{Apr}} = 61$$

⇒

$$Z_{\text{Apr}} = 101064 \cdot 26 - 1195 \cdot 2197,5 = 1651,50$$
$$N_{\text{Apr}} = 56813 \cdot 2197,5 - 101064 \cdot 1195 = 4075087,50$$

⇒

$$b_{\text{Apr}} = \frac{2 \cdot 4075087,50}{2 \cdot 4075087,50 + 1651,50} \cdot \left(0 \cdot \left(31 + \frac{1}{2}\right) + 84,55\right) = 84,53$$

⇒

$$a_{\text{Apr}} = \frac{1651,50}{4075087,50} \cdot \left(0 \cdot \left(31 + \frac{1}{2}\right) + 84,55\right) = 0,034$$

⇒

$$\widetilde{b}_{\text{Apr}} = \frac{4075087,5 - 1651,5 \cdot 31}{4075087,5} \cdot 84,53 = 83,47$$

⇒

$${}^{(F_2)}y = 0,034 \cdot x + 83,47 \qquad \text{kont.SLR}$$

⇒

$${}^{(F_2)}y_{\text{Apr}} = 0,034 \cdot x + 84,53 \qquad \text{disk.SLR}$$

Probe

$${}^{(F_2)}a_{\text{Mae}} \cdot \left(x_e^{\text{Mae}} + \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Mae}} = {}^{(F_2)}a_{\text{Apr}} \cdot \left(x_e^{\text{Apr}} - \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Apr}} = \text{disk.SLR}\,(x = 0)$$

⇒

$$0 \cdot \left(31 + \frac{1}{2}\right) + 84,55 = 0,034 \cdot \left(32 - \frac{1}{2}\right) + 83,47 = 0,034 \cdot 0 + 84,53$$

⇒

$$84,55 \approx 84,54 \approx 84,53$$

⇒

$${}^{(F_2)}a_{\text{Apr}} = 0,034 \qquad {}^{(F_2)}b_{\text{Apr}} = 84,53$$

⇒

$${}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Apr}} = 83,47$$

Erweiterung

$$b_{\text{Apr}} - \widetilde{b}_{\text{Apr}} = a_{\text{Apr}} \cdot x_e^{\text{Mae}}$$

⇒

$$1,06 \approx 1,05$$

7.4 Mai

m	Tag	X	Y	X*Y	X*X
	62	0	0	0	0
	63	0	0	0	0
	64	0	0	0	0
	65	0	0	0	0
	66	0	0	0	0
	67	0	0	0	0
	68	0	0	0	0
	69	0	0	0	0
	70	0	0	0	0
	71	0	0	0	0
	72	0	0	0	0
	73	0	0	0	0
	74	0	0	0	0
	75	0	0	0	0
	76	0	0	0	0
	77	0	0	0	0
	78	0	0	0	0
1	79	79	84,5	6675,5	6241
2	80	80	85,0	6800,0	6400
3	81	81	85,0	6885,0	6561
4	82	82	86,0	7052,0	6724
5	83	83	85,0	7055,0	6889
	84	0	0	0	0
	85	0	0	0	0
	86	0	0	0	0
6	87	87	85,0	7395,0	7569
7	88	88	85,0	7480,0	7744
8	89	89	85,0	7565,0	7921
9	90	90	85,5	7695,0	8100
10	91	91	84,0	7644,0	8281
11	92	92	84,5	7774,0	8464
11	**∑:**	**942**	**934,5**	**80020,5**	**80894**
m	**Tag**	**X**	**Y**	**X*Y**	**X*X**

Mai → stückweise, lineare Regression

$$a = \frac{80020,5 \cdot 11 - 942 \cdot 934,5}{80894 \cdot 11 - 942^2} \qquad b = \frac{80894 \cdot 934,5 - 80020,5 \cdot 942}{80894 \cdot 11 - 942^2}$$

⇒

$$a = -0,030 \qquad b = 87,50$$

⇒

$$y_{\text{Mai}} = -0,030 \cdot x + 87,50 \qquad \text{SLR}$$

Fall 2

$$x_e^{\text{Apr}} = 61 \qquad a_{\text{Apr}} = 0,034 \qquad \widetilde{b}_{\text{Apr}} = 83,47$$

⇒

$$x_a^{\text{Mai}} = 62 \qquad x_e^{\text{Mai}} = 92$$

⇒

$$Z_{\text{Mai}} = 80020,5 \cdot 11 - 942 \cdot 934,5 = -73,5$$
$$N_{\text{Mai}} = 80894 \cdot 934,5 - 80020,5 \cdot 942 = 216132$$

⇒

$$b_{\text{Mai}} = \frac{2 \cdot 216132}{2 \cdot 216132 - 73,5} \cdot \left(0,034 \cdot \left(61 + \frac{1}{2}\right) + 83,47\right) = 85,58$$

⇒

$$a_{\text{Mai}} = -\frac{73,5}{216132} \cdot \left(0,034 \cdot \left(61 + \frac{1}{2}\right) + 83,48\right) = -0,029$$

⇒

$$\widetilde{b}_{\text{Mai}} = \frac{216132 + 73,5 \cdot 61}{216132} \cdot 85,58 = 87,36$$

⇒

$${}^{(F_2)}y = -0,029 \cdot x + 87,36 \qquad \text{kont.SLR}$$

⇒

$${}^{(F_2)}y_{\text{Mai}} = -0,029 \cdot x + 85,58 \qquad \text{disk.SLR}$$

Probe

$${}^{(F_2)}a_{\text{Apr}} \cdot \left(x_e^{\text{Apr}} + \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Apr}} = {}^{(F_2)}a_{\text{Mai}} \cdot \left(x_a^{\text{Mai}} - \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Mai}} = \text{disk.SLR}\,(x = 0)$$

⇒

$$0,034 \cdot \left(61 + \frac{1}{2}\right) + 83,47 = -0,029 \cdot \left(62 - \frac{1}{2}\right) + 87,36 = -0,029 \cdot 0 + 85,58$$

⇒

$$85,57 = 85,57 \approx 85,58$$

⇒

$${}^{(F_2)}a_{\text{Mai}} = -0,029 \qquad {}^{(F_2)}b_{\text{Mai}} = 85,58$$

⇒

$${}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Mai}} = 87,36$$

Erweiterung

$$b_{\text{Mai}} - \widetilde{b}_{\text{Mai}} = a_{\text{Mai}} \cdot x_e^{\text{Apr}}$$

⇒

$$-1,77 = -1,77$$

7.5 Juni

m	Tag	X	Y	X*Y	X*X
1	93	93	86,0	7998,0	8649
2	94	94	86,0	8084,0	8836
3	95	95	86,0	8170,0	9025
4	96	96	85,5	8208,0	9216
5	97	97	85,0	8245,0	9409
	98	0	0	0	0
	99	0	0	0	0
6	100	100	85,5	8550,0	10000
7	101	101	85,5	8635,5	10201
8	102	102	85,0	8670,0	10404
9	103	103	85,5	8806,5	10609
10	104	104	85,5	8892,0	10816
11	105	105	85,5	8977,5	11025
12	106	106	84,5	8957,0	11236
13	107	107	86,0	9202,0	11449
14	108	108	86,0	9288,0	11664
15	109	109	85,5	9319,5	11881
16	110	110	86,5	9515,0	12100
17	111	111	85,5	9490,5	12321
	112	0	0	0	0
	113	0	0	0	0
18	114	114	85,5	9747,0	12996
19	115	115	85,5	9832,5	13225
20	116	116	86,0	9976,0	13456
21	117	117	85,5	10003,5	13689
22	118	118	86,0	10148,0	13924
23	119	119	85,5	10174,5	14161
	120	0	0	0	0
24	121	121	85,5	10345,5	14641
25	122	122	85,0	10370,0	14884
25	**∑:**	**2683**	**2139,5**	**229605,5**	**289817**
m	**Tag**	**X**	**Y**	**X*Y**	**X*X**

Juni → stückweise, lineare Regression

$$a = \frac{229605,5 \cdot 25 - 2683 \cdot 2139,5}{289817 \cdot 25 - 2683^2} \qquad b = \frac{289817 \cdot 2139,5 - 229605,5 \cdot 2683}{289817 \cdot 25 - 2683^2}$$

⇒

$$a = -0,003 \qquad b = 85,90$$

⇒

$$y = -0,003 \cdot x + 85,90 \qquad \text{SLR}$$

Fall 2

$$x_e^{\text{Mai}} = 92 \qquad a_{\text{Mai}} = -0,029 \qquad \widetilde{b}_{\text{Mai}} = 87,36$$

⇒

$$x_a^{\text{Jun}} = 93 \qquad x_e^{\text{Jun}} = 122$$

⇒

$$Z_{\text{Jun}} = 229605,5 \cdot 25 - 2683 \cdot 2139,5 = -141$$
$$N_{\text{Jun}} = 289817 \cdot 2139,5 - 229605,5 \cdot 2683 = 4031915$$

⇒

$$b_{\text{Jun}} = \frac{2 \cdot 4031915}{2 \cdot 4031915 - 141} \cdot \left(-0,029 \cdot \left(92 + \frac{1}{2}\right) + 87,36\right) = 84,68$$

⇒

$$a_{\text{Jun}} = -\frac{141}{4031915} \cdot \left(-0,029 \cdot \left(92 + \frac{1}{2}\right) + 87,36\right) = -0,003$$

⇒

$$\widetilde{b}_{\text{Jun}} = \frac{4031915 + 141 \cdot 92}{4031915} \cdot 84,68 = 84,95$$

⇒

$${}^{(F_2)}y = -0,003 \cdot x + 84,95 \qquad \text{kont.SLR}$$

⇒

$${}^{(F_2)}y_{\text{Jun}} = -0,003 \cdot x + 84,68 \qquad \text{disk.SLR}$$

Probe

$${}^{(F_2)}a_{\text{Mai}} \cdot \left(x_e^{\text{Mai}} + \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Mai}} = {}^{(F_2)}a_{\text{Jun}} \cdot \left(x_a^{\text{Jun}} - \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Jun}} = \text{disk.SLR}\,(x = 0)$$

⇒

$$-0,029 \cdot \left(92 + \frac{1}{2}\right) + 87,36 = -0,003 \cdot \left(93 - \frac{1}{2}\right) + 84,95 = -0,003 \cdot 0 + 84,68$$

⇒

$$84,68 \approx 84,67 \approx 84,68$$

⇒

$${}^{(F_2)}a_{\text{Jun}} = -0,003 \qquad {}^{(F_2)}b_{\text{Jun}} = 84,68$$

⇒

$${}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Jun}} = 84,95$$

Erweiterung

$$b_{\text{Jun}} - \widetilde{b}_{\text{Jun}} = a_{\text{Jun}} \cdot x_e^{\text{Jun}}$$

⇒

$$-0,27 \approx -0,28$$

7.6 Juli

m	Tag	X	Y	X*Y	X*X
1	123	123	86,0	10578,0	15129
2	124	124	86,5	10726,0	15376
3	125	125	85,5	10687,5	15625
	126	0	0	0	0
	127	0	0	0	0
4	128	128	86,5	11072,0	16384
5	129	129	85,5	11029,5	16641
6	130	130	85,5	11115,0	16900
7	131	131	85,0	11135,0	17161
8	132	132	86,0	11352,0	17424
	133	0	0	0	0
	134	0	0	0	0
9	135	135	85,0	11475,0	18225
10	136	136	85,5	11628,0	18496
11	137	137	85,0	11645,0	18769
12	138	138	85,0	11730,0	19044
13	139	139	85,0	11815,0	19321
	140	0	0	0	0
14	141	141	84,5	11914,5	19881
15	142	142	84,5	11999,0	20164
16	143	143	85,5	12226,5	20449
17	144	144	85,5	12312,0	20736
18	145	145	86,0	12470,0	21025
19	146	146	85,5	12483,0	21316
	147	0	0	0	0
	148	0	0	0	0
20	149	149	85,0	12665,0	22201
21	150	150	85,5	12825,0	22500
22	151	151	85,5	12910,5	22801
23	152	152	84,0	12768,0	23104
	153	0	0	0	0
23	**∑:**	**3170**	**1963,5**	**270561,5**	**438672**
m	**Tag**	**X**	**Y**	**X*Y**	**X*X**

Juli → stückweise, lineare Funktion

$$a = \frac{270561,5 \cdot 23 - 3170 \cdot 1963,5}{438672 \cdot 23 - 3170^2} \qquad b = \frac{438672 \cdot 1963,5 - 270561,5 \cdot 3170}{438672 \cdot 23 - 3170^2}$$

⇒

$$a = -0,034 \qquad b = 90,06$$

⇒

$$y = -0,034 \cdot x + 90,06 \qquad \text{SLR}$$

Fall 2

$$x_e^{\text{Jun}} = 122 \qquad a_{\text{Jun}} = -0,003 \qquad \widetilde{b}_{\text{Jun}} = 84,95$$

⇒

$$x_a^{\text{Jul}} = 123 \qquad x_e^{\text{Jul}} = 153$$

⇒

$$Z_{\text{Jul}} = 270561,5 \cdot 23 - 3170 \cdot 1963,5 = -1380,5$$
$$N_{\text{Jul}} = 438672 \cdot 1963,5 - 270561,5 \cdot 3170 = 3652517$$

⇒

$$b_{\text{Jul}} = \frac{2 \cdot 3652517}{2 \cdot 3652517 - 1380,5} \cdot \left(-0,003 \cdot \left(122 + \frac{1}{2}\right) + 84,95\right) = 84,60$$

⇒

$$a_{\text{Jul}} = -\frac{1380,5}{3652517} \cdot \left(-0,003 \cdot \left(122 + \frac{1}{2}\right) + 84,95\right) = -0,032$$

⇒

$$\widetilde{b}_{\text{Jul}} = \frac{3652517 + 1380,5 \cdot 122}{3652517} \cdot 84,60 = 88,50$$

⇒

$${}^{(F_2)}y = -0,032 \cdot x + 88,50 \qquad \text{kont.SLR}$$

⇒

$${}^{(F_2)}y_{\text{Jul}} = -0,032 \cdot x + 84,60 \qquad \text{disk.SLR}$$

Probe

$${}^{(F_2)}a_{\text{Jun}} \cdot \left(x_e^{\text{Jun}} + \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Jun}} = {}^{(F_2)}a_{\text{Jul}} \cdot \left(x_a^{\text{Jul}} - \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Jul}} = \text{disk.SLR}\ (x = 0)$$

⇒

$$-0,003 \cdot \left(122 + \frac{1}{2}\right) + 84,95 = -0,032 \cdot \left(123 - \frac{1}{2}\right) + 88,50 = -0,032 \cdot 0 + 84,60$$

⇒

$$84,58 = 84,58 \approx 84,60$$

⇒

$${}^{(F_2)}a_{\text{Jul}} = -0,032 \qquad {}^{(F_2)}b_{\text{Jul}} = 84,60$$

⇒

$${}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Jul}} = 88,50$$

Erweiterung

$$b_{\text{Jul}} - \widetilde{b}_{\text{Jul}} = a_{\text{Jul}} \cdot x_e^{\text{Jun}}$$

⇒

$$-3,9 = -3,9$$

7.7 August

m	Tag	X	Y	X*Y	X*X
	154	0	0	0	0
	155	0	0	0	0
1	156	156	85,0	13260,0	24336
2	157	157	85,0	13345,0	24649
3	158	158	85,0	13430,0	24964
4	159	159	86,0	13674,0	25281
5	160	160	85,0	13600,0	25600
	161	0	0	0	0
	162	0	0	0	0
6	163	163	85,5	13936,5	26569
7	164	164	86,0	14104,0	26896
8	165	165	85,5	14107,5	27225
9	166	166	85,5	14193,0	27556
10	167	167	85,5	14278,5	27889
	168	0	0	0	0
	169	0	0	0	0
11	170	170	85,5	14535,0	28900
12	171	171	85,0	14535,0	29241
13	172	172	85,0	14620,0	29584
14	173	173	85,0	14705,0	29929
15	174	174	84,5	14703,0	30276
16	175	175	84,5	14787,5	30625
	176	0	0	0	0
17	177	177	84,5	14956,5	31329
18	178	178	84,5	15041,0	31684
19	179	179	84,5	15125,5	32041
20	180	180	85,0	15300,0	32400
	181	0	0	0	0
	182	0	0	0	0
	183	0	0	0	0
21	184	184	85,0	15640,0	33856
21	**∑:**	**3548**	**1787,0**	**301877,0**	**600830**
m	**Tag**	**X**	**Y**	**X*Y**	**X*X**

August → stückweise, lineare Regression

$$a = \frac{301877 \cdot 21 - 3548 \cdot 1787}{600830 \cdot 21 - 3548^2} \qquad b = \frac{600830 \cdot 1787 - 301877 \cdot 3548}{600830 \cdot 21 - 3548^2}$$

⇒

$$a = -0,029 \qquad b = 90,08$$

⇒

$$y = -0,029 \cdot x + 90,08 \qquad \text{SLR}$$

Fall 2

$$x_e^{\text{Jul}} = 153 \qquad a_{\text{Jul}} = -0,032 \qquad \widetilde{b}_{\text{Jul}} = 88,50$$

⇒

$$x_a^{\text{Aug}} = 154 \qquad x_e^{\text{Aug}} = 184$$

⇒

$$Z_{\text{Aug}} = 301877 \cdot 21 - 3548 \cdot 1787 = -859$$
$$N_{\text{Aug}} = 600830 \cdot 1787 - 301877 \cdot 3548 = 2623614$$

⇒

$$b_{\text{Aug}} = \frac{2 \cdot 2623614}{2 \cdot 2623614 - 859} \cdot \left(-0,032 \cdot \left(153 + \frac{1}{2}\right) + 88,50\right) = 83,60$$

⇒

$$a_{\text{Aug}} = -\frac{859}{2623614} \cdot \left(-0,032 \cdot \left(153 + \frac{1}{2}\right) + 88,50\right) = -0,027$$

⇒

$$\widetilde{b}_{\text{Aug}} = \frac{2623614 + 859 \cdot 153}{2623614} \cdot 83,60 = 87,79$$

⇒

$${}^{(F_2)}y = -0,027 \cdot x + 87,79 \qquad \text{kont.SLR}$$

⇒

$${}^{(F_2)}y_{\text{Aug}} = -0,027 \cdot x + 83,60 \qquad \text{disk.SLR}$$

Probe

$${}^{(F_2)}a_{\text{Jul}} \cdot \left(x_e^{\text{Jul}} + \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Jul}} = {}^{(F_2)}a_{\text{Aug}} \cdot \left(x_a^{\text{Aug}} - \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Aug}} = \text{disk.SLR}\ (x = 0)$$

⇒

$$-0,032 \cdot \left(153 + \frac{1}{2}\right) + 88,50 = -0,027 \cdot \left(154 - \frac{1}{2}\right) + 87,79 = -0,027 \cdot 0 + 83,60$$

⇒

$$83,59 \approx 83,65 \approx 83,60$$

⇒

$${}^{(F_2)}a_{\text{Aug}} = -0,027 \qquad {}^{(F_2)}b_{\text{Aug}} = 83,60$$

⇒

$${}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Aug}} = 87,79$$

Erweiterung

$$b_{\text{Aug}} - \widetilde{b}_{\text{Aug}} = a_{\text{Aug}} \cdot x_e^{\text{Jul}}$$

⇒

$$-4,19 \approx -4,13$$

7.8 September

m	Tag	X	Y	X*Y	X*X
1	185	185	85,0	15725,0	34225
2	186	186	85,0	15810,0	34596
3	187	187	85,0	15895,0	34969
4	188	188	85,0	15980,0	35344
5	189	189	85,5	16159,5	35721
	190	0	0	0	0
6	191	191	84,5	16139,5	36481
7	192	192	85,0	16320,0	36864
8	193	193	85,5	16501,5	37249
9	194	194	86,0	16684,0	37636
10	195	195	84,5	16477,5	38025
	196	0	0	0	0
	197	0	0	0	0
11	198	198	85,0	16830,0	39204
12	199	199	84,5	16815,5	39601
	200	0	0	0	0
13	201	201	84,5	16984,5	40401
14	202	202	84,5	17069,0	40804
15	203	203	84,0	17052,0	41209
	204	0	0	0	0
16	205	205	84,0	17220,0	42025
17	206	206	84,5	17407,0	42436
18	207	207	84,5	17491,5	42849
	208	0	0	0	0
19	209	209	84,5	17660,5	43681
	210	0	0	0	0
	211	0	0	0	0
20	212	212	84,0	17808,0	44944
	213	0	0	0	0
21	214	214	84,5	18083,0	45796
21	**∑:**	**4156**	**1779,5**	**352113,0**	**824060**
m	**Tag**	**X**	**Y**	**X*Y**	**X*X**

September → stückweise, lineare Regression

$$a = \frac{352113 \cdot 21 - 4156 \cdot 1779,5}{824060 \cdot 21 - 4156^2} \qquad b = \frac{824060 \cdot 1779,5 - 352113 \cdot 4156}{824060 \cdot 21 - 4156^2}$$

⇒

$$a = -0,037 \qquad b = 92,13$$

⇒

$$y = -0,037 \cdot x + 92,13 \qquad \text{SLR}$$

Fall 2

$$x_e^{\text{Aug}} = 184 \qquad a_{\text{Aug}} = -0,027 \qquad \widetilde{b}_{\text{Aug}} = 87,79$$

⇒

$$x_a^{\text{Sep}} = 185 \qquad x_e^{\text{Sep}} = 214$$

⇒

$$Z_{\text{Sep}} = 352113 \cdot 21 - 4156 \cdot 1779,5 = -1229$$
$$N_{\text{Sep}} = 824060 \cdot 1779,5 - 352113 \cdot 4156 = 3033142$$

⇒

$$b_{\text{Sep}} = \frac{2 \cdot 3033142}{2 \cdot 3033142 - 1229} \cdot \left(-0,027 \cdot \left(185 + \frac{1}{2}\right) + 87,79\right) = 82,80$$

⇒

$$a_{\text{Sep}} = -\frac{1229}{3033142} \cdot \left(-0,027 \cdot \left(185 + \frac{1}{2}\right) + 87,79\right) = -0,034$$

⇒

$$\widetilde{b}_{\text{Sep}} = \frac{3033142 + 1229 \cdot 184}{3033142} \cdot 82,80 = 88,97$$

⇒

$${}^{(F_2)}y = -0,034 \cdot x + 88,97 \qquad \text{kont.SLR}$$

⇒

$${}^{(F_2)}y_{\text{Sep}} = -0,034 \cdot x + 82,80 \qquad \text{disk.SLR}$$

Probe

$${}^{(F_2)}a_{\text{Aug}} \cdot \left(x_e^{\text{Aug}} + \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Aug}} = {}^{(F_2)}a_{\text{Sep}} \cdot \left(x_a^{\text{Sep}} - \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Sep}} = \text{disk.SLR}\ (x = 0)$$

⇒

$$-0,027 \cdot \left(184 + \frac{1}{2}\right) + 87,79 = -0,034 \cdot \left(185 - \frac{1}{2}\right) + 88,97 = -0,034 \cdot 0 + 82,80$$

⇒

$$82,80 \approx 82,70 \approx 82,80$$

⇒

$${}^{(F_2)}a_{\text{Sep}} = -0,034 \qquad {}^{(F_2)}b_{\text{Sep}} = 82,80$$

⇒

$${}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Sep}} = 88,97$$

Erweiterung

$$b_{\text{Sep}} - \widetilde{b}_{\text{Sep}} = a_{\text{Sep}} \cdot x_e^{\text{Aug}}$$

⇒

$$-6,17 \approx -6,26$$

7.9 Oktober

m	Tag	X	Y	X*Y	X*X
1	215	215	84,0	18060,0	46225
2	216	216	84,5	18252,0	46656
	217	0	0	0	0
	218	0	0	0	0
	219	0	0	0	0
	220	0	0	0	0
	221	0	0	0	0
	222	0	0	0	0
	223	0	0	0	0
	224	0	0	0	0
	225	0	0	0	0
	226	0	0	0	0
	227	0	0	0	0
	228	0	0	0	0
	229	0	0	0	0
	230	0	0	0	0
	231	0	0	0	0
	232	0	0	0	0
	233	0	0	0	0
3	234	234	84,0	19656,0	54756
4	235	235	84,0	19740,0	55225
5	236	236	83,5	19706,0	55696
6	237	237	83,5	19789,5	56169
7	238	238	83,5	19873,0	56644
	239	0	0	0	0
8	240	240	83,5	20040,0	57600
9	241	241	84,0	20244,0	58081
10	242	242	84,0	20328,0	58564
11	243	243	84,0	20412,0	59049
	244	0	0	0	0
	245	0	0	0	0
11	**∑:**	**2577**	**922,5**	**216100,5**	**604665**
m	**Tag**	**X**	**Y**	**X*Y**	**X*X**

Oktober → stückweise, lineare Regression

$$a = \frac{216100,5 \cdot 11 - 2577 \cdot 922,5}{604665 \cdot 11 - 2577^2} \qquad b = \frac{604665 \cdot 922,5 - 216100,5 \cdot 2577}{604665 \cdot 11 - 2577^2}$$

⇒

$$a = -0,017 \qquad b = 87,86$$

⇒

$$y = -0,017 \cdot x + 87,86 \qquad \text{SLR}$$

Fall 2

$$x_e^{\text{Sep}} = 214 \qquad a_{\text{Sep}} = -0,034 \qquad \widetilde{b}_{\text{Sep}} = 88,97$$

⇒

$$x_a^{\text{Okt}} = 215 \qquad x_e^{\text{Okt}} = 245$$

⇒

$$Z_{\text{Okt}} = 216100,5 \cdot 11 - 2577 \cdot 922,5 = -177$$
$$N_{\text{Okt}} = 604665 \cdot 922,5 - 216100,5 \cdot 2577 = 912474$$

⇒

$$b_{\text{Okt}} = \frac{2 \cdot 912474}{2 \cdot 912474 - 177} \cdot \left(-0,034 \cdot \left(214 + \frac{1}{2}\right) + 88,97\right) = 81,68$$

⇒

$$a_{\text{Okt}} = -\frac{177}{912474} \cdot \left(-0,034 \cdot \left(214 + \frac{1}{2}\right) + 88,97\right) = -0,016$$

⇒

$$\widetilde{b}_{\text{Okt}} = \frac{912474 + 177 \cdot 214}{912474} \cdot 81,68 = 85,07$$

⇒

$${}^{(F_2)}y = -0,016 \cdot x + 85,07 \qquad \text{kont.SLR}$$

⇒

$${}^{(F_2)}y_{\text{Okt}} = -0,016 \cdot x + 81,68 \qquad \text{disk.SLR}$$

Probe

$${}^{(F_2)}a_{\text{Sep}} \cdot \left(x_e^{\text{Sep}} + \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Sep}} = {}^{(F_2)}a_{\text{Okt}} \cdot \left(x_a^{\text{Okt}} - \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Okt}} = \text{disk.SLR}\,(x = 0)$$

⇒

$$-0,034 \cdot \left(214 + \frac{1}{2}\right) + 88,97 = -0,016 \cdot \left(215 - \frac{1}{2}\right) + 85,07 = -0,016 \cdot 0 + 81,68$$

⇒

$$81,68 \approx 81,64 \approx 81,68$$

⇒

$${}^{(F_2)}a_{\text{Okt}} = -0,016 \qquad {}^{(F_2)}b_{\text{Okt}} = 81,68$$

⇒

$${}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Okt}} = 85,07$$

Erweiterung

$$b_{\text{Okt}} - \widetilde{b}_{\text{Okt}} = a_{\text{Okt}} \cdot x_e^{\text{Sep}}$$

⇒

$$-3,39 \approx -3,42$$

7.10 November

m	Tag	X	Y	X*Y	X*X
	246	0	0	0	0
1	247	247	83,5	20624,5	61009
2	248	248	82,5	20460,0	61504
3	249	249	83,5	20791,5	62001
4	250	250	83,0	20750,0	62500
5	251	251	83,0	20833,0	63001
	252	0	0	0	0
	253	0	0	0	0
6	254	254	84,0	21336,0	64516
7	255	255	83,5	21292,5	65025
8	256	256	84,0	21504,0	65536
9	257	257	83,5	21459,5	66049
	258	0	0	0	0
	259	0	0	0	0
	260	0	0	0	0
10	261	261	84,0	21924,0	68121
11	262	262	84,0	22008,0	68644
12	263	263	84,0	22092,0	69169
13	264	264	83,5	22044,0	69696
14	265	265	84,5	22392,5	70225
	266	0	0	0	0
	267	0	0	0	0
15	268	268	84,0	22512,0	71824
16	269	269	84,5	22730,5	72361
17	270	270	84,0	22680,0	72900
18	271	271	84,5	22899,5	73441
19	272	272	84,0	22848,0	73984
	273	0	0	0	0
	274	0	0	0	0
20	275	275	84,0	23100,0	75625
20	**∑:**	**5207**	**1675,5**	**436281,5**	**1357131**
m	**Tag**	**X**	**Y**	**X*Y**	**X*X**

November → stückweise, lineare Regression

$$a = \frac{436281,5 \cdot 20 - 5207 \cdot 1675,5}{1357131 \cdot 20 - 5207^2} \qquad b = \frac{1357131 \cdot 1675,5 - 436281,5 \cdot 5207}{1357131 \cdot 20 - 5207^2}$$

⇒

$$a = 0,044 \qquad b = 72,39$$

⇒

$$y = 0,044 \cdot x + 72,39 \qquad \text{SLR}$$

Fall 2

$$x_e^{\text{Okt}} = 245 \qquad a_{\text{Okt}} = -0,016 \qquad \widetilde{b}_{\text{Okt}} = 85,07$$

⇒

$$x_a^{\text{Nov}} = 246 \qquad x_e^{\text{Nov}} = 275$$

⇒

$$Z_{\text{Nov}} = 436281,5 \cdot 20 - 5207 \cdot 1675,5 = 1301,5$$
$$N_{\text{Nov}} = 1357131 \cdot 1675,5 - 436281,5 \cdot 5207 = 2155220$$

⇒

$$b_{\text{Nov}} = \frac{2 \cdot 2155220}{2 \cdot 2155220 + 1301,5} \cdot \left(-0,016 \cdot \left(245 + \frac{1}{2}\right) + 85,07\right) = 81,12$$

⇒

$$a_{\text{Nov}} = \frac{1301,5}{2155220} \cdot \left(-0,016 \cdot \left(254 + \frac{1}{2}\right) + 85,07\right) = 0,049$$

⇒

$$\widetilde{b}_{\text{Nov}} = \frac{2155220 - 1301,5 \cdot 245}{2155220} \cdot 81,12 = 69,12$$

⇒

$${}^{(F_2)}y = 0,049 \cdot x + 69,12 \qquad \text{kont.SLR}$$

⇒

$${}^{(F_2)}y_{\text{Nov}} = 0,049 \cdot x + 81,12 \qquad \text{disk.SLR}$$

Probe

$${}^{(F_2)}a_{\text{Okt}} \cdot \left(x_e^{\text{Okt}} + \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Okt}} = {}^{(F_2)}a_{\text{Nov}} \cdot \left(x_a^{\text{Nov}} - \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Nov}} = \text{disk.SLR}\ (x = 0)$$

⇒

$$-0,016 \cdot \left(245 + \frac{1}{2}\right) + 85,07 = 0,049 \cdot \left(246 - \frac{1}{2}\right) + 69,12 = 0,049 \cdot 0 + 81,12$$

⇒

$$81,14 \approx 81,15 \approx 81,12$$

⇒

$${}^{(F_2)}a_{\text{Nov}} = 0,049 \qquad {}^{(F_2)}b_{\text{Nov}} = 81,12$$

⇒

$${}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Nov}} = 69,12$$

Erweiterung

$$b_{\text{Nov}} - \widetilde{b}_{\text{Nov}} = a_{\text{Nov}} \cdot x_e^{\text{Nov}}$$

⇒

$$12 = 12$$

7.11 Dezember

m	Tag	X	Y	X*Y	X*X
1	276	276	84,5	23322,0	76176
2	277	277	84,0	23268,0	76729
3	278	278	83,5	23213,0	77284
4	279	279	84,5	23575,5	77841
	280	0	0	0	0
	281	0	0	0	0
5	282	282	85,5	24111,0	79524
6	283	283	85,5	24196,5	80089
7	284	284	85,0	24140,0	80656
8	285	285	84,5	24082,5	81225
9	286	286	84,5	24167,0	81796
	287	0	0	0	0
	288	0	0	0	0
10	289	289	84,0	24276,0	83521
11	290	290	84,0	24360,0	84100
12	291	291	84,5	24589,5	84681
13	292	292	84,5	24674,0	85264
	293	0	0	0	0
	294	0	0	0	0
	295	0	0	0	0
	296	0	0	0	0
	297	0	0	0	0
	298	0	0	0	0
	299	0	0	0	0
	300	0	0	0	0
	301	0	0	0	0
	302	0	0	0	0
	303	0	0	0	0
	304	0	0	0	0
	305	0	0	0	0
	306	0	0	0	0
13	**∑:**	**3692**	**1098,5**	**311975,0**	**1048886**
m	**Tag**	**X**	**Y**	**X*Y**	**X*X**

Dezember → stückweise, lineare Regression

$$a = \frac{311975 \cdot 13 - 3692 \cdot 1098,5}{1048886 \cdot 13 - 3692^2} \qquad b = \frac{1048886 \cdot 1098,5 - 311975 \cdot 3692}{1048886 \cdot 13 - 3692^2}$$

⇒

$$a = 0,003 \qquad b = 83,71$$

⇒

$$y = 0,003 \cdot x + 83,71 \qquad \text{SLR}$$

Fall 2

$$x_e^{\text{Nov}} = 275 \qquad a_{\text{Nov}} = 0,049 \qquad \widetilde{b}_{\text{Nov}} = 12$$

⇒

$$x_a^{\text{Dez}} = 276 \qquad x_e^{\text{Dez}} = 306$$

⇒

$$Z_{\text{Dez}} = 311975 \cdot 13 - 3692 \cdot 1098,5 = 13$$
$$N_{\text{Dez}} = 1048886 \cdot 1098,5 - 311975 \cdot 3692 = 389571$$

⇒

$$b_{\text{Dez}} = \frac{2 \cdot 389571}{2 \cdot 389571 + 13} \cdot \left(0,049 \cdot \left(275 + \frac{1}{2}\right) + 69,12\right) = 82,62$$

⇒

$$a_{\text{Dez}} = \frac{13}{389571} \cdot \left(0,049 \cdot \left(275 + \frac{1}{2}\right) + 69,12\right) = 0,003$$

⇒

$$\widetilde{b}_{\text{Dez}} = \frac{389571 - 13 \cdot 275}{389571} \cdot 82,62 = 81,86$$

⇒

$${}^{(F_2)}y = 0,003 \cdot x + 81,86 \qquad \text{kont.SLR}$$

⇒

$${}^{(F_2)}y_{\text{Dez}} = 0,003 \cdot x + 82,62 \qquad \text{disk.SLR}$$

Probe

$${}^{(F_2)}a_{\text{Nov}} \cdot \left(x_e^{\text{Nov}} + \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Nov}} = {}^{(F_2)}a_{\text{Dez}} \cdot \left(x_a^{\text{Dez}} - \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Dez}} = \text{disk.SLR}\ (x = 0)$$

⇒

$$0,049 \cdot \left(275 + \frac{1}{2}\right) + 69,12 = 0,003 \cdot \left(276 - \frac{1}{2}\right) + 81,86 = 0,003 \cdot 0 + 82,62$$

⇒

$$82,62 \approx 82,68 \approx 82,62$$

⇒

$${}^{(F_2)}a_{\text{Dez}} = 0,003 \qquad {}^{(F_2)}b_{\text{Dez}} = 82,62$$

⇒

$${}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Dez}} = 81,86$$

Erweiterung

$$b_{\text{Dez}} - \widetilde{b}_{\text{Dez}} = a_{\text{Dez}} \cdot x_e^{\text{Dez}}$$

⇒

$$0,76 = 0,76$$

7.12 Januar

m	Tag	X	Y	X*Y	X*X
	307	0	0	0	0
	308	0	0	0	0
	309	0	0	0	0
1	310	310	85,5	26505,0	96100
2	311	311	85,0	26435,0	96721
3	312	312	85,0	26520,0	97344
4	313	313	85,0	26605,0	97969
5	314	314	86,5	27161,0	98596
	315	0	0	0	0
	316	0	0	0	0
6	317	317	85,5	27103,5	100489
7	318	318	86,0	27348,0	101124
8	319	319	85,5	27274,5,0	101761
9	320	320	85,5	27360,0	102400
10	321	321	84,5	27124,5	103041
	322	0	0	0	0
	323	0	0	0	0
11	324	324	84,5	27378,0	104976
12	325	325	85,5	27787,5	105625
13	326	326	85,0	27710,0	106276
14	327	327	85,5	27958,5	106929
15	328	328	85,5	28044,0	107584
	329	0	0	0	0
	330	0	0	0	0
16	331	331	87,0	28797,0	109561
17	332	332	85,5	28386,0	110224
18	333	333	86,0	28638,0	110889
19	334	334	86,0	28724,0	111556
20	335	335	86,0	28810,0	112225
	336	0	0	0	0
	337	0	0	0	0
20	**∑:**	**6450**	**1710,5**	**551669,5**	**2081390**
m	**Tag**	**X**	**Y**	**X*Y**	**X*X**

Januar → stückweise, lineare Regression

$$a = \frac{551669,5 \cdot 20 - 6450 \cdot 1710,5}{2081390 \cdot 20 - 6450^2} \qquad b = \frac{2081390 \cdot 1710,5 - 551669,5 \cdot 6450}{2081390 \cdot 20 - 6450^2}$$

⇒

$$a = 0,026 \qquad b = 77,05$$

⇒

$$y = 0,026 \cdot x + 77,05 \qquad \text{SLR}$$

Fall 2

$$x_e^{\text{Dez}} = 306 \qquad a_{\text{Dez}} = 0,003 \qquad \widetilde{b}_{\text{Dez}} = 81,86$$

⇒

$$x_a^{\text{Jan}} = 307 \qquad x_e^{\text{Jan}} = 337$$

⇒

$$Z_{\text{Jan}} = 551669,5 \cdot 20 - 6450 \cdot 1710,5 = 665$$
$$N_{\text{Jan}} = 2081390 \cdot 1710,5 - 551669,5 \cdot 6450 = 1949320$$

⇒

$$b_{\text{Jan}} = \frac{2 \cdot 1949320}{2 \cdot 1949320 + 665} \cdot \left(0,003 \cdot \left(306 + \frac{1}{2}\right) + 81,86\right) = 82,77$$

⇒

$$a_{\text{Jan}} = \frac{665}{1949320} \cdot \left(0,003 \cdot \left(306 + \frac{1}{2}\right) + 81,86\right) = 0,028$$

⇒

$$\widetilde{b}_{\text{Jan}} = \frac{1949320 - 665 \cdot 306}{1949320} \cdot 82,77 = 74,13$$

⇒

$${}^{(F_2)}y = 0,028 \cdot x + 74,13 \qquad \text{kont.SLR}$$

⇒

$${}^{(F_2)}y_{\text{Jan}} = 0,028 \cdot x + 82,77 \qquad \text{disk.SLR}$$

Probe

$${}^{(F_2)}a_{\text{Dez}} \cdot \left(x_e^{\text{Dez}} + \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Dez}} = {}^{(F_2)}a_{\text{Jan}} \cdot \left(x_a^{\text{Jan}} - \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Jan}} = \text{disk.SLR}\ (x = 0)$$

⇒

$$0,003 \cdot \left(306 + \frac{1}{2}\right) + 81,86 = 0,028 \cdot \left(307 - \frac{1}{2}\right) + 74,13 = 0,028 \cdot 0 + 82,77$$

⇒

$$82,78 \approx 82,77 = 82,77$$

⇒

$${}^{(F_2)}a_{\text{Jan}} = 0,028 \qquad {}^{(F_2)}b_{\text{Jan}} = 82,77$$

⇒

$${}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Jan}} = 74,13$$

Erweiterung

$$b_{\text{Jan}} - \widetilde{b}_{\text{Jan}} = a_{\text{Jan}} \cdot x_e^{\text{Dez}}$$

⇒

$$8,64 \approx 8,57$$

7.13 Februar

m	Tag	X	Y	X*Y	X*X
1	338	338	85,0	28730,0	114244
2	339	339	85,5	28984,5	114921
3	340	340	85,0	28900,0	115600
4	341	341	85,5	29155,5	116281
5	342	342	85,0	29070,0	116964
	343	0	0	0	0
	344	0	0	0	0
6	345	345	85,5	29497,5	119025
7	346	346	85,5	29583,0	119716
8	347	347	85,0	29495,0	120409
9	348	348	85,5	29754,0	121104
10	349	349	85,0	29665,0	121801
	350	0	0	0	0
	351	0	0	0	0
11	352	352	85,0	29920,0	123904
12	353	353	85,0	30005,0	124609
13	354	354	85,0	30090,0	125316
14	355	355	85,0	30175,0	126025
15	356	356	85,5	30438,0	126736
	357	0	0	0	0
	358	0	0	0	0
16	359	359	85,5	30694,5	128881
17	360	360	85,5	30780,0	129600
18	361	361	85,0	30685,0	130321
19	362	362	86,0	31132,0	131044
20	363	363	84,0	30492,0	131769
	364	0	0	0	0
	365	0	0	0	0
21	366	366	84,5	30927,0	133956
21	**∑:**	**7376**	**1788,5**	**628173,0**	**2592226**
m	**Tag**	**X**	**Y**	**X*Y**	**X*X**

Februar → stückweise, lineare Regression

$$a = \frac{628173 \cdot 21 - 7376 \cdot 1788,5}{2592226 \cdot 21 - 7376^2} \qquad b = \frac{2592226 \cdot 1788,5 - 628173 \cdot 7376}{2592226 \cdot 21 - 7376^2}$$

⇒

$$a = -0,011 \qquad b = 89,01$$

⇒

$$y = -0,011 \cdot x + 89,01 \qquad \text{SLR}$$

Fall 2

$$x_e^{\text{Jan}} = 337 \qquad a_{\text{Jan}} = 0,028 \qquad \widetilde{b}_{\text{Jan}} = 74,13$$

⇒

$$x_a^{\text{Feb}} = 338 \qquad x_e^{\text{Feb}} = 366$$

⇒

$$Z_{\text{Feb}} = 628173 \cdot 21 - 7376 \cdot 1788,5 = -343$$
$$N_{\text{Feb}} = 2592226 \cdot 1788,5 - 628173 \cdot 7376 = 2792153$$

⇒

$$b_{\text{Feb}} = \frac{2 \cdot 2792153}{2 \cdot 2792153 - 343} \cdot \left(0,028 \cdot \left(337 + \frac{1}{2}\right) + 74,13\right) = 83,59$$

⇒

$$a_{\text{Feb}} = -\frac{343}{2792153} \cdot \left(0,028 \cdot \left(337 + \frac{1}{2}\right) + 74,13\right) = -0,010$$

⇒

$$\widetilde{b}_{\text{Feb}} = \frac{2792153 + 343 \cdot 337}{2792153} \cdot 83,59 = 87,05$$

⇒

$${}^{(F_2)}y = -0,010 \cdot x + 87,05 \qquad \text{kont.SLR}$$

⇒

$${}^{(F_2)}y_{\text{Feb}} = -0,010 \cdot x + 83,59 \qquad \text{disk.SLR}$$

Probe

$${}^{(F_2)}a_{\text{Jan}} \cdot \left(x_e^{\text{Jan}} + \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Jan}} = {}^{(F_2)}a_{\text{Feb}} \cdot \left(x_a^{\text{Feb}} - \frac{1}{2}\right) + {}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Feb}} = \text{disk.SLR}\,(x = 0)$$

⇒

$$0,028 \cdot \left(337 + \frac{1}{2}\right) + 74,13 = -0,010 \cdot \left(338 - \frac{1}{2}\right) + 87,05 = -0,010 \cdot 0 + 83,59$$

⇒

$$83,58 \approx 83,68 \approx 83,59$$

⇒

$${}^{(F_2)}a_{\text{Feb}} = -0,010 \qquad {}^{(F_2)}b_{\text{Feb}} = 83,59$$

⇒

$${}^{(F_2)}\widetilde{b}_{\text{Feb}} = 87,05$$

Erweiterung

$$b_{\text{Feb}} - \widetilde{b}_{\text{Feb}} = a_{\text{Feb}} \cdot x_e^{\text{Jan}}$$

⇒

$$-3,46 \approx -3,37$$

7.14 Ermittlung der linearen Wichtungsfunktion

Monat	a_i	$x_e^{(i)}$	$a_i \cdot x_e^{(i)}$
Mae	+0,000	31	+0,000
Apr	+0,034	30	+1,020
Mai	-0,029	31	-0,899
Jun	+0,003	30	+0,090
Jul	-0,032	31	-0,992
Aug	-0,027	31	-0,837
Sep	-0,034	30	-1,020
Okt	-0,016	31	-0,496
Nov	+0,049	30	+1,470
Dez	+0,003	31	+0,093
Jan	+0,028	31	+0,868
Feb	-0,010	29	-0,290
$\sum$:	**-0,031**	**366**	**-0,993**
Monat	a_i	$x_e^{(i)}$	$a_i \cdot x_e^{(i)}$

$\Rightarrow$

$$\bar{a} = \frac{-0,5 \cdot 0,031 - 0,993}{1 + 366} = -0,00275 \qquad b = 0,000 \cdot \left(x_a^{\text{Mae}} - \frac{1}{2}\right) + 84,55 = 84,55$$

$\Rightarrow$

$$^{(F_2)}y_W = -0,00275 \cdot x + 84,55$$

Über die Zweipunktform muss sich das gleiche Ergebnis einstellen.

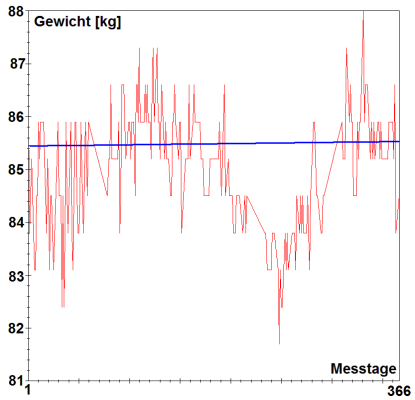
$$\bar{a} = \frac{-0,01 \cdot 366 + 87,21 - 84,55 + \frac{1}{2} \cdot (-0,01 - 0)}{366}$$

$$b = \frac{(2 \cdot 84,55 + 0 + 0,01) \cdot \left(366 + \frac{1}{2}\right) - 87,21}{2 \cdot 366}$$

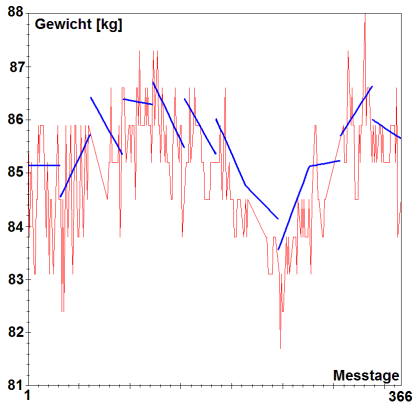
$\Rightarrow$

$$\bar{a} = -0,00275 \qquad b = 84,55$$

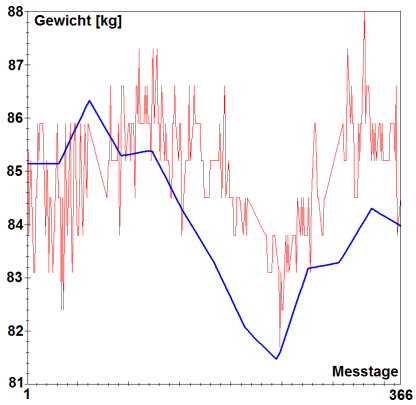
7.15 Grafische Darstellungen



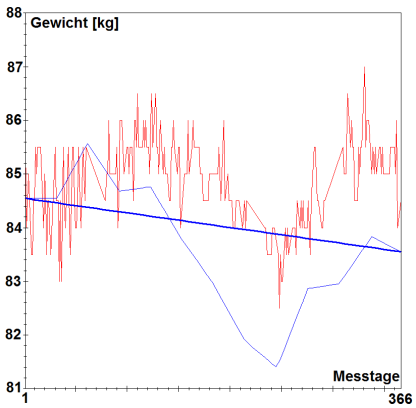
Die lineare Regressionfunktion über das ganze Jahr hinweg ergab sich mit $y = 0,0002 \cdot x + 84,81$. Damit hat der Proband innerhalb dieses Messjahres etwa 73g zugenommen. Da das Ausgaberaster der Waage jedoch 500g beträgt, liegt diese Aussage unterhalb der Vorhersageschwelle. Außerdem sind starke Stichprobenschwankungen in den einzelnen Intervallen zu verzeichnen, besonders in den Monaten Mai und Oktober. Daher ist eine reproduzierbare Aussage „schwerer/gleich/leichter“ nicht möglich.



Die diskrete, stückweise, lineare Regression innerhalb eines jeden Monats wurde durchgeführt und in obige Grafik eingebunden.



Die kontinuierliche, stückweise, lineare Regression innerhalb eines jeden Monats wurde durchgeführt und in obige Grafik eingebunden.



Die gewichtete, lineare Regressionsfunktion berechnet aus der kontinuierlichen, stückweisen, linearen Regression gibt sich zu $y = -0,00275 \cdot x + 84.55$. Sie gibt an, dass 993g an Gewicht verloren wurde. Diese Funktion entspricht der Wichtungsfunktion über das Messjahr hinweg. Das bedeutet nicht, dass am Ende des Jahres ein höheres Gewicht vorliegt.

8 Beispiel II

Das Monitoring eines Reinraumes der Klasse ISO4 soll die Filtereffizienz eines Filtertyps der reinraumerzeugenden Technik protokollieren und das voraussichtliche Wechselintervall ermitteln. Dazu wird aus der Liste der ISO-spezifisch geforderten Partikelmessungen die tatsächlich gemessene Effizienz berechnet und monatlich so zusammengefasst, dass das Wechselintervall ermittelt werden kann.

Dazu wird die tägliche um 24:00 berechnete Effizienz des Monats November (2013, 2014, 2015) in eine Liste zusammengefasst und auf das gesamte Jahr bezogen.

Jahr	**m**	**Tag**	**X**	**Y**	**X*Y**	**X*X**
2012/13		0	0	0	0	0
2013		1	0	0	0	0
2013		2	0	0	0	0
2013	1	3	3	95,4	286,2	9
2013	2	4	4	92,5	370,0	16
2013	3	5	5	93,5	467,5	25
2013	4	6	6	94,9	569,4	36
2013	5	7	7	93	651,0	49
2013		8	0	0	0	0
2013		9	0	0	0	0
2013	6	10	10	92,5	925,0	100
2013	7	11	11	96,1	1057,1	121
2013	8	12	12	94,3	1131,6	144
2013	9	13	13	96,7	1257,1	169
2013	10	14	14	97,5	1365,0	196
2013		15	0	0	0	0
2013		16	0	0	0	0
2013	11	17	17	97,3	1654,1	289
2013	12	18	18	96,5	1737,0	324
2013	13	19	19	96,1	1825,9	361
2013	14	20	20	94,9	1898,0	400
2013	15	21	21	96,2	2020,2	441
2013		22	0	0	0	0
2013		23	0	0	0	0
2013	16	24	24	96,9	2325,6	576
2013	17	25	25	97,3	2432,5	625
2013	18	26	26	96,5	2509,0	676
2013	19	27	27	92,5	2497,5	729
2013	20	28	28	97,3	2724,4	784
2013		29	0	0	0	0
2013/14		30	0	0	0	0
2014		31	0	0	0	0
2014	21	32	32	96,5	3088,0	1024

2014	22	33	33	96,4	3181,2	1089
2014	23	34	34	96,1	3267,4	1156
2014	24	35	35	89,7	3139,5	1225
2014	25	36	36	92,6	3333,6	1296
2014		37	0	0	0	0
2014		38	0	0	0	0
2014	26	39	39	96,7	3771,3	1521
2014	27	40	40	95,8	3832,0	1600
2014	28	41	41	96,8	3968,8	1681
2014	29	42	42	96,7	4061,4	1764
2014	30	43	43	95,7	4115,1	1849
2014		44	0	0	0	0
2014		45	0	0	0	0
2014	31	46	46	97,9	4503,4	2116
2014	32	47	47	98,2	4615,4	2209
2014	33	48	48	96,5	4632,0	2304
2014	34	49	49	97,2	4762,8	2401
2014	35	50	50	94,2	4710,0	2500
2014		51	0	0	0	0
2014		52	0	0	0	0
2014	36	53	53	97,0	5141,0	2809
2014	37	54	54	92,5	4995,0	2916
2014	38	55	55	93,9	5164,5	3025
2014	39	56	56	94,7	5303,2	3136
2014	40	57	57	96,7	5511,9	3249
2014		58	0	0	0	0
2014		59	0	0	0	0
2014/15		60	0	0	0	0
2015	41	61	61	96,4	5880,4	3721
2015	42	62	62	96,4	5976,8	3844
2015	43	63	63	96,9	6104,7	3969
2015	44	64	64	96,2	6156,8	4096
2015	45	65	65	96,5	6272,5	4225
2015		66	0	0	0	0
2015		67	0	0	0	0
2015	46	68	68	95,8	6514,4	4624
2015	47	69	69	95,1	6561,9	4761
2015	48	70	70	95,3	6671,0	4900
2015	49	71	71	95,9	6808,9	5041
2015		72	0	0	0	0
2015		73	0	0	0	0
2015		74	0	0	0	0
2015	50	75	75	87	6525,0	5625
2015	51	76	76	94,8	7204,8	5776

2015	52	77	77	95,2	7330,4	5929
2015	53	78	78	94,9	7402,2	6084
2015	54	79	79	92,9	7339,1	6241
2015		80	0	0	0	0
2015		81	0	0	0	0
2015	55	82	82	95,3	7814,6	6724
2015	56	83	83	94,2	7818,6	6889
2015	57	84	84	94,9	7971,6	7056
2015	58	85	85	94,0	7990,0	7225
2015	59	86	86	95,1	8178,6	7396
2015		87	0	0	0	0
2015		88	0	0	0	0
2015	60	89	89	96,7	8606,3	7921
2015/16		90	0	0	0	0
-	**60**	**∑:**	**2687**	**5719,2**	**255930,2**	**158987**
Jahr	**m**	**Tag**	**X**	**Y**	**X*Y**	**X*X**

Gesamttrend – Jahresregression

$$a = \frac{255930,2 \cdot 60 - 2687 \cdot 5719,2}{158987 \cdot 60 - 2687 \cdot 2687} \qquad b = \frac{158987 \cdot 5719,2 - 255930,2 \cdot 2687}{158987 \cdot 60 - 2687 \cdot 2687}$$

$\Rightarrow$

$$a = -0,005 \qquad b = 95,55$$

$\Rightarrow$

$$y = -0,005 \cdot x + 95,55$$

Die Filtereffizienz fällt demnach pro Jahr um $(0,005 \cdot 30 = 0,15\%)$ ab. Als unterer Grenzwert ist 95,0% erlaubt. Demnach müssen die Filter voraussichtlich nach $(95,55 - 95)/0,15 = 3,7$ Jahren gewechselt werden. Das wäre spätestens im Jahr $2013 + 3,7 = 2017$ bei gleichbleibenden Umwelt- und Betriebsparametern.

Damit die berechnete Zeit einen exakten Wert liefert, muss der Trend der Filtereffizienz tatsächlich über das gesamte Jahr linear sein. Die Berechnung der diskreten, stückweisen, linearen Regression gibt Auskunft darüber.

8.1 November 2013

Jahr	m	Tag	X	Y	X*Y	X*X
2012/13		0	0	0	0	0
2013		1	0	0	0	0
2013		2	0	0	0	0
2013	1	3	3	95,4	286,2	9
2013	2	4	4	92,5	370,0	16
2013	3	5	5	93,5	467,5	25
2013	4	6	6	94,9	569,4	36
2013	5	7	7	93	651,0	49
2013		8	0	0	0	0
2013		9	0	0	0	0
2013	6	10	10	92,5	925,0	100
2013	7	11	11	96,1	1057,1	121
2013	8	12	12	94,3	1131,6	144
2013	9	13	13	96,7	1257,1	169
2013	10	14	14	97,5	1365,0	196
2013		15	0	0	0	0
2013		16	0	0	0	0
2013	11	17	17	97,3	1654,1	289
2013	12	18	18	96,5	1737,0	324
2013	13	19	19	96,1	1825,9	361
2013	14	20	20	94,9	1898,0	400
2013	15	21	21	96,2	2020,2	441
2013		22	0	0	0	0
2013		23	0	0	0	0
2013	16	24	24	96,9	2325,6	576
2013	17	25	25	97,3	2432,5	625
2013	18	26	26	96,5	2509,0	676
2013	19	27	27	92,5	2497,5	729
2013	20	28	28	97,3	2724,4	784
2013		29	0	0	0	0
2013/14		30	0	0	0	0
-	**20**	**∑:**	**310**	**1907,9**	**29704,1**	**6070**
Jahr	**m**	**Tag**	**X**	**Y**	**X*Y**	**X*X**

November 2013 → Jahr 2013 → stückweise, lineare, Regression

$$a_{2013} = \frac{29704,1 \cdot 20 - 310 \cdot 1907,9}{6070 \cdot 20 - 310 \cdot 310} \qquad b_{2013} = \frac{6070 \cdot 1907,9 - 29704,1 \cdot 310}{6070 \cdot 20 - 310 \cdot 310}$$

⇒

$$a_{2013} = 0,104 \qquad b_{2013} = 93,78$$

⇒

$$y^{(2013)} = 0,104 \cdot x^{(2013)} + 93,78 \qquad \text{SLR}$$

Fall 1

$$x_a^{(2013)} = x_e^{(2012)} = 0$$

⇒

$$Z_{2013} = 29704,1 \cdot 20 - 310 \cdot 1907,9 = 2633$$
$$N_{2013} = 6070 \cdot 1907,9 - 2970,3 \cdot 310 = 2372682$$

Keine weiteren Berechnungen nötig, da Initialmonat.

$$^{(F_1)}y^{(2013)} = 0,104 \cdot x^{(2013)} + 93,78 \qquad \text{disk.SLR}$$

⇒

$$^{(F_1)}y_{2013}^{(2013)} = 0,104 \cdot x^{(2013)} + 93,78 \qquad \text{kont.SLR}$$

⇒

$$^{(F_1)}a_{2013} = 0,104 \qquad ^{(F_1)}b_{2013} = 93,78$$

⇒

$$^{(F_1)}\widetilde{b}_{2013} = 93,78$$

Erweiterung

$$b_{2013} - \widetilde{b}_{2013} = a_{2013} \cdot x_a^{(2013)}$$

⇒

$$93,78 - 93,78 = 0,104 \cdot 0$$

⇒

$$0 = 0$$

8.2 November 2014

Jahr	m	Tag	X	Y	X*Y	X*X
2013/14		30	0	0	0	0
2014		31	0	0	0	0
2014	1	32	32	96,5	3088,0	1024
2014	2	33	33	96,4	3181,2	1089
2014	3	34	34	96,1	3267,4	1156
2014	4	35	35	89,7	3139,5	1225
2014	5	36	36	92,6	3333,6	1296
2014		37	0	0	0	0
2014		38	0	0	0	0
2014	6	39	39	96,7	3771,3	1521
2014	7	40	40	95,8	3832,0	1600
2014	8	41	41	96,8	3968,8	1681
2014	9	42	42	96,7	4061,4	1764
2014	10	43	43	95,7	4115,1	1849
2014		44	0	0	0	0
2014		45	0	0	0	0
2014	11	46	46	97,9	4503,4	2116
2014	12	47	47	98,2	4615,4	2209
2014	13	48	48	96,5	4632,0	2304
2014	14	49	49	97,2	4762,8	2401
2014	15	50	50	94,2	4710,0	2500
2014		51	0	0	0	0
2014		52	0	0	0	0
2014	16	53	53	97,0	5141,0	2809
2014	17	54	54	92,5	4995,0	2916
2014	18	55	55	93,9	5164,5	3025
2014	19	56	56	94,7	5303,2	3136
2014	20	57	57	96,7	5511,9	3249
2014		58	0	0	0	0
2014		59	0	0	0	0
2014/15		60	0	0	0	0
-	**20**	**∑:**	**890**	**1911,8**	**85097,5**	**40870**
Jahr	**m**	**Tag**	**X**	**Y**	**X*Y**	**X*X**

November 2014 → Jahr 2014 → stückweise, lineare Regression

$$a_{2014} = \frac{85097,5 \cdot 20 - 890 \cdot 1911,8}{40870 \cdot 20 - 890 \cdot 890} \qquad b_{2014} = \frac{40870 \cdot 1911,8 - 85097,5 \cdot 890}{40870 \cdot 20 - 890 \cdot 890}$$

⇒

$$a_{2014} = 0,018 \qquad b_{2014} = 94,80$$

⇒

$$y^{(2014)} = 0,018 \cdot x^{(2014)} + 94,80 \qquad \text{SLR}$$

Fall 1

$$x_e^{(2013)} = 30 \qquad a_{2013} = 0,104 \qquad \widetilde{b}_{2013} = 93,78$$

⇒

$$x_a^{(2014)} = 30 \qquad x_e^{(2014)} = 60$$

⇒

$$Z_{2014} = 85097,5 \cdot 20 - 890 \cdot 1911,8 = 448$$
$$N_{2014} = 40870 \cdot 1911,8 - 85097,5 \cdot 890 = 2398491$$

⇒

$$b_{2014} = 0,104 \cdot 30 + 93,78 = 96,90$$

⇒

$$a_{2014} = \frac{448}{2398491} \cdot 96,90 = 0,018$$

⇒

$$\widetilde{b}_{2014} = \frac{2398491 - 448 \cdot 30}{2398491} \cdot 96,90 = 96,36$$

$$^{(F_1)}y^{(2014)} = 0,018 \cdot x^{(2014)} + 96,36 \qquad \text{kont.SLR}$$

⇒

$$^{(F_1)}y_{2014}^{(2014)} = 0,018 \cdot x^{(2014)} + 96,90 \qquad \text{disk.SLR}$$

Probe

$$0,104 \cdot x_e^{(2013)} + 93,78 = 0,018 \cdot x_a^{(2014)} + 96,36 = 0,018 \cdot 0 + 96,90$$

⇒

$$0,104 \cdot 30 + 93,78 = 0,018 \cdot 30 + 96,36 = 0,018 \cdot 0 + 96,90$$

⇒

$$96,90 = 96,90 = 96,90$$

⇒

$$^{(F_1)}a_{2014} = 0,018 \qquad ^{(F_1)}b_{2014} = 96,90$$

⇒

$$^{(F_1)}\widetilde{b}_{2014} = 96,36$$

Erweiterung

$$b_{2014} - \widetilde{b}_{2014} = a_{2014} \cdot x_a^{(2014)}$$

⇒

$$96,90 - 96,36 = 0,018 \cdot 30$$

⇒

$$0,54 = 0,54$$

8.3 November 2015

Jahr	m	Tag	X	Y	X*Y	X*X
2014/15		60	0	0	0	0
2015	1	61	61	96,4	5880,4	3721
2015	2	62	62	96,4	5976,8	3844
2015	3	63	63	96,9	6104,7	3969
2015	4	64	64	96,2	6156,8	4096
2015	5	65	65	96,5	6272,5	4225
2015		66	0	0	0	0
2015		67	0	0	0	0
2015	6	68	68	95,8	6514,4	4624
2015	7	69	69	95,1	6561,9	4761
2015	8	70	70	95,3	6671,0	4900
2015	9	71	71	95,9	6808,9	5041
2015		72	0	0	0	0
2015		73	0	0	0	0
2015		74	0	0	0	0
2015	10	75	75	87	6525,0	5625
2015	11	76	76	94,8	7204,8	5776
2015	12	77	77	95,2	7330,4	5929
2015	13	78	78	94,9	7402,2	6084
2015	14	79	79	92,9	7339,1	6241
2015		80	0	0	0	0
2015		81	0	0	0	0
2015	15	82	82	95,3	7814,6	6724
2015	16	83	83	94,2	7818,6	6889
2015	17	84	84	94,9	7971,6	7056
2015	18	85	85	94,0	7990,0	7225
2015	19	86	86	95,1	8178,6	7396
2015		87	0	0	0	0
2015		88	0	0	0	0
2015	20	89	89	96,7	8606,3	7921
2015/16		90	0	0	0	0
-	**20**	**∑:**	**1487**	**1899,5**	**141128,6**	**112047**
Jahr	**m**	**Tag**	**X**	**Y**	**X*Y**	**X*X**

November 2015 → Jahr 2015 → stückweise, lineare Regression

$$a_{2015} = \frac{141128,6 \cdot 20 - 1487 \cdot 1899,5}{112047 \cdot 20 - 1487 \cdot 1487} \qquad b_{2015} = \frac{112047 \cdot 1899,5 - 141128,6 \cdot 1487}{112047 \cdot 20 - 1487 \cdot 1487}$$

⇒

$$a_{2015} = -0,067 \qquad b_{2015} = 99,93$$

⇒

$$y^{(2015)} = -0,067 \cdot x^{(2015)} + 99,93 \qquad \text{SLR}$$

Fall 1

$$x_e^{(2014)} = 60 \qquad a_{2014} = 0,018 \qquad \widetilde{b}_{2014} = 96,36$$

⇒

$$x_a^{(2015)} = 60 \qquad x_e^{(2015)} = 90$$

⇒

$$Z_{2015} = 141128,6 \cdot 20 - 1487 \cdot 1899,5 = -1984,5$$
$$N_{2015} = 112047 \cdot 1899,5 - 141128,6 \cdot 1487 = 2975048,3$$

⇒

$$b_{2015} = 0,018 \cdot 60 + 96,36 = 97,44$$

⇒

$$a_{2015} = \frac{-1984,5}{2975048,3} \cdot 97,44 = -0,065$$

⇒

$$\widetilde{b}_{2015} = \frac{2975048,3 + 1984,5 \cdot 60}{2975048,3} \cdot 97,44 = 101,34$$

⇒

$${}^{(F_1)}y^{(2015)} = -0,065 \cdot x^{(2015)} + 101,34 \qquad \text{kont.SLR}$$

⇒

$${}^{(F_1)}y_{2015}^{(2015)} = -0,065 \cdot x^{(2015)} + 97,44 \qquad \text{disk.SLR}$$

Probe

$$0,018 \cdot x_e^{(2014)} + 96,36 = -0,065 \cdot x_a^{(2015)} + 101,34 = -0,065 \cdot 0 + 97,44$$

⇒

$$0,018 \cdot 60 + 96,36 = -0,065 \cdot 60 + 101,34 = -0,065 \cdot 0 + 97,44$$

⇒

$$97,44 = 97,44 = 97,44$$

⇒

$${}^{(F_1)}a_{2015} = -0,065 \qquad {}^{(F_1)}b_{2015} = 97,44$$

⇒

$${}^{(F_1)}\widetilde{b}_{2015} = 101,34$$

Erweiterung

$$b_{2015} - \widetilde{b}_{2015} = a_{2015} \cdot x_a^{(2015)}$$

⇒

$$97,44 - 101,34 = -0,065 \cdot 60$$

⇒

$$-3,9 = -3,9$$

8.4 Ermittlung der linearen Wichtungsfunktion

Jahr	a_i	$x_e^{(i)}$	$a_i \cdot x_e^{(i)}$
2013	+0,104	30	+3,120
2014	+0,018	30	+0,540
2015	-0,065	30	-1,950
$\sum$:	+0,057	**90**	**+1,710**

$\Rightarrow$

$$\bar{a} = \frac{1,710}{90} = \frac{0,057}{3} = 0,019 \qquad b = 0,104 \cdot x_a^{(2013)} + 93,78 = 93,78$$

$\Rightarrow$

$$^{(F_1)}y_W = 0,019 \cdot x + 93,78$$

Da die Gewichte hier gleich sind, reicht auch ein einfaches arithmetisches Mittel aus.

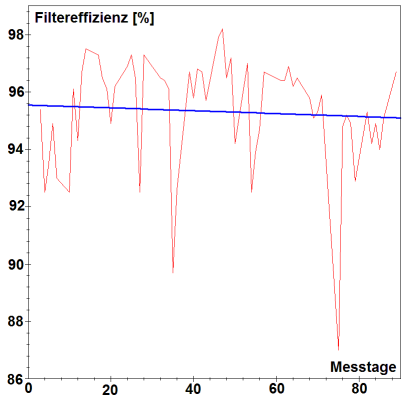
Über die Zweipunktform muss sich das gleiche Ergebnis einstellen.

$$\bar{a} = \frac{a_{2015} \cdot x_e^{(2015)} + \widetilde{b}_{2015} - \widetilde{b}_{2013}}{x_e^{(2015)}} \qquad b = \widetilde{b}_{2013}$$

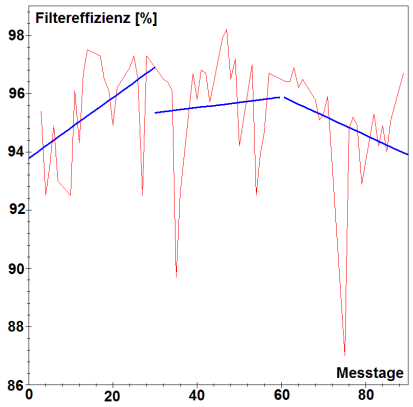
$\Rightarrow$

$$\bar{a} = \frac{-0,065 \cdot 90 + 101,34 - 93,78}{90} = 0,019 \qquad b = 93,78$$

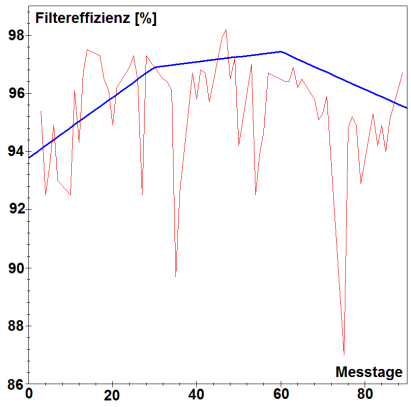
8.5 Grafische Darstellungen



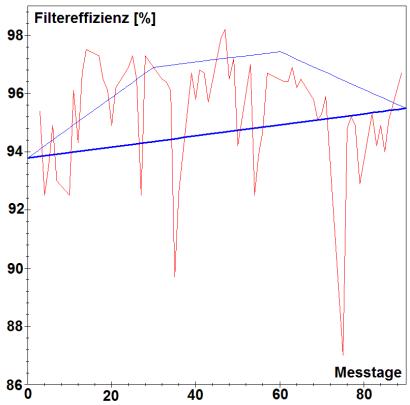
Der Abfall der Filtereffizienz pro Jahr ermittelt durch die vollständige, lineare Regression unter der Voraussetzung der gleichbleibenden Umwelt- und Betriebsparameter.



Die Durchführung der stückweisen, linearen Regression. Der Anstieg der Filtereffizienz in den ersten zwei Jahren ist auf veränderte Umweltbedingungen zurück zu führen. So war in den betreffenden Monaten November noch keine Anlage der Luftfeuchteregulierung installiert. Die Luftfeuchte hat jedoch einen sehr großen Einfluss auf die Filtereffizienz in Reinräumen.



Das Ergebnis der kontinuierlichen, stückweisen, linearen Regression grafisch dargestellt.



Zusätzlich die Wichtungsfunktion eingezeichnet. Diese zeigt einen Anstieg der Filtereffizienz im Laufe der Jahre an. Diese kann jedoch nicht unkritisch übernommen werden. Der Einfluss der Monate November 2013 und November 2014 sind zu hoch für den Einfluss des Monats November 2015.

9 Zusammenfassung

9.1 Durchführung der diskreten, stückweisen, linearen Regression

Die Durchführung der diskreten, stückweisen, linearen Regression im Intervall n folgt der allgemeinen Regressionsfunktion $y^{(n)}$.

$$y^{(n)} = a_n \cdot x^{(n)} + b_n$$

Wobei a_n den Anstieg und b_n die Inhomogenität von $y^{(n)}$ darstellt. Je nach der Anfangsbedingung bei $x_a^{(n)}$ sind zwei Fälle zu unterscheiden, um a_n und b_n berechnen zu können.

Fall 1

- Inhomogenität:

$$b_n = a_{n-1} \cdot x_e^{(n-1)} + \widetilde{b}_{n-1}$$

- Anstieg:

$$a_n = \frac{Z_n}{N_n} \cdot b_n$$

Fall 2

- Inhomogenität:

$$b_n = \frac{2 \cdot N_n}{2 \cdot N_n + Z_n} \cdot \left(a_{n-1} \cdot \left(x_e^{(n-1)} + \frac{1}{2} \right) + \widetilde{b}_{n-1} \right)$$

- Anstieg:

$$a_n = \frac{Z_n}{N_n} \cdot b_n$$

Wobei für N_n und Z_n gilt:

$$Z_n = \left\{ x^{(n)} \cdot y^{(n)} \right\} \cdot m - \left\{ x^{(n)} \right\} \cdot \left\{ y^{(n)} \right\} \qquad N_n = \left\{ {x^{(n)}}^2 \right\} \cdot \left\{ y^{(n)} \right\} - \left\{ x^{(n)} \cdot y^{(n)} \right\} \cdot \left\{ x^{(n)} \right\}$$

Dabei bedeutet $\{\bullet\}$ die Summe des betreffenden Datenteils x_i oder y_i über das gesamte Intervall n.

9.2 Durchführung der kontinuierlichen, stückweisen, linearen Regression

Die Überführung der diskreten in die kontinuierliche, stückweise, lineare Regression erfolgt durch:

$$y^{(n)} = a_n \cdot x^{(n)} + \widetilde{b}_n$$

Fall 1

- Inhomogenität:

$$\widetilde{b}_n = \frac{N_n - Z_n \cdot x_e^{(n-1)}}{N_n} \cdot b_n$$

- Anstieg:

$$a_n = \frac{Z_n}{N_n} \cdot b_n$$

Fall 2

- Inhomogenität:

$$\widetilde{b}_n = \frac{N_n - Z_n \cdot x_e^{(n-1)}}{N_n} \cdot b_n$$

- Anstieg:

$$a_n = \frac{Z_n}{N_n} \cdot b_n$$

Wobei für N_n und Z_n gilt:

$$Z_n = \left\{x^{(n)} \cdot y^{(n)}\right\} \cdot m - \left\{x^{(n)}\right\} \cdot \left\{y^{(n)}\right\} \qquad N_n = \left\{x^{(n)^2}\right\} \cdot \left\{y^{(n)}\right\} - \left\{x^{\{n\}} \cdot y^{(n)}\right\} \cdot \left\{x^{(n)}\right\}$$

Dabei bedeutet $\{\bullet\}$ die Summe des betreffenden Datenteils x_i oder y_i über das gesamte Intervall n.

9.3 Erweiterungen

- Es existieren verschiedene Zusammenhänge zwischen den Inhomogenitäten und den Anstiegen der betrachteten Fälle.

  diskrete, stückweise, lineare Regression

$$^{(F_1)}\left(\frac{b_n}{a_n} = \frac{N_n}{Z_n}\right) \qquad ^{(F_2)}\left(\frac{b_n}{a_n} = \frac{N_n}{Z_n}\right)$$

  kontinuierliche, stückweise, lineare Regression

$$^{(F_1)}\left(\frac{\widetilde{b}_n}{a_n} = \frac{N_n}{Z_n} - x_a^{(n)}\right) \qquad ^{(F_2)}\left(\frac{b_n}{a_n} = \frac{N_n}{Z_n} - x_e^{(n-1)}\right)$$

  stückweise, lineare Regression

$$^{(F_1)}\left(b_n - \widetilde{b}_n = a_n \cdot x_a^{(n)}\right) \qquad ^{(F_2)}\left(b_n - \widetilde{b}_n = a_n \cdot x_e^{(n-1)}\right)$$

- Es existiert eine Funktion y, welche die stückweise, lineare Regression wieder zusammenfasst und so eine lineare Funktion liefert, die unterschiedlichen Stichprobenumfänge berücksichtigt – die Wichtungsfunktion.

$$y_W = \overline{a}_W \cdot x + b_W$$

  diskrete, stückweise, lineare Regression

$$^{(F_1)}\overline{a}_W = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot x_e^{(i)}}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_e^{(i)}} \qquad ^{(F_2)}\overline{a}_W = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot \left(x_e^{(i)} - 1\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_e^{(i)} - 1\right)}$$

  Mit:

$$^{(F_1)}b_W = \widetilde{b}_1 \qquad ^{(F_2)}b_W = \frac{1}{2} \cdot a_1 + \widetilde{b}_1$$

  kontinuierliche, stückweise, lineare Regression

$$^{(F_1)}\bar{a}_W = \frac{a_n \cdot x_e^{(n)} + \widetilde{b}_n - \widetilde{b}_1}{x_e^{(n)}}$$

$$^{(F_1)}b_W = \widetilde{b}_1$$

  Sowie:

$$^{(F_2)}\bar{a}_W = \frac{a_n \cdot x_e^{(n)} + \widetilde{b}_n - \widetilde{b}_1 + \frac{1}{2} \cdot (a_n - a_1)}{x_e^{(n)}}$$

$$^{(F_2)}b_W = \frac{\left(2 \cdot \widetilde{b}_1 + a_1 - a_n\right) \cdot \left(x_e^{(n)} + \frac{1}{2}\right) - \widetilde{b}_n}{2 \cdot x_e^{(n)}}$$

LaTeX 2_ε

$$\oiint$$

3.3.2 (Lineare) Regression einer modifizierten Mitscherlich-Funktion

(Lineare) Regression einer modifizierten Mitscherlich- Funktion

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 9. Juli 2017 – Letzte Revision: 22. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **2**

2 Modifikation der Mitscherlich- Funktion **3**

3 Kleine Grenzwertbetrachtung **4**

4 Gesamtanzahl an Individuen **5**

5 Berechnungen am Intervall des Abstiegs **6**

6 Ermittlung der Formfaktoren **7**

7 Zusammenfassung **8**

8 Beispiele **9**

8.1 Beispiel I – Idealfall 9
8.2 Beispiel IIa – Alterstruktur USA – Frauen 13
8.3 Beispiel IIb – Altersstruktur USA – Männer 17
8.4 Beispiel IIIa – Alterstruktur Ungarn – Frauen 21
8.5 Beispiel IIIb – Altersstruktur Ungarn – Männer 25
8.6 Beispiel IVa – Alterstruktur Deutschland – Frauen 29
8.7 Beispiel IVb – Altersstruktur Deutschland – Männer 33

9 Die Bedeutung der Werte Δ_{MKQ} und Δ_{HKA} **37**

10 Vergleich der ermittelten mit gegebenen, offiziellen Werten **38**

Literatur

[Dipa] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten über die Hauptkomponentenanalyse. www.Zenithpoint.de.

[Dipb] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. (Polynom)Regression von Datenpunkten. www.Zenithpoint.de.

[Dipc] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Reduzierte Lineare Regression - Fehlen von Anstieg oder Inhomogenität, Hinzufügen eines definierten Punktes. www.Zenithpoint.de.

---

1 Einleitung

Ziel dieses Arbeitsblattes ist es zu untersuchen, ob es möglich sei die Altersstruktur einer vorhandenen Population über die Wachstumsgleichung nach Mitscherlich zu beschreiben. Sollte das der Fall sein, dann sind die Berechnungsgrundlagen interessanter mittlerer Größen der Population von Interesse.

- $\bar{x}_{MAX}$ - mittleres maximales Alter eines Individuum der Art
- $\bar{x}_{50}$ - Alter, an dem nur noch 50% der Individuen des betrachteten Jahrgangs aktiv sind
- $\bar{x}_{25}$ - mittlere Lebenserwartung

Sowie ein paar statistische Werte wie die Gesamtanzahl an Individuen und Gütegrößen der durchzuführenden Regression.

Beispiele menschlicher Altersstrukturen verdeutlichen den theoretischen Teil.

2 Modifikation der Mitscherlich- Funktion

Gegeben ist die Wachstumsgleichung nach Mitscherlich.

$$y = \frac{a \cdot b}{a + (b - a) \cdot e^{-c \cdot x}}$$

Diese soll die Altersstruktur einer Population beschreiben. Vorausgesetzt wird, dass die gewählte Struktur das Ideal der Bienenstockform besitzt. Die Koeffizienten a und b sind die „formgebenden“ Regressionskoeffizienten. Der Wert von c ist unkritisch. Er wird im Allgemeinen genutzt, um zu große oder zu kleine Urdaten zu skalieren. Es wird festgelegt und erstmals die Mitscherlich Funktion modifiziert:

$$c \leq 0$$

$\Rightarrow$

$$y^* = \frac{a \cdot b}{a + (b - a) \cdot e^{c \cdot x}}$$

3 Kleine Grenzwertbetrachtung

Ein Grenzwert von y ist aus praktischen Gründen festgelegt. So ist die Anzahl an Nachwuchs in einem betrachteten Zeitraum stets bekannt. Vor besagtem Zeitpunkt ist der Grenzwert:

$$\lim_{x \to -\infty} y^* = \lim_{x \to -\infty} \frac{a \cdot b}{a + (b - a) \cdot e^{c \cdot x}} = b$$

Der Koeffizient b repräsentiert demnach die Anzahl der neu hinzu gekommenen Individuen.

Damit dieser Wert nicht im negativ Unendlichen liegt, wird weiter modifiziert.

$$y^{**} = \frac{a \cdot (b + 1)}{a + (b + 1 - a) \cdot e^{c \cdot x}}$$

Der nächste Schritt ist zu ermitteln, welcher Wert von x für das konkrete b gilt.

$$b = \frac{a \cdot (b + 1)}{a + (b + 1 - a) \cdot e^{c \cdot x_b}}$$

$\Rightarrow$

$$x_b = \frac{1}{c} \cdot \ln \frac{a}{b \cdot (b + 1 - a)}$$

Dieser Wert wird in die weiter modifizierten Mitscherlich- Funktion eingesetzt

$$y^{***} = \frac{a \cdot (b + 1)}{a + (b + 1 - a) \cdot e^{c \cdot (x + x_b)}}$$

$\Rightarrow$

$$y^{***} = \frac{b \cdot (b + 1)}{b + e^{c \cdot x}}$$

Diese modifizierte Mitscherlich- Funktion steht nun zur Nutzung zur Verfügung, wobei jetzt die formgebenden Koeffizienten b und c sind, da a komplett heraus gefallen ist.

Der zweite Grenzwert ist nicht vollständig definiert. Evident ist, das gelten muss:

$$\lim_{x \to +\infty} y^{***} = \lim_{x \to +\infty} \frac{b \cdot (b + 1)}{b + e^{c \cdot x}} = 0$$

Besser ist die Nutzung des Behauptung, dass dann die Altersstruktur und somit die Zuständigkeit der Mitscherlich- Gleichung beendet ist, wenn gilt:

$$y^{***} = 1$$

Das ist dann der Fall, wenn das älteste Individuum seinen persönlichen Rekord aufgestellt hat und von dieser Welt geht. Da aber dieser Zeitpunkt unbekannt ist, muss man auch hier von einem Mittelwert ausgehen.

$$1 = \frac{b \cdot (b + 1)}{b + e^{c \cdot \bar{x}_{MAX}}}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{x}_{MAX} = \frac{2}{c} \cdot \ln b$$

4 Gesamtanzahl an Individuen

Mit den beiden Grenzwerten ist die Anzahl $\sum$ der lebenden Individuen ermittelbar.

$$\sum = \int_0^{\bar{x}_{MAX}} y^{***} dx = \int_0^{\frac{1}{c} \cdot \ln b} \frac{b \cdot (b+1)}{b + e^{c \cdot x}} dx$$

$\Rightarrow$

$$\sum = \frac{b+1}{c} \cdot \ln b$$

$\Rightarrow$

$$\sum = \frac{b+1}{2} \cdot \bar{x}_{MAX}$$

Was der Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten b und $\bar{x}_{MAX}$ entspricht.

5 Berechnungen am Intervall des Abstiegs

Die flächige Form des Bienenstocks besitzt auf ihrem Dach eine Wendestelle. Auch die Mitscherlich-Funktion. Der Punkt der Wendestelle $P_W\,(x_W, y_W)$ lässt errechnen und angeben mit.

$$x_W = \frac{\ln b}{c} \qquad y_W = \frac{b+1}{2}$$

Dieser Punkt repräsentiert demnach das Alter, an der noch 50% der damals Geborenen leben.

$$\bar{x}_{50} = \frac{\ln b}{c}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{x}_{50} = \frac{\bar{x}_{MAX}}{2}$$

Die mittlere Lebenserwartung einer Population liegt in etwa an der Stelle $\bar{x}_{25}$. Diese kann berechnet werden durch:

$$\frac{b}{4} = \frac{b \cdot (b+1)}{b + e^{c \cdot \bar{x}_{25}}}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{x}_{25} = \frac{1}{c} \cdot \ln\left(3 \cdot b + 4\right)$$

6 Ermittlung der Formfaktoren

Die Mitscherlich Funktion kann über eine Lineare Regression ermittelt werden. Das gilt auch nach den Modifikationen. Wobei sich der Aufwand sogar noch verringert, weil die Inhomogenität der linearen Funktion wegfällt. So gilt: [Dipb][Dipa][Dipc]

$$y^{***} = \frac{b \cdot (b+1)}{b + e^{c \cdot x}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{b \cdot (b+1)}{y^{***}} - b = e^{c \cdot x}$$

$\Rightarrow$

$$\ln\left(\frac{b}{y^{***}} \cdot (b + 1 - y^{***})\right) = c \cdot x \qquad \leftrightarrow \qquad Y = C \cdot X$$

$\Rightarrow$

$$Y = \ln\left(\frac{b}{y^{***}} \cdot (b + 1 - y^{***})\right) \qquad \leftrightarrow \qquad X = x$$

Der Formfaktor c ist demnach über eine lineare Regression ohne Inhomogenität berechenbar, z. B. über die „Methode der kleinsten Quadrate - MKQ“ oder der „Hauptkomponentenanalyse - HKA“. Für b bzw. y^{***} ergibt sich eine weitere Bedingung.

$$\frac{b}{y^{***}} \cdot (b + 1 - y^{***}) \geq 1$$

$\Rightarrow$

$$y^{***} \leq b$$

Damit wird folgend nicht die aktuelle Geburtenanzahl für b genutzt, sondern die höchste Jahrgangsanzahl an Individuen.

7 Zusammenfassung

Mit der Hilfe der Wachstumsgleichung nach Mitscherlich lassen sich Altersstrukturen von Populationen beschreiben. Mittels Modifikationen lässt sich Mitscherlich an das Ideal einer Altersstruktur anpassen.

$$y^{***} = \frac{b \cdot (b+1)}{b + e^{c \cdot x}}$$

Dabei ist b die höchste Anzahl der Individuen für einen Jahrgang.

Das mittlere maximal erreichbare Lebensalter (nicht die mittlere Lebenserwartung) lässt sich so berechnen über:

$$\bar{x}_{MAX} = \frac{2}{c} \cdot \ln b$$

Das Alter, an der die mittlere Anzahl der Individuen auf die Hälfte gesunken ist, lässt sich beschreiben mit:

$$\bar{x}_{50} = \frac{\ln b}{c}$$

Die Lebenserwartung lässt sich berechnen. Sie ist um den Punkt angesiedelt, wo nur noch 25% der Population aktiv ist.

$$\bar{x}_{25} = \frac{1}{c} \cdot \ln (3 \cdot b + 4)$$

Da b im Allgemeinen einen hohen Wert besitzt, kann vereinfacht werden.

$$\bar{x}_{25} \approx \frac{\ln (3 \cdot b)}{c}$$

Die Gesamtanzahl $\sum$ der Individuen einer Population ist ermittelbar.

$$\sum = \frac{b+1}{c} \cdot \ln b$$

Der Formfaktor c lässt sich über eine Lineare Regression ohne Inhomogenität berechnen.

$$Y = \ln \left(\frac{b}{y^{***}} \cdot (b + 1 - y^{***}) \right) \qquad \leftrightarrow \qquad X = x$$

Wobei b aus der Alterstruktur abzulesen ist.

$$b = \text{MAX}\,(\text{Pix})$$

Alle speziellen berechenbare Werte lassen sich auf $\bar{x}_{MAX}$ reduzieren.

$$\frac{\bar{x}_{MAX}}{2} = \frac{\ln b}{c}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{x}_{50} = \frac{\bar{x}_{MAX}}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{x}_{25} \approx \frac{\ln 3}{c} + \frac{\bar{x}_{MAX}}{2} = \frac{\ln 3}{c} + \bar{x}_{50}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\ln 3}{c} \approx \bar{x}_{25} - \bar{x}_{50}$$

Auch von Interesse, die folgenden Verhältnisse:

$$\frac{\bar{x}_{MAX}}{\bar{x}_{MAX}} : \frac{\bar{x}_{50}}{\bar{x}_{MAX}} : \frac{\bar{x}_{25}}{\bar{x}_{MAX}}$$

$\Rightarrow$

$$1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln (3 \cdot b + 4)}{\ln b}$$

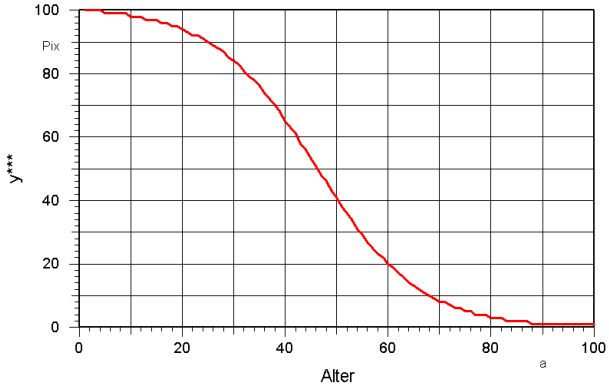
Für ein $b \to \infty$ ergibt sich dann:

$$1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{2}$$

8 Beispiele

8.1 Beispiel I – Idealfall

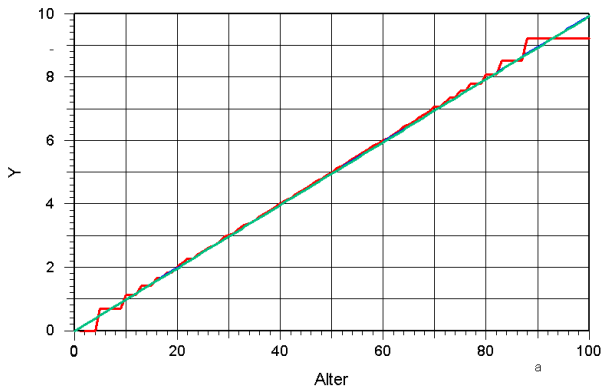
Idealbeispiel angepasst an die modifizierte Mitscherlich- Funktion sei eine Population mit $b = 100$ und $c = 0,1$. Aus dem Diagramm werden die Pixelwerte Pix ausgelesen und die relevanten Werte hergeleitet.



X Alter in a	y^{***} Pix-Wert	Y	$X \cdot X$	$X \cdot Y$	Δ_{MKQ}	Δ_{HKA}
001	100	0,000000000	00001	000,000000000	-0,099280000	-0,099380000
002	100	0,000000000	00004	000,000000000	-0,198560000	-0,198760000
003	100	0,000000000	00009	000,000000000	-0,297840000	-0,298140000
004	100	0,000000000	00016	000,000000000	-0,397120000	-0,397520000
005	099	0,703197516	00025	003,515987582	+0,206797516	+0,206297516
006	099	0,703197516	00036	004,219185098	+0,107517516	+0,106917516
007	099	0,703197516	00049	004,922382615	+0,008237516	+0,007537516
008	099	0,703197516	00064	005,625580131	-0,091042484	-0,091842484
009	099	0,703197516	00081	006,328777648	-0,190322484	-0,191222484
010	098	1,118814996	00100	011,188149960	+0,126014996	+0,125014996
011	098	1,118814996	00121	012,306964960	+0,026734996	+0,025634996
012	098	1,118814996	00144	013,425779950	-0,072545004	-0,073745004
013	097	1,416753569	00169	018,417796390	+0,126113569	+0,124813569
014	097	1,416753569	00196	019,834549960	+0,026833569	+0,025433569
015	097	1,416753569	00225	021,251303530	-0,072446431	-0,073946431
016	096	1,650259907	00256	026,404158510	+0,061779907	+0,060179907
017	096	1,650259907	00289	028,054418420	-0,037500093	-0,039200093
018	095	1,843052764	00324	033,174949750	+0,056012764	+0,054212764
019	095	1,843052764	00361	035,018002510	-0,043267236	-0,045167236
020	094	2,007785553	00400	040,155711060	+0,022185553	+0,020185553
021	093	2,152012235	00441	045,192256920	+0,067132235	+0,065032235
022	092	2,280606186	00484	050,173336100	+0,096446186	+0,094246186
023	092	2,280606186	00529	052,453942280	-0,002833814	-0,005133814
024	091	2,396895772	00576	057,525498540	+0,014175772	+0,011775772

025	090	2,503255788	00625	062,581394710	+0,021255788	+0,018755788
026	089	2,601440466	00676	067,637452120	+0,020160466	+0,017560466
027	088	2,692782729	00729	072,705133680	+0,012222729	+0,009522729
028	087	2,778319397	00784	077,792943110	-0,001520603	-0,004320603
029	085	2,935107652	00841	085,118121900	+0,055987652	+0,053087652
030	084	3,007566731	00900	090,227001940	+0,029166731	+0,026166731
031	083	3,076701336	00961	095,377741420	-0,000978664	-0,004078664
032	081	3,206453305	01024	102,606505800	+0,029493305	+0,026293305
033	079	3,326764787	01089	109,783238000	+0,050524787	+0,047224787
034	078	3,383955575	01156	115,054489600	+0,008435575	+0,005035575
035	076	3,493312671	01225	122,265943500	+0,018512671	+0,015012671
036	074	3,596941959	01296	129,489910500	+0,022861959	+0,019261959
037	072	3,695799897	01369	136,744596200	+0,022439897	+0,018739897
038	070	3,790662148	01444	144,045161600	+0,018022148	+0,014222148
039	068	3,882170042	01521	151,404631600	+0,010250042	+0,006350042
040	065	4,014301855	01600	160,572074200	+0,043101855	+0,039101855
041	063	4,099621619	01681	168,084486400	+0,029141619	+0,025041619
042	061	4,183175776	01764	175,693382600	+0,013415776	+0,009215776
043	058	4,305927291	01849	185,154873500	+0,036887291	+0,032587291
044	056	4,386480985	01936	193,005163300	+0,018160985	+0,013760985
045	053	4,506079283	02025	202,773567800	+0,038479283	+0,033979283
046	051	4,585367559	02116	210,926907700	+0,018487559	+0,013887559
047	048	4,704261089	02209	221,100271200	+0,038101089	+0,033401089
048	046	4,783861975	02304	229,625374800	+0,018421975	+0,013621975
049	043	4,904413081	02401	240,316241000	+0,039693081	+0,034793081
050	041	4,985942682	02500	249,297134100	+0,021942682	+0,016942682
051	038	5,110718753	02601	260,646656400	+0,047438753	+0,042338753
052	036	5,196038517	02704	270,194002900	+0,033478517	+0,028278517
053	034	5,283502281	02809	280,025620900	+0,021662281	+0,016362281
054	031	5,419678224	02916	292,662624100	+0,058558224	+0,053158224
055	029	5,514540475	03025	303,299726100	+0,054140475	+0,048640475
056	027	5,613398413	03136	314,350311100	+0,053718413	+0,048118413
057	025	5,717027701	03249	325,870579000	+0,058067701	+0,052367701
058	023	5,826384797	03364	337,930318200	+0,068144797	+0,062344797
059	022	5,883575585	03481	347,130959500	+0,026055585	+0,020155585
060	020	6,003887067	03600	360,233224000	+0,047087067	+0,041087067
061	019	6,067450454	03721	370,114477700	+0,011370454	+0,005270454
062	017	6,202773641	03844	384,571965700	+0,047413641	+0,041213641
063	016	6,275232720	03969	395,339661400	+0,020592720	+0,014292720
064	014	6,432020975	04096	411,649342400	+0,078100975	+0,071700975
065	013	6,517557643	04225	423,641246800	+0,064357643	+0,057857643
066	012	6,608899906	04356	436,187393800	+0,056419906	+0,049819906
067	011	6,707084584	04489	449,374667100	+0,055324584	+0,048624584
068	010	6,813444600	04624	463,314232800	+0,062404600	+0,055604600

069	009	6,929734186	04761	478,151658800	+0,079414186	+0,072514186
070	008	7,058328137	04900	494,082969600	+0,108728137	+0,101728137
071	008	7,058328137	05041	501,141297800	+0,009448137	+0,002348137
072	007	7,202554819	05184	518,583947000	+0,054394819	+0,047194819
073	006	7,367287608	05329	537,811995400	+0,119847608	+0,112547608
074	006	7,367287608	05476	545,179283000	+0,020567608	+0,013167608
075	005	7,560080465	05625	567,006034900	+0,114080465	+0,106580465
076	005	7,560080465	05776	574,566115300	+0,014800465	+0,007200465
077	004	7,793586803	05929	600,106183900	+0,149026803	+0,141326803
078	004	7,793586803	06084	607,899770700	+0,049746803	+0,041946803
079	004	7,793586803	06241	615,693357500	-0,049533197	-0,057433197
080	003	8,091525376	06400	647,322030100	+0,149125376	+0,141125376
081	003	8,091525376	06561	655,413555500	+0,049845376	+0,041745376
082	003	8,091525376	06724	663,505080800	-0,049434624	-0,057634624
083	002	8,507142856	06889	706,092857000	+0,266902856	+0,258602856
084	002	8,507142856	07056	714,599999900	+0,167622856	+0,159222856
085	002	8,507142856	07225	723,107142700	+0,068342856	+0,059842856
086	002	8,507142856	07396	731,614285600	-0,030937144	-0,039537144
087	002	8,507142856	07569	740,121428400	-0,130217144	-0,138917144
088	001	9,210340372	07744	810,509952700	+0,473700372	+0,464900372
089	001	9,210340372	07921	819,720293100	+0,374420372	+0,365520372
090	001	9,210340372	08100	828,930633500	+0,275140372	+0,266140372
091	001	9,210340372	08281	838,140973800	+0,175860372	+0,166760372
092	001	9,210340372	08464	847,351314200	+0,076580372	+0,067380372
093	001	9,210340372	08649	856,561654600	-0,022699628	-0,031999628
094	001	9,210340372	08836	865,771995000	-0,121979628	-0,131379628
095	001	9,210340372	09025	874,982335300	-0,221259628	-0,230759628
096	001	9,210340372	09216	884,192675700	-0,320539628	-0,330139628
097	001	9,210340372	09409	893,403016100	-0,419819628	-0,429519628
098	001	9,210340372	09604	902,613356500	-0,519099628	-0,528899628
099	001	9,210340372	09801	911,823696800	-0,618379628	-0,628279628
100	001	9,210340372	10000	921,034037200	-0,717659628	-0,727659628
5.050	4.608	501,88	338.350	33.592,144	0,5163	0,0113



Die Transformation der y^{***}- in die Y- Werte grafisch dargestellt mit den linearen Regressionsgeraden.

$$c_{MKQ} = \frac{33592,144}{338350} = 0,0993 \qquad c_{HKA} = \frac{501,88}{5050} = 0,0994$$

Die berechenbaren x- Werte.

$$\bar{x}_{MAX} = \frac{2}{0,1} \cdot \ln 100 = 92,1a$$

Und:

$$\bar{x}_{50} = \frac{\ln 100}{0,1} = 46,1a$$

Sowie:

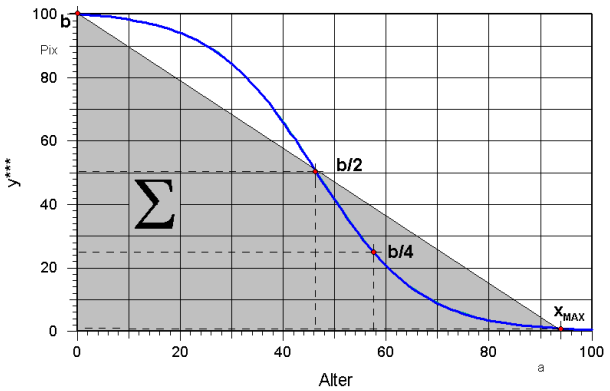
$$\bar{x}_{25} = \frac{1}{0,1} \cdot \ln 304 = 57,2a$$

Die Anzahl der Individuen der Population:

$$\sum = \frac{101}{0,1} \cdot \ln 100 = 4651$$

Was eine gute Näherung zum ausgelesenen Wert von 4608 darstellt.

Das alles wieder grafisch dargestellt.



Die Werte Δ_{MKQ} und Δ_{HKA} sind informativer Natur. Sie werden berechnet aus:

$$\Delta = \{Y - c \cdot x\}$$

8.2 Beispiel IIa – Alterstruktur USA – Frauen

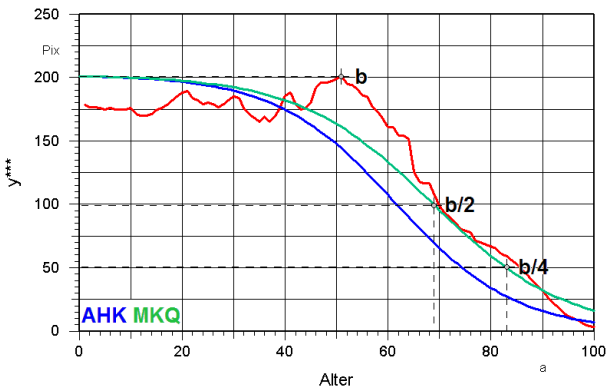
Stammdaten:
12.096,2 Pix – männlich
12.417,6 Pix – weiblich
24.513,8 Pix – Gesamt
Einwohner (EW): 322.755.353
13166,3 EW/Pix
b = 201

X Alter in a	y^{***} Pix-Wert	Y	$X \cdot X$	$X \cdot Y$	Δ_{MKQ}	Δ_{HKA}
001	178	3,299575188	00001	003,299575188	+3,222225188	+3,213305188
002	177	3,346030001	00004	006,692062001	+3,191331000	+3,173491000
003	177	3,346031000	00009	010,038093000	+3,113981000	+3,087221000
004	176	3,390917451	00016	013,563669800	+3,081517451	+3,045837451
005	175	3,434355800	00025	017,171779000	+3,047605800	+3,003005800
006	176	3,390917451	00036	020,345504710	+2,926817451	+2,873297451
007	175	3,434355800	00049	024,040490600	+2,892905800	+2,830465800
008	175	3,434355800	00064	027,474846400	+2,815555800	+2,744195800
009	175	3,434355800	00081	030,909202200	+2,738205800	+2,657925800
010	176	3,390917451	00100	033,909174510	+2,617417451	+2,528217451
011	171	3,595628556	00121	039,551914120	+2,744778556	+2,646658556
012	170	3,633242374	00144	043,598908490	+2,705042374	+2,598002374
013	170	3,633242374	00169	047,232150860	+2,627692374	+2,511732374
014	171	3,595628556	00196	050,338799780	+2,512728556	+2,387848556
015	174	3,476454119	00225	052,146811790	+2,316204119	+2,182404119
016	176	3,390917451	00256	054,254679220	+2,153317451	+2,010597451
017	178	3,299575188	00289	056,092778200	+1,984625188	+1,832985188
018	182	3,095030495	00324	055,710548900	+1,702730495	+1,542170495
019	185	2,916162427	00361	055,407086110	+1,446512427	+1,277032427
020	188	2,705920275	00400	054,118405500	+1,158920275	+0,980520275
021	189	2,626507250	00441	055,156652260	+1,002157250	+0,814837250
022	184	2,978740908	00484	065,532299980	+1,277040908	+1,080800908
023	182	3,095030495	00529	071,185701370	+1,315980495	+1,110820495
024	179	3,251413318	00576	078,033919640	+1,395013318	+1,180933318
025	180	3,201390511	00625	080,034762760	+1,267640511	+1,044640511
026	179	3,251413318	00676	084,536746270	+1,240313318	+1,008393318
027	177	3,346031000	00729	090,342837010	+1,257581000	+1,016741000
028	179	3,251413318	00784	091,039572910	+1,085613318	+0,835853318
029	182	3,095030495	00841	089,755884340	+0,851880495	+0,593200495
030	185	2,916162427	00900	087,484872810	+0,595662427	+0,328062427
031	184	2,978740908	00961	092,340968160	+0,580890908	+0,304370908

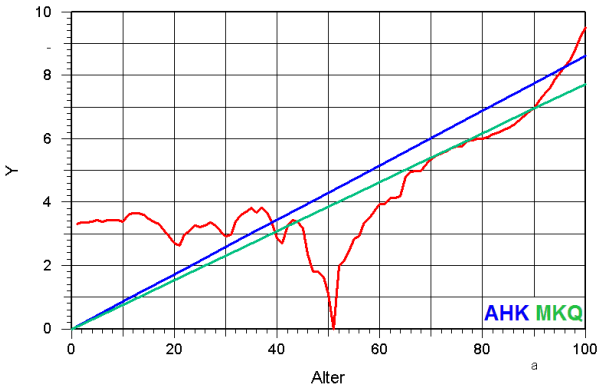
032	176	3,390917451	01024	108,509358400	+0,915717451	+0,630277451
033	171	3,595628556	01089	118,655742300	+1,043078556	+0,748718556
034	168	3,705701453	01156	125,993849400	+1,075801453	+0,772521453
035	165	3,808277347	01225	133,289707100	+1,101027347	+0,788827347
036	169	3,669913755	01296	132,116895200	+0,885313755	+0,564193755
037	165	3,808277347	01369	140,906261800	+0,946327347	+0,616287347
038	169	3,669913755	01444	139,456722700	+0,730613755	+0,391653755
039	176	3,390917451	01521	132,245780600	+0,374267451	+0,026387451
040	186	2,850146957	01600	114,005878300	-0,243853043	-0,600653043
041	188	2,705920275	01681	110,942731300	-0,465429725	-0,831149725
042	179	3,251413318	01764	136,559359400	+0,002713318	-0,371926682
043	175	3,434355800	01849	147,677299400	+0,108305800	-0,275254200
044	176	3,390917451	01936	149,200367800	-0,012482549	-0,404962549
045	181	3,149330315	02025	141,719864200	-0,331419685	-0,732819685
046	192	2,348394629	02116	108,026152900	-1,209705371	-1,620025371
047	196	1,816949718	02209	085,396636750	-1,818500282	-2,237740282
048	196	1,816949718	02304	087,213586470	-1,895850282	-2,324010282
049	197	1,629539092	02401	079,847415500	-2,160610908	-2,597690908
050	199	1,108612372	02500	055,430618600	-2,758887628	-3,204887628
051	201	0,000000000	02601	000,000000000	-3,944850000	-4,399770000
052	195	1,976215499	02704	102,763205900	-2,045984501	-2,509824501
053	194	2,114888291	02809	112,089079400	-1,984661709	-2,457421709
054	191	2,448926753	02916	132,242044700	-1,727973247	-2,209653247
055	186	2,850146957	03025	156,758082600	-1,404103043	-1,894703043
056	185	2,916162427	03136	163,305095900	-1,415437573	-1,914957573
057	177	3,346031000	03249	190,723767000	-1,062919000	-1,571359000
058	173	3,517309144	03364	204,003930300	-0,968990856	-1,486350856
059	167	3,740659157	03481	220,698890300	-0,822990843	-1,349270843
060	161	3,935472610	03600	236,128356600	-0,705527390	-1,240727390
061	161	3,935472610	03721	240,063829200	-0,782877390	-1,326997390
062	154	4,137553317	03844	256,528305600	-0,658146683	-1,211186683
063	154	4,137553317	03969	260,665858900	-0,735496683	-1,297456683
064	152	4,191447393	04096	268,252633100	-0,758952607	-1,329832607
065	126	4,797756341	04225	311,854162200	-0,229993659	-0,809793659
066	118	4,963437082	04356	327,586847400	-0,141662918	-0,730382918
067	117	4,983782230	04489	333,913409400	-0,198667770	-0,796307770
068	117	4,983782230	04624	338,897191600	-0,276017770	-0,882577770
069	107	5,184352965	04761	357,720354600	-0,152797035	-0,768277035
070	099	5,342914046	04900	374,003983200	-0,071585954	-0,695985954
071	093	5,462053297	05041	387,805784100	-0,029796703	-0,663116703
072	090	5,521994109	05184	397,583575800	-0,047205891	-0,689445891
073	086	5,602547803	05329	408,985989600	-0,044002197	-0,695162197
074	081	5,704646299	05476	422,143826100	-0,019253701	-0,679333701
075	079	5,746041411	05625	430,953105800	-0,055208589	-0,724208589

076	078	5,766877647	05776	438,282701200	-0,111722353	-0,789642353
077	071	5,915822354	05929	455,518321300	-0,040127646	-0,726967646
078	070	5,937611589	06084	463,133703900	-0,095688411	-0,791448411
079	068	5,981637003	06241	472,549323200	-0,129012997	-0,833692997
080	067	6,003887067	06400	480,310965400	-0,184112933	-0,897712933
081	065	6,048898564	06561	489,960783700	-0,216451436	-0,938971436
082	061	6,141190934	06724	503,577656600	-0,201509066	-0,932949066
083	059	6,188612094	06889	513,654803800	-0,231437906	-0,971797906
084	056	6,261559839	07056	525,971026500	-0,235840161	-0,985120161
085	053	6,336959300	07225	538,641540500	-0,237790700	-0,995990700
086	049	6,441922531	07396	554,005337700	-0,210177469	-0,977297469
087	045	6,552888224	07569	570,101275500	-0,176561776	-0,952601776
088	040	6,702021789	07744	589,777917400	-0,104778211	-0,889738211
089	036	6,831773758	07921	608,027864500	-0,052376242	-0,846256242
090	032	6,973367442	08100	627,603069800	+0,011867442	-0,790932558
091	027	7,172254016	08281	652,675115500	+0,133404016	-0,678315984
092	022	7,405219306	08464	681,280176100	+0,289019306	-0,531620694
093	019	7,568352082	08649	703,856743600	+0,374802082	-0,454757918
094	015	7,826363324	08836	735,678152400	+0,555463324	-0,283016676
095	012	8,065422330	09025	766,215121400	+0,717172330	-0,130227670
096	010	8,258215187	09216	792,788658000	+0,832615187	-0,023704813
097	008	8,491721525	09409	823,696988000	+0,988771525	+0,123531525
098	006	8,789660098	09604	861,386689600	+1,209360098	+0,335200098
099	004	9,205277578	09801	911,322480200	+1,547627578	+0,664547578
100	003	9,497997444	10000	949,799744400	+1,762997444	+0,870997444
5.050	13.489	435,684	338.350	26.174,0224	45,0677	0,0207

MKQ	**MKQ**	**HKA**	**HKA**
b	201	b	201
c	0,07735	c	0,08627
$\bar{x}_{MAX}$	137 a	$\bar{x}_{MAX}$	**123 a**
$\bar{x}_{50}$	68,6 a	$\bar{x}_{50}$	61,5 a
$\bar{x}_{25}$	**82,8a**	$\bar{x}_{25}$	74,3 a
$\sum$	13.849,6 Pix	$\sum$	**12.417,6 Pix**
$\sum$	-	$\sum$	**163.493.496 EW**



$$c_{MKQ} = \frac{26174,0224}{338350} \qquad c_{HKA} = \frac{435,684}{5050}$$



8.3 Beispiel IIb – Altersstruktur USA – Männer

Stammdaten:
12.096,2 Pix – männlich
12.417,6 Pix – weiblich
24.513,8 Pix – Gesamt
Einwohner (EW): 322.755.353
13166,3 EW/Pix
b = 198

X Alter in a	y^{***} Pix-Wert	Y	$X \cdot X$	$X \cdot Y$	Δ_{MKQ}	Δ_{HKA}
001	186	2,627469714	00001	0002,627469714	+2,544369714	+2,540469714
002	184	2,781381474	00004	0005,562762948	+2,615181474	+2,607381474
003	184	2,781381474	00009	0008,344144423	+2,532081474	+2,520381474
004	182	2,917473688	00016	0011,669894750	+2,585073688	+2,569473688
005	183	2,851369600	00025	0014,256848000	+2,435869600	+2,416369600
006	183	2,851369600	00036	0017,108217600	+2,352769600	+2,329369600
007	182	2,917473688	00049	0020,422315810	+2,335773688	+2,308473688
008	181	2,980141757	00064	0023,841134060	+2,315341757	+2,284141757
009	181	2,980141757	00081	0026,821275820	+2,232241757	+2,197141757
010	182	2,917473688	00100	0029,174736880	+2,086473688	+2,047473688
011	177	3,203159751	00121	0035,234757270	+2,289059751	+2,246159751
012	177	3,203159751	00144	0038,437917020	+2,205959751	+2,159159751
013	176	3,253277252	00169	0042,292604270	+2,172977252	+2,122277252
014	178	3,151005918	00196	0044,114082850	+1,987605918	+1,933005918
015	182	2,917473688	00225	0043,762105320	+1,670973688	+1,612473688
016	185	2,706968535	00256	0043,311496560	+1,377368535	+1,314968535
017	187	2,542065064	00289	0043,215106080	+1,129365064	+1,063065064
018	191	2,115435144	00324	0038,077832600	+0,619635144	+0,549435144
019	194	1,629846784	00361	0030,967088900	+0,050946784	-0,023153216
020	197	0,698210483	00400	0013,964209650	-0,963789517	-1,041789517
021	198	0,000000000	00441	0000,000000000	-1,745100000	-1,827000000
022	191	2,115435144	00484	0046,539573180	+0,287235144	+0,201435144
023	198	0,000000000	00529	0000,000000000	-1,911300000	-2,001000000
024	185	2,706968535	00576	0064,967244850	+0,712568535	+0,618968535
025	186	2,627469714	00625	0065,686742860	+0,549969714	+0,452469714
026	185	2,706968535	00676	0070,381181920	+0,546368535	+0,444968535
027	183	2,851369600	00729	0076,986979200	+0,607669600	+0,502369600
028	186	2,627469714	00784	0073,569152000	+0,300669714	+0,191469714
029	186	2,627469714	00841	0076,196621720	+0,217569714	+0,104469714
030	188	2,449720341	00900	0073,491610220	-0,043279659	-0,160279659
031	187	2,542065064	00961	0078,804016970	-0,034034936	-0,154934936
032	179	3,096613498	01024	0099,091631950	+0,437413498	+0,312613498

033	174	3,348087556	01089	0110,486889400	+0,605787556	+0,477087556
034	171	3,478807984	01156	0118,279471500	+0,653407984	+0,520807984
035	168	3,598290256	01225	0125,940159000	+0,689790256	+0,553290256
036	171	3,478807984	01296	0125,237087400	+0,487207984	+0,346807984
037	167	3,636009121	01369	0134,532337500	+0,561309121	+0,417009121
038	170	3,519764424	01444	0133,751048100	+0,361964424	+0,213764424
039	176	3,253277252	01521	0126,877812800	+0,012377252	-0,139722748
040	186	2,627469714	01600	0105,098788600	-0,696530286	-0,852530286
041	190	2,238467536	01681	0091,777168970	-1,168632464	-1,328532464
042	180	3,039749159	01764	0127,669464700	-0,450450841	-0,614250841
043	175	3,301534887	01849	0141,966000100	-0,271765113	-0,439465113
044	174	3,348087556	01936	0147,315852500	-0,308312444	-0,479912444
045	178	3,151005918	02025	0141,795266300	-0,588494082	-0,763994082
046	190	2,238467536	02116	0102,969506700	-1,584132464	-1,763532464
047	191	2,115435144	02209	0099,425451780	-1,790264856	-1,973564856
048	190	2,238467536	02304	0107,446441700	-1,750332464	-1,937532464
049	191	2,115435144	02401	0103,656322100	-1,956464856	-2,147564856
050	191	2,115435144	02500	0105,771757200	-2,039564856	-2,234564856
051	195	1,401561833	02601	0071,479653500	-2,836538167	-3,035438167
052	187	2,542065064	02704	0132,187383300	-1,779134936	-1,981934936
053	185	2,706968535	02809	0143,469332400	-1,697331465	-1,904031465
054	191	2,115435144	02916	0114,233497800	-2,371964856	-2,582564856
055	175	3,301534887	03025	0181,584418800	-1,268965113	-1,483465113
056	175	3,301534887	03136	0184,885953700	-1,352065113	-1,570465113
057	166	3,672786804	03249	0209,348847800	-1,063913196	-1,286213196
058	161	3,844448825	03364	0222,978031900	-0,975351175	-1,201551175
059	155	4,029031548	03481	0237,712861300	-0,873868452	-1,103968452
060	148	4,222880390	03600	0253,372823400	-0,763119610	-0,997119610
061	148	4,222880390	03721	0257,595703800	-0,846219610	-1,084119610
062	142	4,375491241	03844	0271,280456900	-0,776708759	-1,018508759
063	142	4,375491241	03969	0275,655948200	-0,859808759	-1,105508759
064	139	4,448137660	04096	0284,680810200	-0,870262340	-1,119862340
065	114	4,994719839	04225	0324,656789500	-0,406780161	-0,660280161
066	106	5,157427430	04356	0340,390210400	-0,327172570	-0,584572570
067	104	5,197753023	04489	0348,249452600	-0,369946977	-0,631246977
068	103	5,217886234	04624	0354,816263900	-0,432913766	-0,698113766
069	093	5,419106632	04761	0373,918357600	-0,314793368	-0,583893368
070	084	5,602382360	04900	0392,166765200	-0,214617640	-0,487617640
071	080	5,685363889	05041	0403,660836100	-0,214736111	-0,491636111
072	075	5,791060483	05184	0416,956354800	-0,192139517	-0,472939517
073	071	5,877617418	05329	0429,066071500	-0,188682582	-0,473382582
074	066	5,988961417	05476	0443,183144800	-0,160438583	-0,449038583
075	063	6,057787190	05625	0454,334039300	-0,174712810	-0,467212810
076	061	6,104646852	05776	0463,953160700	-0,210953148	-0,507353148

077	055	6,250747145	05929	0481,307530200	-0,147952855	-0,448252855
078	053	6,301581739	06084	0491,523375600	-0,180218261	-0,484418261
079	050	6,380190331	06241	0504,035036200	-0,184709669	-0,492809669
080	049	6,407082027	06400	0512,566562100	-0,240917973	-0,552917973
081	046	6,490063556	06561	0525,695148000	-0,241036444	-0,556936444
082	042	6,606843218	06724	0541,761143900	-0,207356782	-0,527156782
083	039	6,699879200	06889	0556,089973600	-0,197420800	-0,521120800
084	035	6,832785397	07056	0573,953973400	-0,147614603	-0,475214603
085	031	6,978243806	07225	0593,150723500	-0,085256194	-0,416756194
086	029	7,056769638	07396	0606,882188800	-0,089830362	-0,425230362
087	025	7,228446505	07569	0628,874845900	-0,001253495	-0,340553495
088	021	7,425528143	07744	0653,446476600	+0,112728143	-0,230471857
089	018	7,596392304	07921	0676,078915100	+0,200492304	-0,146607696
090	015	7,795152587	08100	0701,563732800	+0,316152587	-0,034847413
091	012	8,034468998	08281	0731,136678800	+0,472368998	+0,117468998
092	009	8,338066526	08464	0767,102120300	+0,692866526	+0,334066526
093	007	8,599852254	08649	0799,786259600	+0,871552254	+0,508852254
094	005	8,946687277	08836	0840,988604100	+1,135287277	+0,768687277
095	004	9,174972228	09025	0871,622361700	+1,280472228	+0,909972228
096	002	9,878323579	09216	0948,319063600	+1,900723579	+1,526323579
097	002	9,878323579	09409	0958,197387200	+1,817623579	+1,439323579
098	001	10,57653406	09604	1036,500338000	+2,432734061	+2,050534061
099	001	10,57653406	09801	1047,076872000	+2,349634061	+1,963534061
100	001	10,57653406	10000	1057,653406000	+2,266534061	+1,876534061
5.050	13.038	439,5054	338.350	28.100	19,8504	0,1554

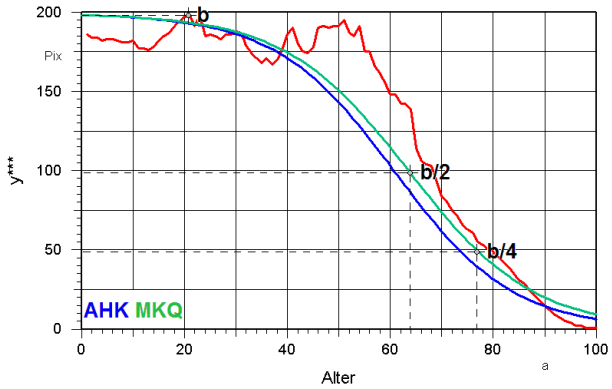
MKQ	**MKQ**	**HKA**	**HKA**
b	198	b	198
c	0,0831	c	0,087
$\bar{x}_{MAX}$	127 a	$\bar{x}_{MAX}$	**122 a**
$\bar{x}_{50}$	63,7 a	$\bar{x}_{50}$	60,8 a
$\bar{x}_{25}$	**76,9 a**	$\bar{x}_{25}$	73,5 a
$\sum$	12.663,8 Pix	$\sum$	**12.096,2 Pix**
$\sum$	-	$\sum$	**159.261.857 EW**

Frauen leben demnach in den USA $82,8 - 76,9 = 5,9$ Jahre länger als ihre Männer.

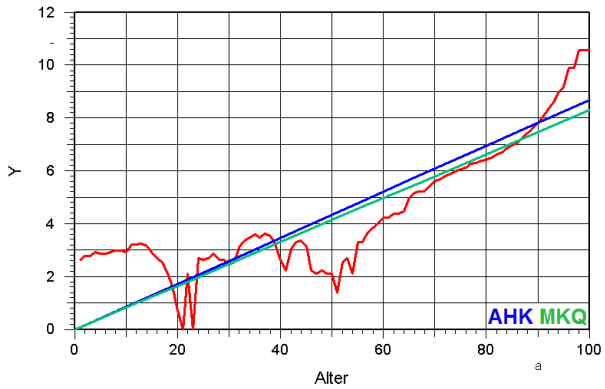
Der Männermangel beträgt demnach:

$$163.493.496 : 159.261.857 = 1000 : 974$$

Die dazugehörigen Grafiken.



$$c_{MKQ} = \frac{28100}{338350} \qquad c_{HKA} = \frac{439,5054}{5050}$$



8.4 Beispiel IIIa – Alterstruktur Ungarn – Frauen

Stammdaten:
27.512,0 Pix – männlich
28.525,9 Pix – weiblich
56 041,9 Pix – Gesamt
Einwohner (EW): 9.845.000
175,7 EW/Pix
b = 545

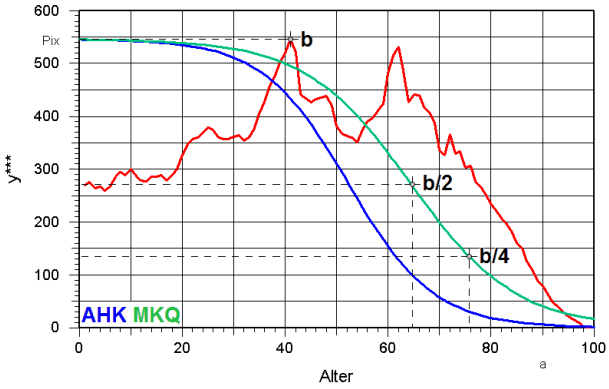
X Alter in a	y^{***} Pix-Wert	Y	$X \cdot X$	$X \cdot Y$	Δ_{MKQ}	Δ_{HKA}
001	270	6,322764701	00001	0006,322764701	+6,224864701	+6,202164701
002	275	6,286133518	00004	0012,572267040	+6,090333518	+6,044933518
003	264	6,366743762	00009	0019,100231290	+6,073043762	+6,004943762
004	266	6,352079089	00016	0025,408316360	+5,960479089	+5,869679089
005	260	6,396095974	00025	0031,980479870	+5,906595974	+5,793095974
006	267	6,344748918	00036	0038,068493510	+5,757348918	+5,621148918
007	286	6,205475615	00049	0043,438329300	+5,520175615	+5,361275615
008	295	6,139263377	00064	0049,114107020	+5,356063377	+5,174463377
009	289	6,183435191	00081	0055,650916720	+5,302335191	+5,098035191
010	300	6,102334856	00100	0061,023348560	+5,123334856	+4,896334856
011	287	6,198131641	00121	0068,179448050	+5,121231641	+4,871531641
012	278	6,264151661	00144	0075,169819940	+5,089351661	+4,816951661
013	277	6,271479668	00169	0081,529235690	+4,998779668	+4,703679668
014	285	6,212817022	00196	0086,979438300	+4,842217022	+4,524417022
015	285	6,212817022	00225	0093,192255330	+4,744317022	+4,403817022
016	288	6,190784899	00256	0099,052558390	+4,624384899	+4,261184899
017	279	6,256822671	00289	0106,365985400	+4,592522671	+4,206622671
018	289	6,183435191	00324	0111,301833400	+4,421235191	+4,012635191
019	300	6,102334856	00361	0115,944362300	+4,242234856	+3,810934856
020	327	5,899897354	00400	0117,997947100	+3,941897354	+3,487897354
021	347	5,744765839	00441	0120,640082600	+3,688865839	+3,212165839
022	357	5,664797028	00484	0124,625534600	+3,510997028	+3,011597028
023	359	5,648572023	00529	0129,917156500	+3,396872023	+2,874772023
024	368	5,574486407	00576	0133,787673800	+3,224886407	+2,680086407
025	379	5,481243402	00625	0137,031085000	+3,033743402	+2,466243402
026	374	5,524024474	00676	0143,624636300	+2,978624474	+2,388424474
027	360	5,640428437	00729	0152,291567800	+2,997128437	+2,384228437
028	357	5,664797028	00784	0158,614316800	+2,923597028	+2,287997028
029	356	5,672879136	00841	0164,513494900	+2,833779136	+2,175479136
030	361	5,632263661	00900	0168,967909800	+2,695263661	+2,014263661
031	364	5,607638614	00961	0173,836797000	+2,572738614	+1,869038614

032	354	5,688984254	01024	0182,047496100	+2,556184254	+1,829784254
033	359	5,648572023	01089	0186,402876800	+2,417872023	+1,668772023
034	378	5,489855578	01156	0186,655089700	+2,161255578	+1,389455578
035	407	5,226446542	01225	0182,925629000	+1,799946542	+1,005446542
036	427	5,023125275	01296	0180,832509900	+1,498725275	+0,681525275
037	457	4,664738774	01369	0172,595334600	+1,042438774	+0,202538774
038	477	4,367375808	01444	0165,960280700	+0,647175808	-0,215424190
039	500	3,914819093	01521	0152,677944600	+0,096719093	-0,788580900
040	520	3,305053521	01600	0132,202140800	-0,610946470	-1,518946470
041	545	0,000000000	01681	0000,000000000	-4,013900000	-4,944600000
042	521	3,263911578	01764	0137,084286300	-0,847888420	-1,801288420
043	441	4,865701269	01849	0209,225154600	+0,656001269	-0,320098730
044	434	4,946240132	01936	0217,634565800	+0,638640132	-0,360159860
045	427	5,023125275	02025	0226,040637400	+0,617625275	-0,403874720
046	433	4,957435885	02116	0228,042050700	+0,454035885	-0,590164110
047	436	4,923623917	02209	0231,410324100	+0,322323917	-0,744576080
048	439	4,889115216	02304	0234,677530400	+0,189915216	-0,899684780
049	420	5,096812990	02401	0249,743836500	+0,299712990	-0,812587010
050	381	5,463931893	02500	0273,196594700	+0,568931893	-0,566068100
051	367	5,582809752	02601	0284,723297400	+0,589909752	-0,567790240
052	363	5,615869113	02704	0292,025193900	+0,525069113	-0,655330880
053	360	5,640428437	02809	0298,942707200	+0,451728437	-0,751371560
054	351	5,712999130	02916	0308,501953000	+0,426399130	-0,799400870
055	375	5,515523325	03025	0303,353782900	+0,131023325	-1,117476670
056	391	5,375503352	03136	0301,028187700	-0,106896640	-1,378096640
057	396	5,330006878	03249	0303,810392000	-0,250293120	-1,544193120
058	411	5,187467359	03364	0300,873106800	-0,490732640	-1,807332640
059	424	5,055073384	03481	0298,249329700	-0,721026610	-2,060326610
060	480	4,316654433	03600	0258,999266000	-1,557345560	-2,919345560
061	515	3,490606098	03721	0212,926972000	-2,481293900	-3,865993900
062	532	2,663199635	03844	0165,118377400	-3,406600360	-4,814000360
063	486	4,208921733	03969	0265,162069200	-1,958778260	-3,388878260
064	426	5,033838191	04096	0322,165644200	-1,231761800	-2,684561800
065	441	4,865701269	04225	0316,270582500	-1,497798730	-2,973298730
066	440	4,877450162	04356	0321,911710700	-1,583949830	-3,082149830
067	418	5,117334626	04489	0342,861419900	-1,441965370	-2,962865370
068	408	5,216772305	04624	0354,740516800	-1,440427690	-2,984027690
069	387	5,411265304	04761	0373,377306000	-1,343834690	-2,910134690
070	337	5,823037116	04900	0407,612598100	-1,029962880	-2,618962880
071	327	5,899897354	05041	0418,892712100	-1,051002640	-2,662702640
072	365	5,599385472	05184	0403,155754000	-1,449414520	-3,083814520
073	330	5,876971548	05329	0429,018923000	-1,269728450	-2,926828450
074	334	5,846231076	05476	0432,621099700	-1,398368920	-3,078168920
075	304	6,072695819	05625	0455,452186500	-1,269804180	-2,972304180

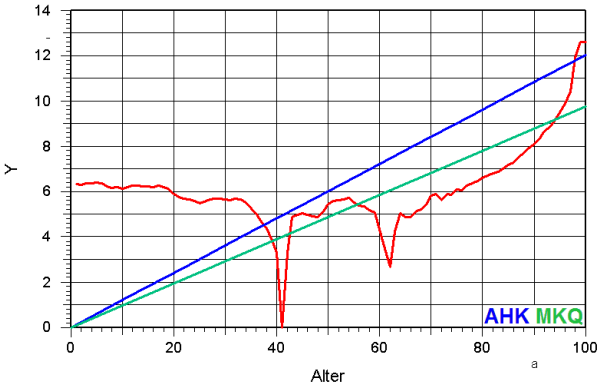
076	306	6,057839616	05776	0460,395810800	-1,382560380	-3,107760380
077	277	6,271479668	05929	0482,903934400	-1,266820330	-3,014720330
078	267	6,344748918	06084	0494,890415600	-1,291451080	-3,062051080
079	251	6,462308212	06241	0510,522348700	-1,271791780	-3,065091780
080	235	6,580993193	06400	0526,479455400	-1,251006800	-3,067006800
081	222	6,678851929	06561	0540,987006200	-1,251048070	-3,089748070
082	207	6,794067109	06724	0557,113502900	-1,233732890	-3,095132890
083	196	6,880604290	06889	0571,090156100	-1,245095710	-3,129195710
084	182	6,993932975	07056	0587,490369900	-1,229667020	-3,136467020
085	161	7,172624764	07225	0609,673104900	-1,148875230	-3,078375230
086	150	7,271564712	07396	0625,354565200	-1,147835280	-3,100035280
087	126	7,504758599	07569	0652,913998100	-1,012541400	-2,987441400
088	110	7,677947672	07744	0675,659395200	-0,937252320	-2,934852320
089	090	7,923468934	07921	0705,188735100	-0,789631060	-2,809931060
090	079	8,077667200	08100	0726,990048000	-0,733332800	-2,776332800
091	065	8,302265795	08281	0755,506187300	-0,606634200	-2,672334200
092	047	8,663244289	08464	0797,018474600	-0,343555710	-2,431955710
093	040	8,838443010	08649	0821,975199900	-0,266256900	-2,377356990
094	031	9,110965491	08836	0856,430756100	-0,091634500	-2,225434500
095	022	9,471235026	09025	0899,767327400	+0,170735026	-1,985764970
096	015	9,867497615	09216	0947,279771000	+0,469097615	-1,710102380
097	009	10,38955931	09409	1007,787253000	+0,893259312	-1,308640680
098	002	11,90658786	09604	1166,845610000	+2,312387861	+0,087787861
099	001	12,60157159	09801	1247,555587000	+2,909471589	+0,662171589
100	001	12,60157159	10000	1260,157159000	+2,811571589	+0,541571589
5.050	31.065	608,888	338.350	33.115,4	114,493	-0,142

MKQ	**MKQ**	**HKA**	**HKA**
b	545	b	545
c	0,0979	c	0,1206
$\bar{x}_{MAX}$	129 a	$\bar{x}_{MAX}$	**105 a**
$\bar{x}_{50}$	64,4 a	$\bar{x}_{50}$	52,2 a
$\bar{x}_{25}$	**75,6 a**	$\bar{x}_{25}$	61,4 a
$\sum$	35.140,2 Pix	$\sum$	**28.525,9 Pix**
$\sum$	-	$\sum$	**5.011.206 EW**

Die dazugehörigen Grafiken.



$$c_{MKQ} = \frac{33115,4}{338350} \qquad c_{HKA} = \frac{608,888}{5050}$$



8.5 Beispiel IIIb – Altersstruktur Ungarn – Männer

Stammdaten:
27.512,0 Pix – männlich
28.525,9 Pix – weiblich
56 041,9 Pix – Gesamt
Einwohner (EW): 9.845.000
175,7 EW/Pix
b = 561

X Alter in a	y^{***} Pix-Wert	Y	$X \cdot X$	$X \cdot Y$	Δ_{MKQ}	Δ_{HKA}
001	287	6,287009787	00001	0006,287009787	+6,178909787	+6,157709787
002	291	6,258516459	00004	0012,517032920	+6,042316459	+5,999916459
003	282	6,322603438	00009	0018,967810310	+5,998303438	+5,934703438
004	288	6,279888532	00016	0025,119554130	+5,847488532	+5,762688532
005	278	6,351074030	00025	0031,755370150	+5,810574030	+5,704574030
006	282	6,322603438	00036	0037,935620630	+5,674003438	+5,546803438
007	304	6,165652789	00049	0043,159569520	+5,408952789	+5,260552789
008	313	6,100970611	00064	0048,807764890	+5,236170611	+5,066570611
009	305	6,158485214	00081	0055,426366920	+5,185585214	+4,994785214
010	317	6,072077342	00100	0060,720773420	+4,991077342	+4,779077342
011	309	6,129769117	00121	0067,427460290	+4,940669117	+4,707469117
012	297	6,215718593	00144	0074,588623110	+4,918518593	+4,664118593
013	296	6,222857760	00169	0080,897150880	+4,817557760	+4,541957760
014	302	6,179975519	00196	0086,519657270	+4,666575519	+4,369775519
015	305	6,158485214	00225	0092,377278210	+4,536985214	+4,218985214
016	308	6,136955390	00256	0098,191286230	+4,407355390	+4,068155390
017	299	6,201431364	00289	0105,424333200	+4,363731364	+4,003331364
018	305	6,158485214	00324	0110,852733800	+4,212685214	+3,831085214
019	324	6,021248063	00361	0114,403713200	+0,967348063	+3,564548063
020	348	5,843494441	00400	0116,869888800	+3,681494441	+3,257494441
021	369	5,681614450	00441	0119,313903500	+3,411514450	+2,966314450
022	375	5,633903496	00484	0123,945876900	+3,255703496	+2,789303496
023	380	5,593556340	00529	0128,651795800	+3,107256340	+2,619656340
024	394	5,477333976	00576	0131,456015400	+2,882933976	+2,374133976
025	406	5,373223753	00625	0134,330593800	+2,670723753	+2,140723753
026	398	5,443135328	00676	0141,521518500	+2,632535328	+2,081335328
027	388	5,527770865	00729	0149,249813400	+2,609070865	+2,036670865
028	385	5,552627304	00784	0155,473564500	+2,525827304	+1,932227304
029	381	5,585418562	00841	0161,977138300	+2,450518562	+1,835718562
030	381	5,585418562	00900	0167,562556800	+2,342418562	+1,706418562
031	386	5,544367531	00961	0171,875393500	+2,193267531	+1,536067531

032	366	5,705202231	01024	0182,566471400	+2,246002231	+1,567602231
033	371	5,665792271	01089	0186,971144900	+2,098492271	+1,398892271
034	393	5,485810009	01156	0186,517540300	+1,810410009	+1,089610009
035	417	5,273368426	01225	0184,567894900	+1,489868426	+0,747868426
036	436	5,088360569	01296	0183,180980500	+1,196760569	+0,433560569
037	468	4,724547392	01369	0174,808253500	+0,724847392	-0,059552608
038	491	4,395956655	01444	0167,046352900	+0,288156655	-0,517443345
039	514	3,958698651	01521	0154,389247400	-0,257201349	-1,084001349
040	539	3,175499551	01600	0127,019982000	-1,148500449	-1,996500449
041	561	0,000000000	01681	0000,000000000	-4,432100000	-5,301300000
042	535	3,343291025	01764	0140,418223000	-1,196908975	-2,087308975
043	452	4,916519091	01849	0211,410320900	+0,268219091	-0,643380909
044	445	4,993820558	01936	0219,728104600	+0,237420558	-0,695379442
045	439	5,057405848	02025	0227,583263200	+0,192905848	-0,761094152
046	442	5,025902766	02116	0231,191527200	+0,053302766	-0,921897234
047	444	5,004580968	02209	0235,215305500	-0,076119032	-1,072519032
048	440	5,046967223	02304	0242,254426700	-0,141832777	-1,159432777
049	418	5,264052773	02401	0257,938585900	-0,032847227	-1,071647227
050	380	5,593556340	02500	0279,677817000	+0,188556340	-0,871443660
051	363	5,728622896	02601	0292,159767700	+0,215522896	-0,865677104
052	356	5,782666343	02704	0300,698649900	+0,161466343	-0,940933657
053	347	5,851034154	02809	0310,104810100	+0,121734154	-1,001865846
054	334	5,947925542	02916	0321,187979200	+0,110525542	-1,034274458
055	349	5,835941149	03025	0320,976763200	-0,109558851	-1,275558851
056	361	5,744147855	03136	0321,672279900	-0,309452145	-1,496652145
057	355	5,790321909	03249	0330,048348800	-0,371378091	-1,579778091
058	367	5,697358616	03364	0330,446799700	-0,572441384	-1,802041384
059	374	5,641907071	03481	0332,872517200	-0,735992929	-1,986792929
060	414	5,301067205	03600	0318,064032300	-1,184932795	-2,456932795
061	441	5,036466576	03721	0307,224461100	-1,557633424	-2,850833424
062	451	4,927783767	03844	0305,522593600	-1,774416233	-3,088816233
063	404	5,390901061	03969	0339,626766800	-1,419398939	-2,754998939
064	354	5,797962072	04096	0371,069572600	-1,120437928	-2,477237928
065	346	5,858560538	04225	0380,806435000	-1,167939462	-2,545939462
066	346	5,858560538	04356	0386,664995500	-1,276039462	-2,675239462
067	323	6,028532134	04489	0403,911653000	-1,214167866	-2,634567866
068	308	6,136955390	04624	0417,312966500	-1,213844610	-2,655444610
069	290	6,265642049	04761	0432,329301400	-1,193257951	-2,656057951
070	247	6,572905208	04900	0460,103364500	-0,994094792	-2,478094792
071	230	6,696776566	05041	0475,471136200	-0,978323434	-2,483523434
072	252	6,536864115	05184	0470,654216300	-1,246335885	-2,772735885
073	224	6,741120749	05329	0492,101814700	-1,150179251	-2,697779251
074	217	6,793367969	05476	0502,709229700	-1,206032031	-2,774832031
075	193	6,977827361	05625	0523,337052000	-1,129672639	-2,719672639

076	181	7,074023249	05776	0537,625767000	-1,141576751	-2,752776751
077	158	7,268540750	05929	0559,677637800	-1,055159250	-2,687559250
078	146	7,376799544	06084	0575,390364400	-1,055000456	-2,708600456
079	130	7,530612043	06241	0594,918351400	-1,009287957	-2,684087957
080	115	7,687347372	06400	0614,987789700	-0,960652628	-2,656652628
081	110	7,742922720	06561	0627,176740300	-1,013177280	-2,730377280
082	101	7,847998432	06724	0643,535871400	-1,016201568	-2,754601568
083	093	7,947724181	06889	0659,661107000	-1,024575819	-2,784175819
084	082	8,096787762	07056	0680,130172000	-0,983612238	-2,764412238
085	071	8,263485156	07225	0702,396238300	-0,925014844	-2,727014844
086	065	8,363923662	07396	0719,297434900	-0,932676338	-2,755876338
087	054	8,571218307	07569	0745,695992700	-0,833481693	-2,677881693
088	042	8,845880099	07744	0778,437448700	-0,666919901	-2,532519901
089	033	9,104201776	07921	0810,273958100	-0,516698224	-2,403498224
090	029	9,240946500	08100	0831,685185000	-0,488053500	-2,396053500
091	022	9,530247592	08281	0867,252530800	-0,306852408	-2,236052408
092	016	9,859751159	08464	0907,097106600	-0,085448841	-2,035848841
093	013	10,07286999	08649	0936,776909000	+0,019569990	-1,952030010
094	011	10,24356044	08836	0962,894681500	+0,082160442	-1,910639558
095	008	10,56744405	09025	1003,907185000	+0,297944051	-1,716055949
096	005	11,04284823	09216	1060,113430000	+0,665248233	-1,369951767
097	004	11,26778551	09409	1092,975194000	+0,782085507	-1,274314493
098	001	12,65944181	09604	1240,625297000	+2,065641811	-0,011958189
099	001	12,65944181	09801	1253,284739000	+1,957541811	-0,141258189
100	001	12,65944181	10000	1265,944181000	+1,849441811	-0,270558189
5.050	28.572	652,771	338.350	36.584,93	106,866	-0,1935

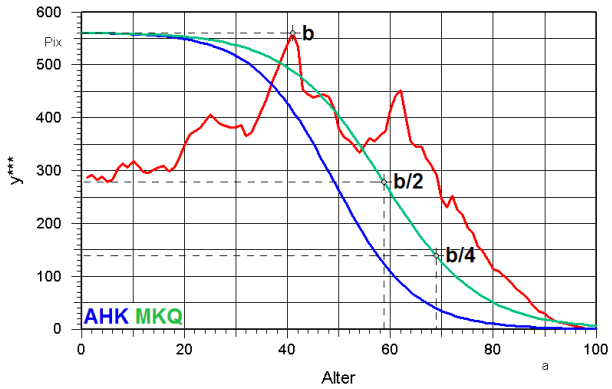
MKQ	**MKQ**	**HKA**	**HKA**
b	561	b	561
c	0,1081	c	0,1293
$\bar{x}_{MAX}$	117 a	$\bar{x}_{MAX}$	**98 a**
$\bar{x}_{50}$	58,6 a	$\bar{x}_{50}$	49,0 a
$\bar{x}_{25}$	**68,8 a**	$\bar{x}_{25}$	57,5 a
$\sum$	32.907,5 Pix	$\sum$	**27.512 Pix**
$\sum$	-	$\sum$	**4.833.092 EW**

Frauen leben demnach in Ungarn $75,6 - 68,8 = 6,8$ Jahre länger als ihre Männer.

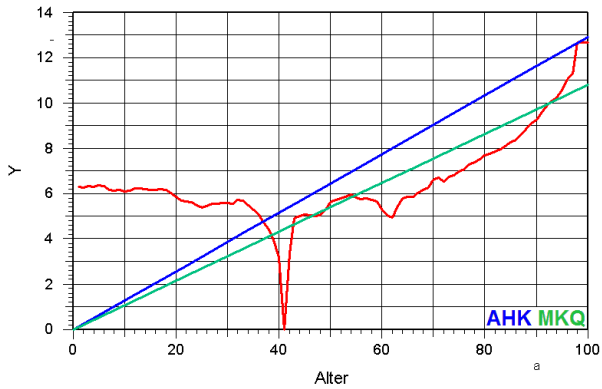
Der Männermangel beträgt demnach:

$$5.011.206 : 4.833.092 = 1000 : 965$$

Die dazugehörigen Grafiken.



$$c_{MKQ} = \frac{36584,93}{338350} \qquad c_{HKA} = \frac{652,771}{5050}$$



8.6 Beispiel IVa – Alterstruktur Deutschland – Frauen

Stammdaten:
15.150,92 Pix – männlich
15.525,10 Pix – weiblich
30.676,02 Pix – Gesamt
Einwohner (EW): 81.410.000
2.653,9 EW/Pix
b = 284

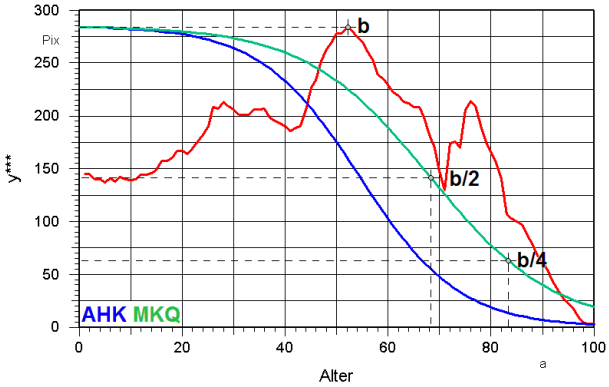
X Alter in a	y^{***} Pix-Wert	Y	$X \cdot X$	$X \cdot Y$	Δ_{MKQ}	Δ_{HKA}
001	145	5,613882918	00001	0005,613882918	+5,530982918	+5,510182918
002	145	5,613882918	00004	0011,227765840	+5,448082918	+5,406482918
003	140	5,684065558	00009	0017,052196670	+5,435365558	+5,372965558
004	140	5,684065558	00016	0022,736262230	+5,352465558	+5,269265558
005	137	5,726205586	00025	0028,631027930	+5,311705586	+5,207705586
006	141	5,670027647	00036	0034,020165880	+5,172627647	+5,047827647
007	138	5,712153140	00049	0039,985071980	+5,131853140	+4,986253140
008	142	5,655991811	00064	0045,247934490	+4,992791811	+4,826391811
009	140	5,684065558	00081	0051,156590020	+4,937965558	+4,750765558
010	139	5,698106927	00100	0056,981069270	+4,869106927	+4,661106927
011	140	5,684065558	00121	0062,524721140	+4,772165558	+4,543365558
012	144	5,627920829	00144	0067,535049950	+4,633120829	+4,383520829
013	144	5,627920829	00169	0073,162970780	+4,550220829	+4,279820829
014	146	5,599841550	00196	0078,397781690	+4,439241550	+4,148041550
015	149	5,557682818	00225	0083,365242270	+4,314182818	+4,002182818
016	157	5,444758697	00256	0087,116139150	+4,118358697	+3,785558697
017	157	5,444758697	00289	0092,560897840	+4,035458697	+3,681858697
018	160	5,402114160	00324	0097,238054880	+3,909914160	+3,535514160
019	167	5,301665050	00361	0100,731636000	+3,726565050	+3,331365050
020	167	5,301665050	00400	0106,033301000	+3,643665050	+3,227665050
021	164	5,344898356	00441	0112,242865500	+3,603998356	+3,167198356
022	169	5,272665714	00484	0115,998645700	+3,448865714	+2,991265714
023	176	5,169838125	00529	0118,906276900	+3,263138125	+2,784738125
024	182	5,079696539	00576	0121,912716900	+3,090096539	+2,590896539
025	190	4,955827058	00625	0123,895676400	+2,883327058	+2,363327058
026	208	4,655241580	00676	0121,036281100	+2,499841580	+1,959041580
027	207	4,672964272	00729	0126,170035300	+2,434664272	+1,873064272
028	213	4,564348191	00784	0127,801749400	+2,243148191	+1,660748191
029	209	4,637373326	00841	0134,483826500	+2,233273326	+1,630073326
030	206	4,690545922	00900	0140,716377700	+2,203545922	+1,579545922
031	201	4,776486129	00961	0148,071070000	+2,206586129	+1,561786129

032	201	4,776486129	01024	0152,847556100	+2,123686129	+1,458086129
033	201	4,776486129	01089	0157,624042300	+2,040786129	+1,354386129
034	206	4,690545922	01156	0159,478561300	+1,871945922	+1,164745922
035	206	4,690545922	01225	0164,169107300	+1,789045922	+1,061045922
036	207	4,672964272	01296	0168,226713800	+1,688564272	+0,939764272
037	198	4,826615326	01369	0178,584767100	+1,759315326	+0,989715326
038	195	4,875784350	01444	0185,279805300	+1,725584350	+0,935184350
039	193	4,908072626	01521	0191,414832400	+1,674972626	+0,863772626
040	190	4,955827058	01600	0198,233082300	+1,639827058	+0,807827058
041	186	5,018347415	01681	0205,752244000	+1,619447415	+0,766647415
042	189	4,971575415	01764	0208,806167400	+1,489775415	+0,616175415
043	190	4,955827058	01849	0213,100563500	+1,391127058	+0,496727058
044	205	4,707990894	01936	0207,151599300	+1,060390894	+0,145190894
045	226	4,305976683	02025	0193,768950700	+0,575476683	-0,360523317
046	234	4,125478756	02116	0189,772022800	+0,312078756	-0,644721244
047	252	3,616052712	02209	0169,954477500	-0,280247288	-1,257847288
048	263	3,167862659	02304	0152,057407600	-0,811337341	-1,809737341
049	270	2,758602480	02401	0135,171521500	-1,303497520	-2,322697520
050	278	1,967263274	02500	0098,363163680	-2,177736726	-3,217736726
051	278	1,967263274	02601	0100,330426900	-2,260636726	-3,321436726
052	284	0,000000000	02704	0000,000000000	-4,310800000	-5,392400000
053	281	1,396913930	02809	0074,036438290	-2,996786070	-4,099186070
054	274	2,433741405	02916	0131,422035800	-2,042858595	-3,166058595
055	270	2,758602480	03025	0151,723136400	-1,800897520	-2,944897520
056	261	3,262507661	03136	0182,700429000	-1,379892339	-2,544692339
057	253	3,581320652	03249	0204,135277200	-1,143979348	-2,329579348
058	239	4,001152083	03364	0232,066820800	-0,807047917	-2,013447917
059	235	4,101411729	03481	0241,983292000	-0,789688271	-2,016888271
060	229	4,240603925	03600	0254,436235500	-0,733396075	-1,981396075
061	222	4,389431583	03721	0267,755326500	-0,667468417	-1,936268417
062	219	4,449557250	03844	0275,872549500	-0,690242750	-1,979842750
063	213	4,564348191	03969	0287,553936100	-0,658351809	-1,968751809
064	212	4,582847405	04096	0293,302233900	-0,722752595	-2,053952595
065	208	4,655241580	04225	0302,590702700	-0,733258420	-2,085258420
066	208	4,655241580	04356	0307,245944300	-0,816158420	-2,188958420
067	199	4,810016710	04489	0322,271119500	-0,744283290	-2,137883290
068	182	5,079696539	04624	0345,419364700	-0,557503461	-1,971903461
069	170	5,258107929	04761	0362,809447100	-0,461992071	-1,897192071
070	148	5,571742890	04900	0390,022002300	-0,231257110	-1,687257110
071	130	5,824864905	05041	0413,565408200	-0,061035095	-1,537835095
072	174	5,199449140	05184	0374,360338100	-0,769350860	-2,266950860
073	176	5,169838125	05329	0377,398183200	-0,881861875	-2,400261875
074	170	5,258107929	05476	0389,099986800	-0,876492071	-2,415692071
075	205	4,707990894	05625	0353,099317000	-1,509509106	-3,069509106

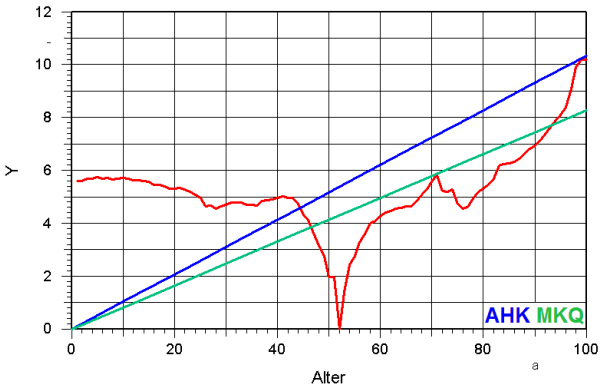
076	214	4,545678100	05776	0345,471535600	-1,754721900	-3,335521900
077	210	4,619354821	05929	0355,690321200	-1,763945179	-3,365545179
078	191	4,939995592	06084	0385,319656200	-1,526204408	-3,148604408
079	175	5,184668630	06241	0409,588821800	-1,364431370	-3,007631370
080	166	5,316109943	06400	0425,288795400	-1,315890057	-2,979890057
081	156	5,458930635	06561	0442,173381500	-1,255969365	-2,940769365
082	140	5,684065558	06724	0466,093375800	-1,113734442	-2,819334442
083	107	6,157928954	06889	0511,108103200	-0,722771046	-2,449171046
084	103	6,218251937	07056	0522,333162700	-0,745348063	-2,492548063
085	100	6,264159877	07225	0532,453589600	-0,782340123	-2,550340123
086	097	6,310705222	07396	0542,720649100	-0,818694778	-2,607494778
087	088	6,454841152	07569	0561,571180300	-0,757458848	-2,567058848
088	079	6,607402554	07744	0581,451424800	-0,687797446	-2,518197446
089	068	6,809363887	07921	0606,033385900	-0,568736113	-2,419936113
090	061	6,949746426	08100	0625,477178300	-0,511253574	-2,383253574
091	054	7,102407902	08281	0646,319119100	-0,441492098	-2,334292098
092	043	7,376711849	08464	0678,657490100	-0,250088151	-2,163688151
093	035	7,615087095	08649	0708,203099800	-0,094612905	-2,029012905
094	028	7,865845813	08836	0739,389506400	+0,073245813	-1,881954187
095	023	8,081824526	09025	0767,773330000	+0,206324526	-1,769675474
096	017	8,406747875	09216	0807,047796000	+0,448347875	-1,548452125
097	009	9,072150527	09409	0879,998601100	+1,030850527	-0,986749473
098	004	9,901034546	09604	0970,301385500	+1,776834546	-0,261565454
099	003	10,19226902	09801	1009,034633000	+1,985169020	-0,074030980
100	003	10,19226902	10000	1019,226902000	+1,902269020	-0,177730980
5.050	16.767	523,571	338.350	28.056,24	104,925	-0,1144

MKQ	**MKQ**	**HKA**	**HKA**
b	284	b	284
c	0,0829	c	0,1037
$\bar{x}_{MAX}$	136 a	$\bar{x}_{MAX}$	**109 a**
$\bar{x}_{50}$	68,1 a	$\bar{x}_{50}$	54,5 a
$\bar{x}_{25}$	**81,5 a**	$\bar{x}_{25}$	65,1 a
$\sum$	17.376,2 Pix	$\sum$	**15.525,1 Pix**
$\sum$	-	$\sum$	**41.201.512 EW**

Die dazugehörigen Grafiken.



$$c_{MKQ} = \frac{28056,24}{338350} \qquad c_{HKA} = \frac{523,571}{5050}$$



8.7 Beispiel IVb – Altersstruktur Deutschland – Männer

Stammdaten:
15.150,92 Pix – männlich
15.525,10 Pix – weiblich
30.676,02 Pix – Gesamt
Einwohner (EW): 81.410.000
2.653,9 EW/Pix
b = 290

X Alter in a	y^{***} Pix-Wert	Y	$X \cdot X$	$X \cdot Y$	Δ_{MKQ}	Δ_{HKA}
001	155	5,539110692	00001	0005,539110692	+5,448810692	+5,430210692
002	153	5,566696687	00004	0011,133393370	+5,386096687	+5,348896687
003	148	5,635513279	00009	0016,906539840	+5,364613279	+5,308813279
004	148	5,635513279	00016	0022,542053120	+5,274313279	+5,199913279
005	145	5,676753802	00025	0028,383769010	+5,225253802	+5,132253802
006	148	5,635513279	00036	0033,813079680	+5,093713279	+4,982113279
007	146	5,663008044	00049	0039,641056310	+5,030908044	+4,900708044
008	150	5,608005519	00064	0044,864044150	+4,885605519	+4,736805519
009	150	5,608005519	00081	0050,472049670	+4,795305519	+4,627905519
010	147	5,649261636	00100	0056,492616360	+4,746261636	+4,560261636
011	149	5,621761675	00121	0061,839378420	+4,628461675	+4,423861675
012	153	5,566696687	00144	0066,800360240	+4,483096687	+4,259896687
013	153	5,566696687	00169	0072,367056930	+4,392796687	+4,150996687
014	154	5,552909246	00196	0077,740729450	+4,288709246	+4,028309246
015	159	5,483778643	00225	0082,256679650	+4,129278643	+3,850278643
016	167	5,372168676	00256	0085,954698820	+3,927368676	+3,629768676
017	171	5,315709109	00289	0090,367054860	+3,780609109	+3,464409109
018	175	5,258685140	00324	0094,656332520	+3,633285140	+3,298485140
019	175	5,258685140	00361	0099,915017660	+3,542985140	+3,189585140
020	175	5,258685140	00400	0105,173702800	+3,452685140	+3,080685140
021	183	5,142525997	00441	0107,993045900	+3,246225997	+2,855625997
022	187	5,083163205	00484	0111,829590500	+3,096563205	+2,687363205
023	194	4,976733742	00529	0114,464876100	+2,899833742	+2,472033742
024	197	4,929971977	00576	0118,319327400	+2,762771977	+2,316371977
025	205	4,801218240	00625	0120,030456000	+2,543718240	+2,078718240
026	227	4,403813989	00676	0114,499163700	+2,056013989	+1,572413989
027	224	4,462927491	00729	0120,499042200	+2,024827491	+1,522627491
028	230	4,342675478	00784	0121,594913400	+1,814275478	+1,293475478
029	235	4,235647100	00841	0122,833765900	+1,616947100	+1,077547100
030	220	4,538933254	00900	0136,167997600	+1,829933254	+1,271933254
031	214	4,647710330	00961	0144,079020200	+1,848410330	+1,271810330

032	212	4,682742501	01024	0149,847760000	+1,793142501	+1,197942501
033	212	4,682742501	01089	0154,530502500	+1,702842501	+1,089042501
034	216	4,612090629	01156	0156,811081400	+1,541890629	+0,909490629
035	213	4,665297584	01225	0163,285415400	+1,504797584	+0,853797584
036	214	4,647710330	01296	0167,317571900	+1,396910330	+0,727310330
037	202	4,850249595	01369	0179,459235000	+1,509149595	+0,820949595
038	199	4,898364675	01444	0186,137857700	+1,466964675	+0,760164675
039	198	4,914213385	01521	0191,654322000	+1,392513385	+0,667113385
040	194	4,976733742	01600	0199,069349700	+1,364733742	+0,620733742
041	189	5,053106721	01681	0207,177375600	+1,350806721	+0,588206721
042	191	5,022777681	01764	0210,956662600	+1,230177681	+0,448977681
043	192	5,007505401	01849	0215,322732200	+1,124605401	+0,324805401
044	210	4,717222547	01936	0207,557792100	+0,744022547	-0,074377453
045	231	4,321807775	02025	0194,481349900	+0,258307775	-0,578692225
046	240	4,121067632	02116	0189,569111100	-0,032732368	-0,888332368
047	259	3,578788764	02209	0168,203071900	-0,665311236	-1,539511236
048	271	3,063494376	02304	0147,047730000	-1,270905624	-2,163705624
049	278	2,607209167	02401	0127,753249200	-1,817490833	-2,728890833
050	285	1,809151212	02500	0090,457560600	-2,705848788	-3,635848788
051	287	1,396693068	02601	0071,231346490	-3,208606932	-4,157206932
052	290	0,000000000	02704	0000,000000000	-4,695600000	-5,662800000
053	287	1,396693068	02809	0074,024732620	-3,389206932	-4,375006932
054	278	2,607209167	02916	0140,789295000	-2,268990833	-3,273390833
055	272	3,008517836	03025	0165,468481000	-1,957982164	-2,980982164
056	262	3,468832249	03136	0194,254606000	-1,587967751	-2,629567751
057	254	3,743464569	03249	0213,377480400	-1,403635431	-2,463835431
058	239	4,144661090	03364	0240,390343200	-1,092738910	-2,171538910
059	233	4,279285480	03481	0252,477843300	-1,048414520	-2,145814520
060	225	4,443435263	03600	0266,606115800	-0,974564737	-2,090564737
061	216	4,612090629	03721	0281,337528400	-0,896209371	-2,030809371
062	209	4,734265918	03844	0293,524486900	-0,864334082	-2,017534082
063	200	4,882423063	03969	0307,592653000	-0,806476937	-1,978276937
064	199	4,898364675	04096	0313,495339200	-0,880835325	-2,071235325
065	194	4,976733742	04225	0323,487693300	-0,892766258	-2,101766258
066	193	4,992158213	04356	0329,482442000	-0,967641787	-2,195241787
067	185	5,112964192	04489	0342,568600900	-0,937135808	-2,183335808
068	168	5,358101299	04624	0364,350888300	-0,782298701	-2,047098701
069	157	5,511474918	04761	0380,291769300	-0,719225082	-2,002625082
070	134	5,828286928	04900	0407,980085000	-0,492713072	-1,794713072
071	116	6,081076706	05041	0431,756446100	-0,330223294	-1,650823294
072	159	5,483778643	05184	0394,832062300	-1,017821357	-2,357021357
073	154	5,552909246	05329	0405,362375000	-1,038990754	-2,396790754
074	146	5,663008044	05476	0419,062595200	-1,019191956	-2,395591956
075	173	5,287273953	05625	0396,545546500	-1,485226047	-2,880226047

076	177	5,229929639	05776	0397,474652500	-1,632870361	-3,046470361
077	169	5,344003253	05929	0411,488250500	-1,609096747	-3,041296747
078	152	5,580474335	06084	0435,276998200	-1,462925665	-2,913725665
079	136	5,800651154	06241	0458,251441200	-1,333048846	-2,802448846
080	125	5,953554974	06400	0476,284397900	-1,270445026	-2,758445026
081	113	6,124276655	06561	0496,066409000	-1,190023345	-2,696623345
082	097	6,363028104	06724	0521,768304500	-1,041571896	-2,566771896
083	073	6,763916545	06889	0561,405073200	-0,730983455	-2,274783455
084	066	6,896326583	07056	0579,291433000	-0,688873417	-2,251273417
085	060	7,017954071	07225	0596,526096100	-0,657545929	-2,238545929
086	056	7,104114746	07396	0610,953868200	-0,661685254	-2,261285254
087	048	7,291741355	07569	0634,381497900	-0,564358645	-2,182558645
088	041	7,477769774	07744	0658,043740100	-0,468630226	-2,105430226
089	032	7,760973082	07921	0690,726604300	-0,275726918	-1,931126918
090	025	8,034501407	08100	0723,105126600	-0,092498593	-1,766498593
091	019	8,331244010	08281	0758,143204900	+0,113944010	-1,578655990
092	014	8,654841100	08464	0796,245381200	+0,347241100	-1,363958900
093	010	9,005650499	08649	0837,525496400	+0,607750499	-1,122049501
094	009	9,114563417	08836	0856,768961200	+0,626363417	-1,122036583
095	006	9,530610634	09025	0905,408010200	+0,952110634	-0,814889366
096	004	9,943068778	09216	0954,534602700	+1,274268778	-0,511331222
097	002	10,64316043	09409	1032,386562000	+1,884060431	+0,079860431
098	001	11,33976185	09604	1111,296661000	+2,490361846	+0,667561846
099	001	11,33976185	09801	1122,636423000	+2,400061846	+0,558661846
100	001	11,33976185	10000	1133,976185000	+2,309761846	+0,449761846
5.050	16.310	549,72	338.350	30.556,07	93,705	-0,2249

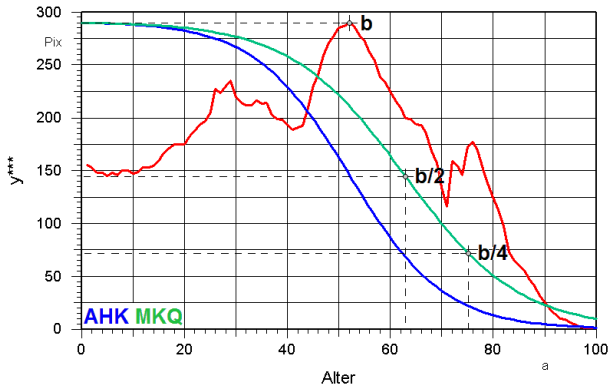
MKQ	**MKQ**	**HKA**	**HKA**
b	290	b	290
c	0,0903	c	0,1089
$\bar{x}_{MAX}$	126 a	$\bar{x}_{MAX}$	**104 a**
$\bar{x}_{50}$	62,7 a	$\bar{x}_{50}$	52,1 a
$\bar{x}_{25}$	**75,0 a**	$\bar{x}_{25}$	62,2 a
$\sum$	18.271,71 Pix	$\sum$	**15.150,92 Pix**
$\sum$	-	$\sum$	**40.208.489 EW**

Frauen leben demnach in Deutschland $81,5 - 75,0 = 6,5$ Jahre länger als ihre Männer.

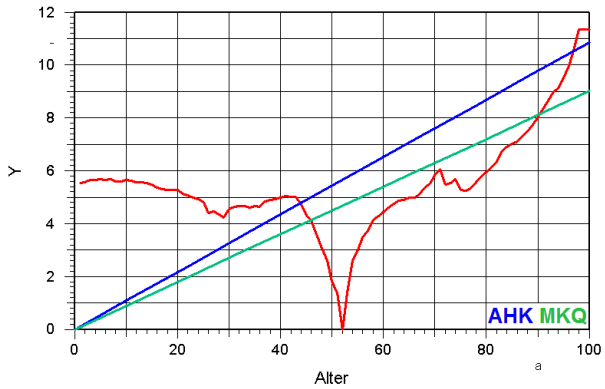
Der Männermangel beträgt demnach:

$$41.201.512 : 40.208.489 = 1000 : 976$$

Die dazugehörigen Grafiken.



$$c_{MKQ} = \frac{30556,07}{338350} \qquad c_{HKA} = \frac{549,72}{5050}$$



9 Die Bedeutung der Werte Δ_{MKQ} und Δ_{HKA}

Die Transformation der y^{***}- in Y- Werte erfolgt über die bekannte Vorschrift.

$$Y = \ln\left(\frac{b}{y^{***}} \cdot (b + 1 - y^{***})\right) \qquad \text{mit} \qquad y^{***} = \frac{b \cdot (b+1)}{b + e^{c \cdot x}}$$

$\Rightarrow$

$$Y = \ln\left(\frac{b}{\frac{b \cdot (b+1)}{b+e^{c \cdot x}}} \cdot \left(b + 1 - \frac{b \cdot (b+1)}{b + e^{c \cdot x}}\right)\right)$$

$\Rightarrow$

$$Y = c \cdot x$$

Die lineare Regression ohne Inhomogenität ist demnach unabhängig von b. Daher auch die relativ freie Wahl für b im konkreten Anwendungsfall.

Desweiteren gilt:

$$\Delta = \{Y - c \cdot x\}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta = 0$$

Damit ist Δ_{MKQ} und Δ_{HKA} eine Information über die Güte der ermittelten Werte.

- Δ_{HKA} ist eine Information der gelungenen, fehlerfreien, linearen Regression.
- Δ_{MKQ} ist eine Information der Erfüllung der angenommenen Bienenkorbvoraussetzung.

Beispiel	Δ_{MKQ}	b	c	$\frac{y_{MKQ}}{b}$
Idealfall	0,51630	100	0,09930	0,999
Female – USA	45,0677	201	0,07735	0,865
Male – USA	19,8504	198	0,08310	0,979
Female – HU	114,493	545	0,09790	0,007
Male – HU	106,866	561	0,10810	0,005
Female – DE	104,925	284	0,08290	0,045
Male – DE	93,7050	290	0,09030	0,058

Mit:

$$y = \frac{b \cdot (b+1)}{b + e^{c \cdot x}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{y_{MKQ}}{b} = \frac{b+1}{b + e^{c_{MKQ} \cdot \Delta_{MKQ}}}$$

Bei einem Wert $\frac{y_{MKQ}}{b} = 1$ ist die Voraussetzung ideal erfüllt, da für ein gefordertes

$$c_{MKQ} \cdot \Delta_{MKQ} \to 0$$

gilt:

$$\frac{y_{MKQ}}{b} = 1$$

10 Vergleich der ermittelten mit gegebenen, offiziellen Werten

Vergleichswerte entnommen aus: Statistisches Bundesamt – DeStatis.

• **Frauen:**

Land	$\bar{x}_{25}$	**DeStatis - 2015**	**Differenz**	$\frac{y_{MKQ}}{b}$
USA	82,8a	81,2a	1,6a	0,865
HU	75,6a	79,0a	3,4a	0,007
DE	81,5a	83,1a	1,6a	0,045

• **Männer:**

Land	$\bar{x}_{25}$	**DeStatis - 2015**	**Differenz**	$\frac{y_{MKQ}}{b}$
USA	76,9a	76,4a	0,5a	0,979
HU	68,8a	72,3a	3,5a	0,005
DE	75,0a	78,3a	3,3a	0,058

• **Differenz:**

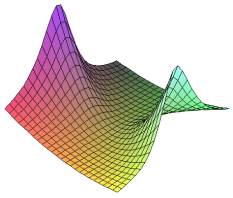
Land	$\Delta\bar{x}_{25}$	**DeStatis - 20150**	**Differenz**	$\oslash\frac{y_{MKQ}}{b}$
USA	5,9a	4,8a	1,1a	0,922
HU	6,8a	6,7a	0,1a	0,006
DE	6,5a	4,8a	1,7a	0,052

LaTeX 2_ε

$$\oiint$$

3.3.3 Die Bilaterale-lineare-Regression - BLR

Die **B**ilaterale-**l**ineare-**R**egression - **BLR**



Das Gütekriterium $\beta_{\mathbf{K}\vee}$

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 13. Juli 2021 - Letzte Revision: 16. August 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Modellbildung **5**
2.1 Winkel $\tan\alpha$ 5
2.2 Schnittpunkt P_s 6
2.3 Winkelhalbierende y_w 8
2.4 Schnittpunkt P_w 9
2.5 Fehlerfläche F 10
2.6 Idealfall 11

3 Zusammenfassung **13**

4 Beispiel - Realfall **15**

5 Beispiel - Idealfall **19**

6 Anhang **23**
6.1 Allgemeine Terme 23
6.2 Gütekriterium β 25
6.3 Gütekriterium $|\beta_0|$ 26
6.4 Gütekriterium $\beta_{K\vee}$ 27

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Einleitung

Gegeben ist das Ergebnis $y_1 : X \to Y$ einer linearen Regression. **Einleitung**

Wobei a den Anstieg und b die Inhomogenität darstellt.

$$y_1 = a_1 \cdot x + b_1$$

Nach Tausch der Datenpaare liegt bei erneuter linearer Regression nach $y_2 : Y \to X$ vor:

$$y_2 = a_2 \cdot x + b_2$$

Für eine Funktion y_1 und dessen Inversfunktion y_2 gilt:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 \cdot x + b_1 \qquad &\to \qquad x &= a_1 \cdot y_2 + b_1 \\ y_2 &= a_2 \cdot x + b_2 \qquad &\to \qquad x &= a_2 \cdot y_1 + b_2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} y_1 &= \underbrace{\frac{1}{a_1}}_{a_2} \cdot x - \underbrace{\frac{b_1}{a_1}}_{b_2} \\ y_2 &= \underbrace{\frac{1}{a_2}}_{a_1} \cdot x - \underbrace{\frac{b_2}{a_2}}_{b_1} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$a_1 \cdot a_2 = 1$$

Sowie:

$$\frac{b_1}{b_2} = -a_1 \qquad \frac{b_2}{b_1} = -a_2$$

Funktion und Inversfunktion sind an der Winkelhalbierenden gespiegelt. Im vorliegenden Arbeitsblatt ist von Interesse, ob vorliegende Eigenschaften ebenfalls auf die konkrete Regressions- und Inversregressionsfunktion zutreffen.

2 Modellbildung

Modell

2.1 Winkel $\tan\alpha$

- Gegeben ist eine Datenliste $P(X_i, Y_i)$. Eine lineare Regression soll durchgeführt werden. Ergebnis dieser ist: [001]ff.

$$y = a \cdot x + b$$

Mit:

$$\sigma_x \qquad \sigma_y \qquad \rho_{xy}$$

- Gegeben ist eine Datenliste $P(X_i, Y_i)$. Eine bilaterale lineare Regression soll durchgeführt werden der Form $f(x \in X_i \to y \in Y_i)$. Ergebnis dieser ist:

$$y_1 = a_1 \cdot x + b_1$$

Mit:

$$_1\sigma_x \qquad _1\sigma_y \qquad _1\rho_{xy}$$

- Gegeben ist eine Datenliste $P(X_i, Y_i)$. Eine bilaterale lineare Regression soll durchgeführt werden der Form $f(x \in Y_i \to y \in X_i)$. Ergebnis dieser ist:

$$y_2 = a_2 \cdot x + b_2$$

Mit:

$$_2\sigma_x \qquad _2\sigma_y \qquad _2\rho_{xy}$$

Aus Symmetriegründen muss dann gelten:

$$\rho_{xy} = {}_1\rho_{xy} = {}_2\rho_{xy}$$

$$\sigma_x = {}_1\sigma_x = {}_2\sigma_y$$

$$\sigma_y = {}_1\sigma_y = {}_2\sigma_x$$

- Der Schnittwinkel zwischen y_1 und y_2 ist damit definiert.[1]

$$\tan\alpha = \left|\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 \cdot a_2}\right| = A$$

Da allgemein gilt:

$$\rho_{xy} = a \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

Folgt:[2]

$$\tan\alpha = \left|\frac{\rho_{xy}}{1 + \rho_{xy}^2} \cdot \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{\sigma_x \cdot \sigma_y}\right| = |B \cdot C|$$

- Wann ist $\tan\alpha = 0$?

Wenn:

$$\rho_{xy} = 0 \to a = 0 \to a_1 = a_2$$

Sowie:

$$\sigma_x = \sigma_y$$

Das entspricht dann dem Sonderfall einer Kreisregression.

- Wann ist $\tan\alpha = \infty$?

Wenn:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

Was

$$\rho_{xy}^2 = -1$$

entspräche.

[1] Term **A** im Anhang grafisch dargestellt
[2] Term **B** und **C** im Anhang grafisch dargestellt

2.2 Schnittpunkt P_s

Gegeben sind die Egebnisse einer bilateralen linearen Regression:

$$y_1 = a_1 \cdot x + b_1 \qquad\qquad y_2 = a_2 \cdot x + b_2$$

- Gesucht ist der Schnittpunkt $P_s\left(x_s, y_s\right)$ beider Funktionen.

$$x_s = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$$

$\Rightarrow$

$$y_{s,1} = a_1 \cdot \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} + b_1 \qquad \text{oder} \qquad y_{s,2} = a_2 \cdot \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} + b_2$$

Liegt dieser Punkt auf einer Quadrantenhalbierenden muss gelten:

$$y_{s,1} = +x_s \qquad \text{oder} \qquad y_{s,1} = -x_s$$

$\Rightarrow$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2 - 1}{a_1 - 1} \qquad \text{oder} \qquad \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2 + 1}{a_1 + 1}$$

Sowie:

$$y_{s,2} = +x_s \qquad \text{oder} \qquad y_{s,2} = -x_s$$

$\Rightarrow$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2 - 1}{a_1 - 1} \qquad \text{oder} \qquad \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2 + 1}{a_1 + 1}$$

- Der Abstand zu einer Quadrantenhalbierenden ist gesucht. Die Lotrechte auf dieser ist definiert.

$$y_{l,1} = (+1) \cdot (x - x_s) + y_s \qquad \text{oder} \qquad y_{l,2} = (-1) \cdot (x - x_s) + y_s$$

$\Rightarrow$

$$y_{l,1} = +x_l - x_s + y_s \qquad \text{oder} \qquad y_{l,2} = -x_l + x_s + y_s$$

- Schnittpunkt $P_l\left(x_l, y_l\right)$ mit dieser:

$$+x_l = x_l - x_s + y_s \qquad\qquad +x_l = -x_l + x_s + y$$

oder

$$-x_l = x_l - x_s + y_s \qquad\qquad -x_l = -x_l + x_s + y_s$$

$\Rightarrow$

$$y_s = x_s \qquad\qquad x_{l;2} = \frac{x_s + y_s}{2}$$

oder

$$x_{l;1} = \frac{x_s - y_s}{2} \qquad\qquad y_s = -x_s$$

$\Rightarrow$

$$y_{l,1} = \frac{y_s - x_s}{2} \qquad \text{oder} \qquad y_{l,2} = \frac{x_s + y_s}{2}$$

$\Rightarrow$

$$P_{l,1}\left(\frac{x_s - y_s}{2}, \frac{y_s - x_s}{2}\right) \qquad \text{oder} \qquad P_{l,2}\left(\frac{x_s + y_s}{2}, \frac{y_s + x_s}{2}\right)$$

- Der Abstand zwischen $P_s\left(x_s, y_s\right)$ und $P_l\left(x_l, y_l\right)$:

$$L_1 = \sqrt{\left(x_s - x_{l,1}\right)^2 + \left(y_s - y_{l,1}\right)^2} \qquad \text{oder} \qquad L_2 = \sqrt{\left(x_s - x_{l,2}\right)^2 + \left(y_s - y_{l,2}\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$L_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left|x_s - y_s\right| \qquad \text{oder} \qquad L_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left|x_s + y_s\right|$$

$\Rightarrow$

$$L_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left|\frac{b_2 \cdot (1 - a_1) - b_1 \cdot (1 - a_2)}{a_1 - a_2}\right|$$

oder

$$L_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left| \frac{b_2 \cdot (1 + a_1) - b_1 \cdot (1 + a_2)}{a_1 - a_2} \right|$$

Gesucht ist der Fall, dass $L = 0$ gilt:

$$b_2 \cdot (1 - a_1) - b_1 \cdot (1 - a_2) = 0 \qquad \text{oder} \qquad b_2 \cdot (1 + a_1) - b_1 \cdot (1 + a_2) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{1 - a_2}{1 - a_1} \qquad \text{oder} \qquad \frac{b_2}{b_1} = \frac{1 + a_2}{1 + a_1}$$

Was mit obiger Aussage übereinstimmt.

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{1 - \rho_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}}{1 - \rho_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}} \qquad \text{oder} \qquad \frac{b_2}{b_1} = \frac{1 + \rho_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}}{1 + \rho_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{\sigma_y - \rho_{xy} \cdot \sigma_x}{\sigma_x - \rho_{xy} \cdot \sigma_y} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \qquad \text{oder} \qquad \frac{b_2}{b_1} = \frac{\sigma_y + \rho_{xy} \cdot \sigma_x}{\sigma_x + \rho_{xy} \cdot \sigma_y} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

- Damit ist ein Gütekriterium β definiert.

$$\frac{1 + a_2}{1 + a_1} - \frac{1 - a_2}{1 - a_1} = \beta$$

$\Rightarrow$

$$\beta = 2 \cdot \frac{a_2 - a_1}{1 - a_1^2}$$

- Für den Fall, dass gilt $a_1 \perp a_2$, lässt sich $\beta_\perp$ berechnen.

$$\beta_\perp = -\frac{2}{a_1} \cdot \frac{1 + a_1^2}{1 - a_1^2} = 2 \cdot a_2 \cdot \frac{a_2^2 + 1}{a_2^2 - 1}$$

Dann lässt sich β als $\beta_{K\perp}$ [3] auf den Idealwert 1 zentrieren.

$$\beta_{K\perp} = a_2 \cdot \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1^2}$$

- Für den Fall, dass gilt $a_1 \cdot a_2 = 1$, lässt sich $\beta_\vee$ berechnen.

$$\beta_\vee = \frac{2}{a_1} = 2 \cdot a_2$$

Dann lässt sich β als $\beta_{K\vee}$ [4] auf den Idealwert 1 zentrieren.

$$\beta_{K\vee} = a_1 \cdot \frac{a_2 - a_1}{1 - a_1^2}$$

[3] Als 3D-Darstellung auf dem Deckblatt abgebildet.
[4] sprich: **bek**ah**v**au

2.3 Winkelhalbierende y_w

- In engen Grenzen kann man eine Berechnungsgrundlage der Winkelhalbierenden y_w zwischen y_1 und y_2 angeben.

$$\tan\alpha_1 = a_1 \qquad \tan\alpha_2 = a_2$$

$\Rightarrow$

$$a_w = \tan\gamma = \tan\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} = \frac{\tan(\alpha_1+\alpha_2)}{1+\sqrt{1+\tan^2(\alpha_1+\alpha_2)}}$$

Mit:

$$\tan(\alpha_1+\alpha_2) = \frac{a_1+a_2}{1-a_1\cdot a_2}$$

Gültig bei:

$$a_1\cdot a_2 < 1 \qquad -\frac{\pi}{2} < \alpha_1+\alpha_2 < +\frac{\pi}{2}$$

Damit ist die Winkelhalbierende vollständig definiert.

$$y_w = a_w\cdot(x-x_s)+y_s$$

$\Rightarrow$

$$y_w = a_w\cdot x + \underbrace{y_s - a_w\cdot x_s}_{b_w}$$

Wobei b_w die Inhomogenität darstellt.

2.4 Schnittpunkt P_w

- Gesucht sind die Schnittpunkte ${}_1P_w$ und ${}_2P_w$ der Winkelhalbierenden y_w mit den Quadrantenhalbierenden $y = +x$ und $y = -x$.

$$+{}_1x_w = a_w \cdot ({}_1x_w - x_s) + y_s$$

$\Rightarrow$

$${}_1x_w = +\frac{y_s - a_w \cdot x_s}{1 - a_w} \qquad {}_1y_w = +\frac{y_s - a_w \cdot x_s}{1 - a_w}$$

$\Rightarrow$

$${}_1x_w = +\frac{b_w}{1 - a_w} \qquad {}_1y_w = +\frac{b_w}{1 - a_w}$$

Sowie:

$$-{}_2x_w = a_w \cdot ({}_2x_w - x_s) + y_s$$

$\Rightarrow$

$${}_2x_w = -\frac{y_s - a_w \cdot x_s}{1 + a_w} \qquad {}_2y_w = +\frac{y_s - a_w \cdot x_s}{1 + a_w}$$

$\Rightarrow$

$${}_2x_w = -\frac{b_w}{1 + a_w} \qquad {}_2y_w = +\frac{b_w}{1 + a_w}$$

Damit ist das Produkt $F_1 = {}_1x_w \cdot {}_1y_w$ im Grundzustand positiv und $F_2 = {}_2x_w \cdot {}_2y_w$ negativ.

2.5 Fehlerfläche F

- Gegeben ist eine Fehlerfläche F.

$$F = F_1 + F_2$$

$\Rightarrow$

$$F = \frac{(y_s - a_w \cdot x_s)^2}{(1 - a_w)^2} - \frac{(y_s - a_w \cdot x_s)^2}{(1 + a_w)^2}$$

$\Rightarrow$

$$F = \frac{b_w^2}{(1 - a_w)^2} - \frac{b_w^2}{(1 + a_w)^2}$$

Diese Fläche F soll im Betrag minimiert werden.

F wird Null dann, wenn:

- Die Zähler Null werden

$$b_w = 0 \rightarrow {}_0a_w = \frac{y_s}{x_s}$$

Die Winkelhalbierende y_w läuft durch den Koordinatenursprung.

$${}_0y_w = \frac{y_s}{x_s} \cdot (x - x_s) + y_s$$

$\Rightarrow$

$${}_0y_w = \frac{y_s}{x_s} \cdot x = {}_0a_w \cdot x$$

- Die Nenner Eins werden

$$a_w = 0$$

$\Rightarrow$

$$\tan\gamma = 0$$

$\Rightarrow$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$\tan\alpha_1 = -\tan\alpha_2$$

$\Rightarrow$

$$a_1 = -a_2$$

- F ein lokales Minimum annimmt[5]

Es gibt ein reelwertiges Extrema bei:

$${}_Ea_w = \frac{\sqrt[3]{T} + y_s}{x_s} + \frac{y_s^2 - x_s^2}{x_s \cdot \sqrt[3]{T}}$$

Mit:

$$T = (y_s - x_s) \cdot (x_s + y_s)^2$$

[5] Praktisch uninteressant.

2.6 Idealfall

- Die Inhomogenität b_w

Aus den vorangegangenen Abschnitten gilt ideal:

$$b_w = 0$$

$\Rightarrow$

$$y_s = x_s$$

Dann, wenn:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{1 - a_2}{1 - a_1} \qquad \frac{b_2}{b_1} = \frac{1 + a_2}{1 + a_1}$$

- Der Anstieg a_w

Aus den vorangegangenen Abschnitten gilt ideal:

$$a_w = 1$$

$\Rightarrow$

$$\tan\gamma = 1 = \tan\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\cot\alpha_1 = \tan\alpha_2$$

$\Rightarrow$

$$a_1 \cdot a_2 = 1$$

$\Rightarrow$

$$\rho_{xy}^2 = 1$$

- Zusammenfassung beider:

$$\frac{b_1}{b_2} = -a_1 \qquad \frac{b_2}{b_1} = -a_2$$

Oder:

$$\frac{b_1}{b_2} = +a_1 \qquad \frac{b_2}{b_1} = +a_2$$

$\Rightarrow$

$$\frac{b_1}{b_2} = \pm\rho_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \qquad \frac{b_2}{b_1} = \pm\rho_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

- Für betreffende β:

$$a_1 \cdot a_2 = 1$$

$\Rightarrow$

$$\beta_0 = 0$$

$\Rightarrow$

$$\beta = \frac{2}{a_1} = 2 \cdot a_2$$

$\Rightarrow$

$$\beta_\vee = \frac{2}{a_1} = 2 \cdot a_2$$

$\Rightarrow$ [6]

$$\beta_{K\vee} = 1$$

[6] Zu beachten ist der Sonderfall $|a_1| = 1$ dann gilt:

$$\lim_{\substack{a_1 \to +1 \\ a_2 = +1}} \beta_{K\vee} = \lim_{\substack{a_1 \to -1 \\ a_2 = -1}} \beta_{K\vee} = \frac{1}{2}$$

3 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Der Schnittwinkel zwischen y_1 und y_2.

$$\tan\alpha = \left|\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 \cdot a_2}\right| = \left|\frac{\rho_{xy}}{1+\rho_{xy}^2} \cdot \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{\sigma_x \cdot \sigma_y}\right|$$

- Der Schnittpunkt $P_s\left(x_s, y_s\right)$ beider Funktionen.

$$x_s = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$$

$\Rightarrow$

$$y_{s,1} = a_1 \cdot \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} + b_1 \qquad \text{oder} \qquad y_{s,2} = a_2 \cdot \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} + b_2$$

- Das Gütekriterium β.

$$\beta = 2 \cdot \frac{a_2 - a_1}{1 - a_1^2} = 2 \cdot \rho_{xy} \cdot \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{\sigma_x^2 - \rho_{xy}^2 \cdot \sigma_y^2} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 2 \cdot a_2 \cdot \frac{\sigma_x^2 - \sigma_y^2}{\sigma_x^2 - \rho_{xy}^2 \cdot \sigma_y^2}$$

Für $\rho_{xy} = \pm 1$:

$$\beta = 2 \cdot a_2$$

$\Rightarrow$

$$\beta_0 = -2 \cdot a_1 \cdot \frac{1 - a_1 \cdot a_2}{1 - a_1^2}$$

$\Rightarrow$

$$|\beta_0| \propto \left|a_1 \cdot \frac{1 - a_1 \cdot a_2}{1 - a_1^2}\right| = \left|\rho_{xy} \cdot \frac{1 - \rho_{xy}^2}{1 - \rho_{xy}^2 \cdot \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}}\right|$$

Die Forderung $\beta_0 = 0$ ist erfüllt für $a_1 = 0$ [7] und $a_1 \cdot a_2 = 1$.

- Die Winkelhalbierende y_w.

$$y_w = a_w \cdot (x - x_s) + y_s$$

Mit:

$$a_w = \tan\gamma = \tan\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{\tan\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)}{1 + \sqrt{1 + \tan^2\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)}}$$

Mit:[8]

$$\tan\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) = \frac{a_1 + a_2}{1 - a_1 \cdot a_2} = \frac{\rho_{xy}}{1 - \rho_{xy}^2} \cdot \frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = D \cdot E$$

Unter engen Randbedingungen.

- Die Winkelhalbierende ${}_0y_w$ ohne Inhomogenität.

$${}_0y_w = \frac{y_s}{x_s} \cdot x = {}_0a_w \cdot x$$

- Idealbedingungen.

$$a_1 \cdot a_2 = 1 \qquad \frac{b_1}{b_2} = -a_1 \qquad \frac{b_2}{b_1} = -a_2$$

Oder:

$$a_1 \cdot a_2 = 1 \qquad \frac{b_1}{b_2} = +a_1 \qquad \frac{b_2}{b_1} = +a_2$$

$\Rightarrow$

$$\rho_{xy}^2 = 1 \qquad \frac{b_1}{b_2} = \pm\rho_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \qquad \frac{b_2}{b_1} = \pm\rho_{xy} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

[7] Praktisch uninteressant.
[8] Term **D** und **E** im Anhang grafisch dargestellt

Sowie:

$$\beta_0 = 0$$

$\Rightarrow$ [9]

$$\beta_{K\vee} = 1$$

[9] Zu beachten ist der Sonderfall $|a_1| = 1$ dann gilt:

$$\lim_{\substack{a_1 \to +1 \\ a_2 = +1}} \beta_{K\vee} = \lim_{\substack{a_1 \to -1 \\ a_2 = -1}} \beta_{K\vee} = \frac{1}{2}$$

4 Beispiel - Realfall

Realfall

- **Basiswerte nichtinvertiert**

x_i	y_i	i	$x_i \cdot x_i$	$x_i \cdot y_i$	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$
128	100	1	16 384	12 800	321 489	121 627
256	250	2	65 536	64 000	192 721	39 502
440	510	3	193 600	224 400	65 025	3 752
640	160	4	409 600	102 400	3 025	83 376
768	400	5	589 824	307 200	5 329	2 377
896	520	6	802 816	465 920	40 401	5 077
1 152	750	7	1 327 104	864 000	208 849	90 752
1 280	900	8	1 638 400	1 152 000	342 225	203 627
5 560	3 590	8	5 043 264	3 192 720	1 179 064	550 090

Aus den obigen Zahlen folgt:

$$a_1 = \frac{\{x \cdot y\} \cdot n - \{x\} \cdot \{y\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{3192720 \cdot 8 - 5560 \cdot 3590}{5043264 \cdot 8 - 5560^2} = \frac{5581360}{9432512} = 0,5928$$

$\Rightarrow$

$$b_1 = \frac{\{x \cdot x\} \cdot \{y\} - \{x \cdot y\} \cdot \{x\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{5043264 \cdot 3590 - 3192720 \cdot 5560}{5043264 \cdot 8 - 5560^2} = \frac{353794560}{9432512} = 37,5079$$

$\Rightarrow$

$$_1\sigma_x^2 = \frac{\left\{(x - x_M)^2\right\}}{n} = \frac{1179064}{8} = 147383$$

$\Rightarrow$

$$_1\sigma_x = 383,90$$

$\Rightarrow$

$$_1\sigma_y^2 = \frac{\left\{(y - y_M)^2\right\}}{n} = \frac{550090}{8} = 68761,25$$

$\Rightarrow$

$$_1\sigma_y = 262,22$$

$\Rightarrow$

$$_1\rho_{xy} = a_1 \cdot \frac{_1\sigma_x}{_1\sigma_y} = 0,5928 \cdot \frac{383,90}{262,22} = 0,866$$

- **Basiswerte invertiert**

x_i	y_i	i	$x_i \cdot x_i$	$x_i \cdot y_i$	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$
100	128	1	10 000	12 800	121 627	321 489
250	256	2	62 500	64 000	39 502	192 721
510	440	3	260 100	224 400	3 752	65 025
160	640	4	25 600	102 400	83 376	3 025
400	768	5	160 000	307 200	2 377	5 329
520	896	6	270 400	465 920	5 077	40 401
750	1 152	7	562 500	864 000	90 752	208 849
900	1 280	8	810 000	1 152 000	203 627	342 225
3 590	5 560	8	2 161 100	3 192 720	550 090	1 179 064

Aus den obigen Zahlen folgt:

$$a_2 = \frac{\{x \cdot y\} \cdot n - \{x\} \cdot \{y\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{3192720 \cdot 8 - 3590 \cdot 5560}{2161100 \cdot 8 - 3590^2} = \frac{5581360}{4400700} = 1,2683$$

$\Rightarrow$

$$b_2 = \frac{\{x \cdot x\} \cdot \{y\} - \{x \cdot y\} \cdot \{x\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{2161100 \cdot 5560 - 3192720 \cdot 3590}{261100 \cdot 8 - 3590^2} = \frac{553851200}{4400700} = 125,855$$

$\Rightarrow$

$$_2\sigma_x^2 = \frac{\left\{(x - x_M)^2\right\}}{n} = \frac{550090}{8} = 68761,25$$

$\Rightarrow$

$$_2\sigma_x = 262,22$$

$\Rightarrow$

$$_2\sigma_y^2 = \frac{\left\{(y - y_M)^2\right\}}{n} = \frac{1179064}{8} = 147383$$

$\Rightarrow$

$$_2\sigma_y = 383,90$$

$\Rightarrow$

$$_2\rho_{xy} = a_2 \cdot \frac{_2\sigma_x}{_2\sigma_y} = 1,2683 \cdot \frac{262,22}{383,90} = 0,866$$

- **Erweiterte Werte**

$$\rho_{xy} = {}_1\rho_{xy} = {}_2\rho_{xy} = 0,866$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_x = {}_1\sigma_x = {}_2\sigma_y = 383,90$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_y = {}_1\sigma_y = {}_2\sigma_x = 262,22$$

$\Rightarrow$

$$\tan\alpha = \left|\frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 \cdot a_2}\right| = \left|\frac{0,5928 - 1,2683}{1 + 0,5928 \cdot 1,2683}\right| = 0,3856$$

$\Rightarrow$

$$\beta = 2 \cdot \frac{a_2 - a_1}{1 - a_1^2} = 2 \cdot \frac{1,2683 - 0,5982}{1 - 0,5928^2} = 2,083$$

$\Rightarrow$

$$x_s = -130,788 \qquad y_s = -40,023$$

$\Rightarrow$

$$\tan(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{0,5928 + 1,2683}{1 - 0,5928 \cdot 1,2683} = 7,5$$

$\Rightarrow$

$$a_w = \tan\gamma = \tan\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{7,5}{1 + \sqrt{1 + 7,5^2}} = 0,8755$$

Wobei:

$$a_1 \cdot a_2 = 0,5928 \cdot 1,2683 = 0,7518 < 1$$

$$-1,5707 = -\frac{\pi}{2} < \arctan 7,5 = 1,438 < +\frac{\pi}{2} = +1,5707$$

$\Rightarrow$

$$y_w = 0,8755 \cdot x + 74,482$$

$\Rightarrow$

$${}_0y_w = \frac{y_s}{x_s} \cdot x = \frac{-40,023}{-130,788} \cdot x = 0,306 \cdot x = {}_0a_w \cdot x$$

$$a_1 \cdot a_2 = 1 \qquad \frac{b_1}{b_2} = a_1 \qquad \frac{b_2}{b_1} = a_2$$

$\Rightarrow$

$$0,752 <> 1 \qquad 0,298 <> 0,5982 \qquad 3,355 <> 1,2683$$

Sowie:

$$\rho_{xy}^2 = 0,75 \neq 1$$

Und:

$$\beta_0 = 2 \cdot 0,5928 \cdot \frac{1 - 0,5928 \cdot 1,2683}{1 - 0,5928^2} = -0,454 \neq 0$$

$\Rightarrow$

$$\beta_\perp = \left(-\frac{2}{0,5928} \cdot \frac{1 + 0,5928^2}{1 - 0,5928^2} \neq 2 \cdot 1,2683 \cdot \frac{1,2683^2 + 1}{1,2683^2 - 1}\right) = (-7,030 \neq 10,873)$$

$\Rightarrow$

$$\beta_{K\perp} = 1,2683 \cdot \frac{1,2683 - 0,5928}{1 + 0,5928^2} = 0,634$$

$\Rightarrow$

$$\beta_\vee = \left(\frac{2}{0,5928} \neq 2 \cdot 1,2683\right) = (3,374 \neq 2,537)$$

$\Rightarrow$

$$\beta_{K\vee} = 0,5928 \cdot \frac{1,2683 - 0,5928}{1 - 0,5928^2} = 0,617 \neq 1$$

Zum Schluss eine grafische Darstellung des Beispiels.

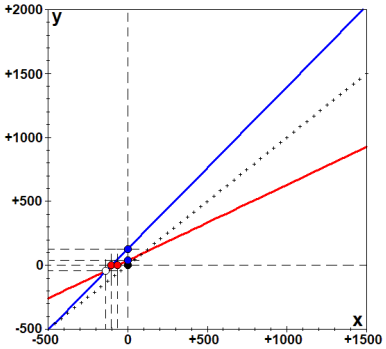


Abbildung des Beispiels mit markanten Punkten dargestellt.
○ Schnittpunkt bilaterale Regressionsgeraden
● Schnittpunkte mit der x-Achse
● Schnittpunkte mit der y-Achse
● Koordinatenursprung

5 Beispiel - Idealfall

Idealfall

- **Basiswerte nichtinvertiert**

x_i	y_i	i	$x_i \cdot x_i$	$x_i \cdot y_i$	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$
1	-0,5	1	1	-0,5	1	0,25
2	0	2	4	0	0	0
3	+0,5	3	9	+1,5	1	0,25
6	0	3	14	+1	2	0,5

Aus den obigen Zahlen folgt:

$$a_1 = \frac{\{x \cdot y\} \cdot n - \{x\} \cdot \{y\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{1 \cdot 3 - 6 \cdot 0}{14 \cdot 3 - 6^2} = \frac{3}{6} = 0,5$$

$\Rightarrow$

$$b_1 = \frac{\{x \cdot x\} \cdot \{y\} - \{x \cdot y\} \cdot \{x\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{14 \cdot 0 - 1 \cdot 6}{14 \cdot 3 - 6^2} = \frac{-6}{6} = -1$$

$\Rightarrow$

$${}_1\sigma_x^2 = \frac{\left\{(x - x_M)^2\right\}}{n} = \frac{2}{3} = 0,667$$

$\Rightarrow$

$${}_1\sigma_x = 0,8165$$

$\Rightarrow$

$${}_1\sigma_y^2 = \frac{\left\{(y - y_M)^2\right\}}{n} = \frac{0,5}{3} = 0,167$$

$\Rightarrow$

$${}_1\sigma_y = 0,4082$$

$\Rightarrow$

$${}_1\rho_{xy} = a_1 \cdot \frac{{}_1\sigma_x}{{}_1\sigma_y} = 0,5 \cdot \frac{0,8165}{0,4082} = 1$$

- **Basiswerte invertiert**

x_i	y_i	i	$x_i \cdot x_i$	$x_i \cdot y_i$	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$
-0,5	1	1	0,25	-0,5	0,25	1
0	2	2	0	0	0	0
+0,5	3	3	0,25	+1,5	0,25	1
0	6	3	0,5	+1	0,5	2

Aus den obigen Zahlen folgt:

$$a_2 = \frac{\{x \cdot y\} \cdot n - \{x\} \cdot \{y\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{1 \cdot 3 - 0 \cdot 6}{0,5 \cdot 3 - 0^2} = \frac{3}{1,5} = 2$$

$\Rightarrow$

$$b_2 = \frac{\{x \cdot x\} \cdot \{y\} - \{x \cdot y\} \cdot \{x\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{0,5 \cdot 6 - 1 \cdot 0}{0,5 \cdot 3 - 0^2} = \frac{3}{1,5} = 2$$

$\Rightarrow$

$${}_2\sigma_x^2 = \frac{\left\{(x - x_M)^2\right\}}{n} = \frac{0,5}{3} = 0,167$$

$\Rightarrow$

$${}_2\sigma_x = 0,4082$$

$\Rightarrow$

$${}_2\sigma_y^2 = \frac{\left\{(y - y_M)^2\right\}}{n} = \frac{2}{3} = 0,667$$

$\Rightarrow$

$${}_2\sigma_y = 0,8165$$

$\Rightarrow$

$${}_2\rho_{xy} = a_2 \cdot \frac{{}_2\sigma_x}{{}_2\sigma_y} = 2 \cdot \frac{0,4082}{0,8165} = 1$$

- **Erweiterte Werte**

$$\rho_{xy}^2 = 1^2 = 1$$

$\Rightarrow$

$$a_1 \cdot a_2 = 0,5 \cdot 2 = 1$$

$\Rightarrow$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{2} = -0,5 = -a_1 \qquad \frac{b_2}{b_1} = \frac{2}{-1} = -2 = -a_2$$

$\Rightarrow$

$$\beta = 2 \cdot \frac{2 - 0,5}{1 - 0,5^2} = 4$$

Und:

$$\beta_\perp = \left(-\frac{2}{0,5} \cdot \frac{1 + 0,5^2}{1 - 0,5^2} \neq 2 \cdot 2 \cdot \frac{2^2 + 1}{2^2 - 1} \right) = (-6,667 \neq 6,667)$$

$\Rightarrow$

$$\beta_{K\perp} = 2 \cdot \frac{2 - 0,5}{1 + 0,5^2} = 2,4$$

Sowie:

$$\beta_\vee = \left(\frac{2}{0,5} = 2 \cdot 2 \right) = 4$$

Daher:

$$\beta_{K\vee} = 0,5 \cdot \frac{2 - 0,5}{1 - 0,5^2} = 1$$

Letztendlich:

$$\beta_0 = -2 \cdot 0,5 \cdot \frac{1 - 0,5 \cdot 2}{1 - 0,5^2} = 0$$

Zum Schluss eine grafische Darstellung des Beispiels.

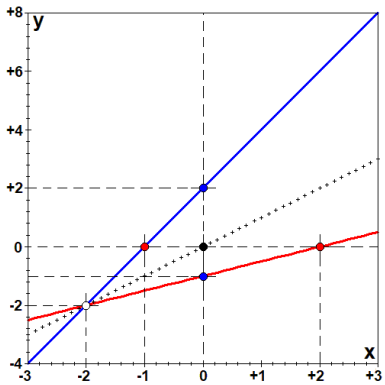


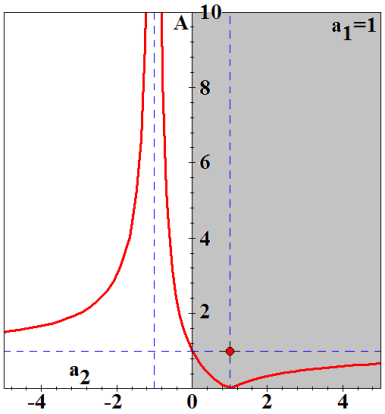
Abbildung des Beispiels mit markanten Punkten dargestellt.
○ Schnittpunkt bilaterale Regressionsgeraden
● Schnittpunkte mit der x-Achse
● Schnittpunkte mit der y-Achse
● Koordinatenursprung

6 Anhang

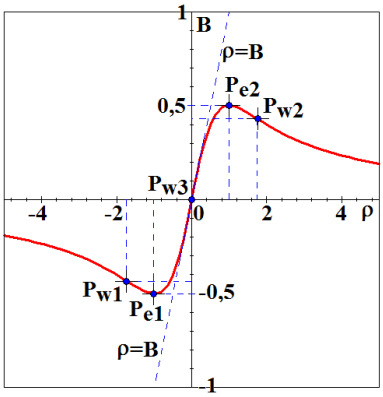
Anhang

6.1 Allgemeine Terme

- **Term** A, grau der Bereich für $a_1 \cdot a_2 > 0$, Punkt rot der Idealfall $a_1 \cdot a_2 = 1$



- **Term** B



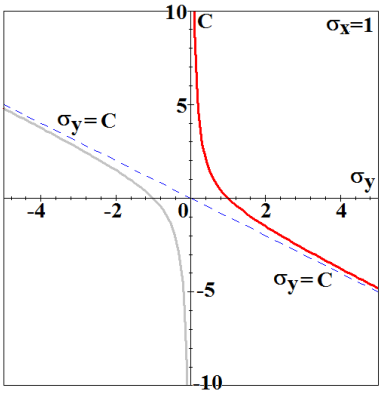
$\Rightarrow$

$$P_{e,1} = \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \qquad P_{e,2} = \left(+1; +\frac{1}{2}\right)$$

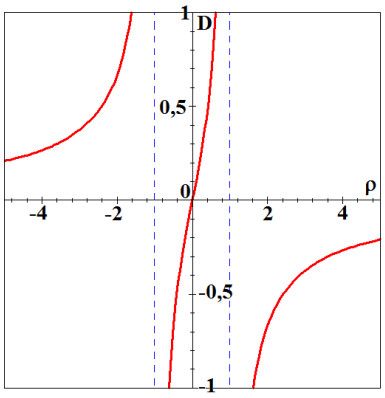
$\Rightarrow$

$$P_{w,1} = \left(-\sqrt{3}; -\frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}\right) \qquad P_{w,3} = (0; 0) \qquad P_{w,2} = \left(+\sqrt{3}; +\frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}\right)$$

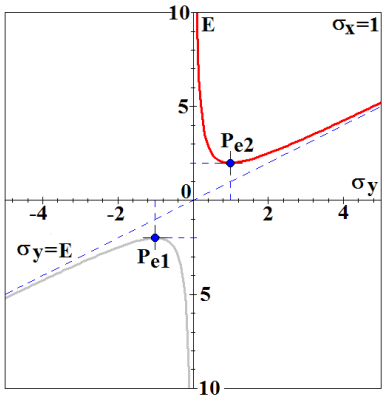
- **Term** C



- **Term** D



- **Term** E



$\Rightarrow$

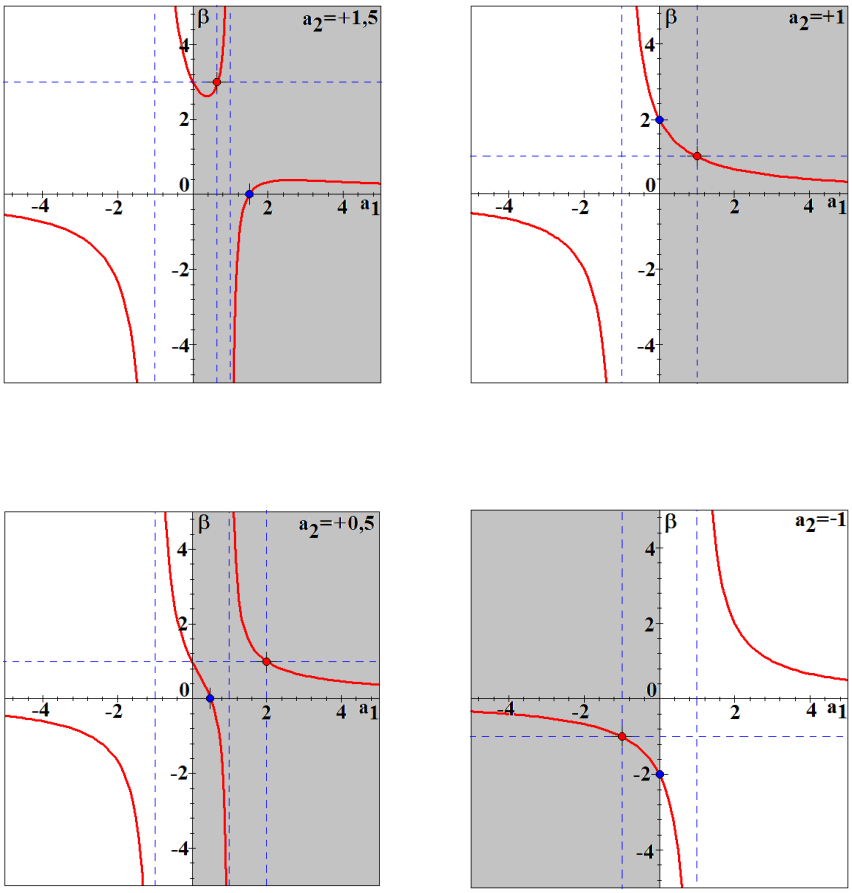
$$P_{e,1} = (-1; -2) \qquad P_{e,2} = (+1; +2)$$

6.2 Gütekriterium β

Das Gütekriterium β für ausgewählte a_2-Werte. Grau der Bereich für $a_1 \cdot a_2 > 0$, Punkt rot der Idealfall $a_1 \cdot a_2 = 1$

$$\beta = 2 \cdot \frac{a_2 - a_1}{1 - a_1^2}$$

$\Rightarrow$

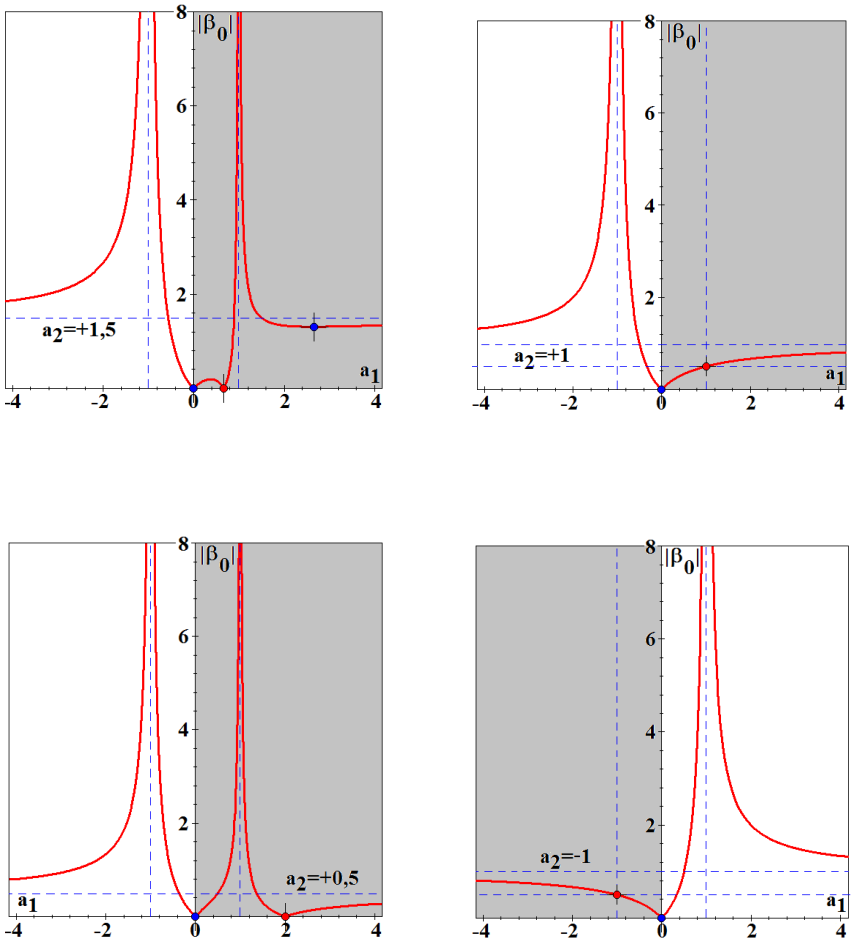


6.3 Gütekriterium $|\beta_0|$

Das Gütekriterium $|\beta_0|$ für ausgewählte a_2-Werte. Grau der Bereich für $a_1 \cdot a_2 > 0$, Punkt rot der Idealfall $a_1 \cdot a_2 = 1$

$$|\beta_0| \propto \left| a_1 \cdot \frac{1 - a_1 \cdot a_2}{1 - a_1^2} \right|$$

$\Rightarrow$

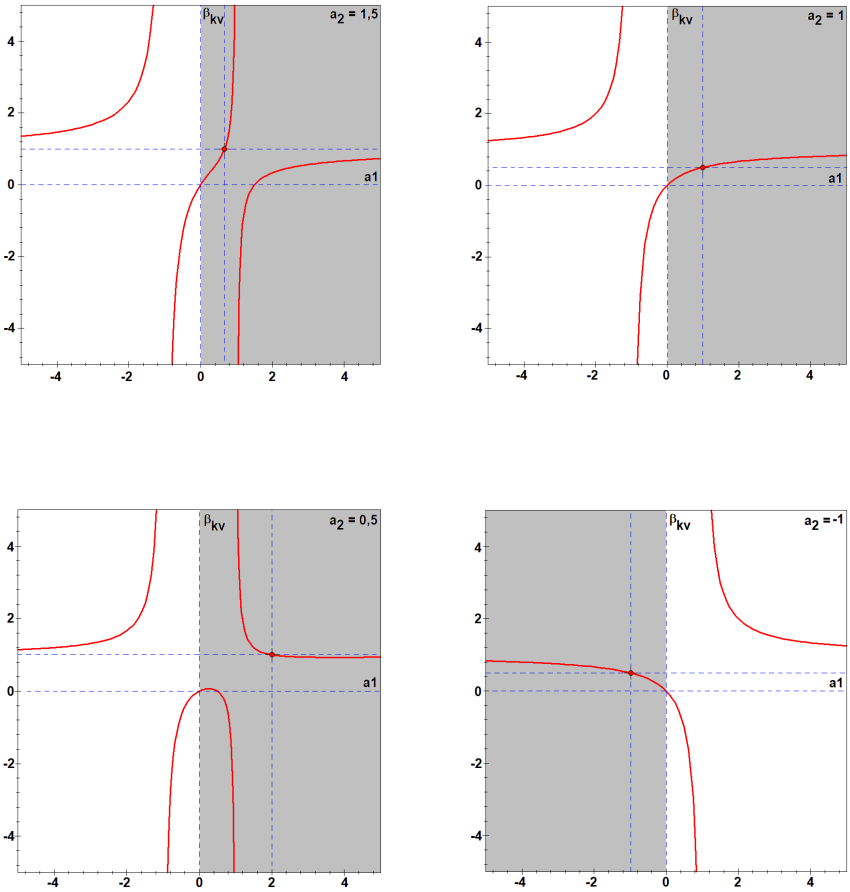


6.4 Gütekriterium $\beta_{K\vee}$

Das Gütekriterium $\beta_{K\vee}$ für ausgewählte a_2-Werte[10]. Grau der Bereich für $a_1 \cdot a_2 > 0$, Punkt rot der Idealfall $a_1 \cdot a_2 = 1$

$$\beta_{K\vee} = a_1 \cdot \frac{a_2 - a_1}{1 - a_1^2}$$

$\Rightarrow$



LaTeX 2_ε

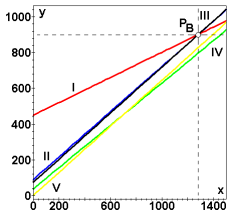
[10] Man beachte den Fall $|a_2| = 1$.

$$\lim_{\substack{a_1 \to +1 \\ a_2 = +1}} \beta_{K\vee} = \lim_{\substack{a_1 \to -1 \\ a_2 = -1}} \beta_{K\vee} = \frac{1}{2}$$

$$\oiint$$

3.3.4 Reduzierte lineare Regression - Fehlen von Anstieg oder Inhomogenität, Hinzufügen eines definierten Punktes

Reduzierte Lineare Regression



Fehlen von Anstieg oder Inhomogenität
Hinzufügen eines definierten Punktes

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 10. Juni 2017 – Letzte Revision: 8. November 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Lineare Regression ohne Anstieg **3**
1.1 Nach der Methode der kleinsten Quadrate - MKQ 4
1.2 Nach der Methode der Hauptkomponentenanalyse - HKA 5

2 Lineare Regression ohne Inhomogenität **7**
2.1 Nach der Methode der kleinsten Quadrate - MKQ 8
2.2 Nach der Methode der Hauptkomponentenanalyse - HKA 9

3 Lineare Regression mit definierten Punkt **11**
3.1 Ermittlung der Inhomogenität aus Anstieg 12
3.2 Ermittlung des Anstiegs aus Inhomogenität 13

4 Beispiel einer reduzierten Linearen Regression **15**

Literatur

[Dipa] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten über die Hauptkomponentenanalyse.

[Dipb] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. (Polynom)Regression von Datenpunkten.

---

1 Lineare Regression ohne Anstieg

Ziel ist die Herleitung der Durchführung einer Linearen Regression **ohne Anstieg** a. So gilt allgemein für eine lineare Funktion:

$$y = a \cdot x + b$$

$\Rightarrow$

$$y = b$$

1.1 Nach der Methode der kleinsten Quadrate - MKQ

Ziel ist es, die Fehlerfunktion F zu minimieren. Die Herleitung von F ist unter [Dipa] nachzulesen.

$$F(x,a,b) = \left\{y^2\right\} - 2a \cdot \{xy\} - 2b \cdot \{y\} + 2ab \cdot \{x\} + a^2 \left\{x^2\right\} + n \cdot b^2$$

Diese vereinfacht sich für ein $a = 0$ beträchtlich.

$$F(x,b) = \left\{y^2\right\} - 2b \cdot \{y\} + n \cdot b^2$$

Ein Extrema wird gesucht um später ein Minimum nachweisen zu können.

$$\frac{d}{db} F(x,b) = -2 \cdot \{y\} + 2 \cdot n \cdot b = 0$$

$\Rightarrow$

$$b = \frac{\{y\}}{n}$$

Der Nachweis, dass ein Minimum gefunden wurde.

$$\frac{d^2}{db^2} F(x,b) = 2 \cdot n > 0$$

Das Minimum wurde gefunden und die Regression ist beendet.

$$y = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$$

1.2 Nach der Methode der Hauptkomponentenanalyse - HKA

Aus der HKA ist eine Darstellung der linearen Funktion der Hauptachse bekannt.

$$y = \underbrace{\frac{V_{YY} - \lambda}{C}}_{a} \cdot x + \underbrace{\bar{y} - \frac{V_{YY} - \lambda}{C} \cdot \bar{x}}_{b}$$

Die Herleitung und Bedeutung ist nachzulesen unter [Dipb].

Es soll $a = 0$ gesetzt werden.

$$\frac{V_{YY} - \lambda}{C} = 0$$

$\Rightarrow$

$$y = \bar{y} = \frac{\{y\}}{n}$$

Damit ist b bekannt und die Regression beendet.

$$y = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$$

2 Lineare Regression ohne Inhomogenität

Ziel ist die Herleitung der Durchführung einer Linearen Regression **ohne Inhomogenität** b. So gilt allgemein für eine lineare Funktion:

$$y = a \cdot x + b$$

$\Rightarrow$

$$y = a \cdot x$$

2.1 Nach der Methode der kleinsten Quadrate - MKQ

Ziel ist es, die Fehlerfunktion F zu minimieren. Die Herleitung von F ist unter [Dipa] nachzulesen.

$$F(x,a,b) = \left\{y^2\right\} - 2a \cdot \{xy\} - 2b \cdot \{y\} + 2ab \cdot \{x\} + a^2 \left\{x^2\right\} + n \cdot b^2$$

Diese vereinfacht sich für ein $b = 0$ beträchtlich.

$$F(x,a) = \left\{y^2\right\} - 2a \cdot \{xy\} + a^2 \left\{x^2\right\}$$

Ein Extrema wird gesucht um später ein Minimum nachweisen zu können.

$$\frac{d}{da} F(x,a) = -2 \cdot \{xy\} + 2a \cdot \left\{x^2\right\} = 0$$

$\Rightarrow$

$$a = \frac{\{x \cdot y\}}{\{x \cdot x\}}$$

Der Nachweis, dass ein Minimum gefunden wurde.

$$\frac{d^2}{da^2} F(x,a) = 2 \cdot \left\{x^2\right\} > 0$$

Das Minimum wurde gefunden und die Regression ist beendet.

$$y = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot x$$

2.2 Nach der Methode der Hauptkomponentenanalyse - HKA

Aus der HKA ist eine Darstellung der linearen Funktion der Hauptachse bekannt.

$$y = \underbrace{\frac{V_{YY} - \lambda}{C}}_{a} \cdot x + \underbrace{\bar{y} - \frac{V_{YY} - \lambda}{C} \cdot \bar{x}}_{b}$$

Die Herleitung und Bedeutung ist nachzulesen unter [Dipb].

Es soll $b = 0$ gesetzt werden.

$$\bar{y} - \frac{V_{YY} - \lambda}{C} \cdot \bar{x} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{YY} - \lambda}{C} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$$

Damit ist a bekannt und die Regression beendet.

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \cdot x$$

3 Lineare Regression mit definierten Punkt

Es soll eine Lineare Regression durchgeführt werden, wobei ein Punkt $P_B\left(x_B, y_B\right)$ unbedingt auf der Regressionsgeraden liegen soll. Grundlage für die Funktion sei die Punkt- Richtungs- Form.

$$\frac{y - y_B}{x - x_B} = a'$$

$\Rightarrow$

$$y = \underbrace{a'}_{a} \cdot x + \underbrace{y_B - a' \cdot x_B}_{b}$$

Damit sind zwei Definitionen der gesuchten Regressionsgeraden möglich.

3.1 Ermittlung der Inhomogenität aus Anstieg

Der Anstieg a wird berechnet aus den Daten der Urliste mittels einer Linearen Regression ohne Inhomogenität b. Diese wird berechnet durch:

$$b = y_B - a \cdot x_B$$

$\Rightarrow$

$$y = a \cdot x + b$$

3.2 Ermittlung des Anstiegs aus Inhomogenität

Die Inhomogenität b wird berechnet aus den Daten der Urliste mittels einer Linearen Regression ohne Anstieg a. Diese wird berechnet durch:

$$a = \frac{y_B - b}{x_B}$$

$\Rightarrow$

$$y = a \cdot x + b$$

4 Beispiel einer reduzierten Linearen Regression

Gegeben sind Datenpunkte aus einer Messung (aus [Dipb] und [Dipa]).

i	$\mathbf{X}_i$	$\mathbf{Y}_i$	$\mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_i$	$\mathbf{X}_i \cdot \mathbf{Y}_i$
1	128	100	16 384	12 800
2	256	250	65 536	64 000
3	440	210	193 600	224 400
4	640	160	409 600	102 400
5	768	400	589 824	307 200
6	896	520	802 816	465 920
7	1 152	750	1 327 104	864 000
8	1 280	900	1 638 400	1 152 000
$\sum$	**5 560**	**3 590**	**5 043 264**	**3 192 720**

Laut Festlegung soll der im 1. Quadranten äußerste Punkt unbedingt auf der Regressionsgeraden liegen.

$$P_B = P_8\,(1280; 900)$$

• **Für den Anstieg** $a' = 0$

Es wird zuerst $a' = 0$ gesetzt. Dadurch ist die Inhomogenität b bekannt und a berechenbar.

$$b = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{3590}{8} = 448,75 \qquad \rightarrow \qquad a = \frac{y_B - b}{x_B} = \frac{900 - 448,75}{1280} = 0,3525$$

$\Rightarrow$

$$y_{a'=0} = y_I = 0,3525 \cdot x + 448,75$$

• **Für die Inhomogenität** $b' = 0$ **und MKQ**

Es wird zuerst $b' = 0$ gesetzt. Dadurch ist der Anstieg a bekannt und b berechenbar.

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{3192720}{5043264} = 0,6331 \rightarrow b = y_B - a \cdot x_B = 900 - 0,6331 \cdot 1280 = 89,632$$

$\Rightarrow$

$$y_{MKQ,b'=0} = y_{II} = 0,6331 \cdot x + 89,632$$

• **Für die Inhomogenität** $b' = 0$ **und HKA**

Es wird zuerst $b' = 0$ gesetzt. Dadurch ist der Anstieg a bekannt und b berechenbar.

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} = \frac{3590}{5560} = 0,6457 \quad \rightarrow \quad b = y_B - a \cdot x_B = 900 - 0,6457 \cdot 1280 = 73,504$$

$\Rightarrow$

$$y_{HKA,b'=0} = y_{III} = 0,6457 \cdot x + 73,504$$

• Die Regressionsergebnisse der vollständigen Methoden

Aus [Dipb] und [Dipa] sind die Regressionsfunktionen aus den vollständigen Methoden bekannt.

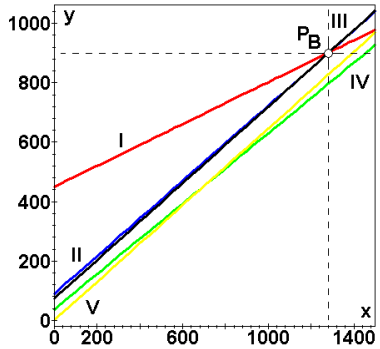
$$y_{MKQ} = y_{IV} = 0,5928 \cdot x + 37,5079$$

Sowie:

$$y_{HKA} = y_V = 0,6457 \cdot x$$

• Grafische Darstellung

Die gefundenen Funktionen grafisch dargestellt.



Dabei stellen folgende Farben die Funktionen y_I, y_{II}, y_{III}, y_{IV}, y_V dar.

LaTeX 2_ε

$$\oiint$$

3.4 Spezielle

3.4.1 Resttermregression einer bilogarithmischen Funktion

Durchführung einer Regression über das Resttermverfahren am Beispiel einer bilogarithmischen Funktion

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 21. November 2014 – Letzte Revision: 28. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Herleitungen **3**
1.1 Einleitung zum Thema . . . 3
1.2 Darstellung der Regressionsfunktion . . . 4
1.2.1 Der Sonderfall $p = q = 1$ . . . 4
1.2.2 Der allgemeine Fall $p \neq 1$ oder $q \neq 1$ . . . 5
1.3 Durchführung der Regression über das Resttermverfahren . . . 6
1.4 Der Restterm als Fehlerwertkontrolle . . . 7
1.5 Der Pearson- Korrelationskoeffizient ersten Grades - $\rho^{(1)}$ . . . 8
1.6 Definition der Koeffizienten . . . 9
1.6.1 Definition von q . . . 9
1.6.2 Definition von p . . . 10
1.6.3 Der Definitionsbereich der Arbeitsgleichung . . . 11
1.6.4 Der Wertebereich der Arbeitsgleichung . . . 12

2 Beispiele für eine Regression **13**
2.1 Beispiel 1 – Große x_i - und y_i - Werte . . . 13
2.2 Beispiel 2 – Kleine x_i - und y_i - Werte . . . 16
2.3 Beispiel 3 – Falsche Voraussetzungen für x_i - und y_i - Werte . . . 20
2.4 Beispiel 4 – Durch Modifikation der Arbeitsgleichung das Beispiel 3 korrigiert . . . 24
2.5 Beispiel – Zusammenfassung der statistischen Werte der Beispiele 1 - 4 . . . 28

3 Zusammenfassung der Berechnungsgrundlagen **29**
3.1 Bilogarithmisch monoton steigend . . . 29
3.2 Bilogarithmisch monoton fallend . . . 30

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Herleitungen

1.1 Einleitung zum Thema

Gegeben ist eine spezielle Funktion, welche die Koeffizienten bzw. Freiheitsgrade p und q besitzt. Diese sollen regressiert werden für eine Anzahl von Datenpunkten $P_i\left(x_i, y_i\right)$. [001]ff.

Für die vorliegende Form der Funktion wurde bisher keine Regressionsvorschrift gefunden. Im Projekt SAW- 2012 war jedoch eine solche Datenbearbeitung notwendig. Daher befasst sich das vorliegende Skript mit der Herleitung eines Algorithmus, welche p und q ermittelt. Im Verlaufe dieser Herleitung muss ein Startwert für die Koeffizienten aufgestellt werden. Daher handelt es sich streng genommen nicht um eine Regression, sondern um einen Kurvenfit mit einer bekannten Wahrscheinlich des Ergebnisses, die exakteste Lösung unter den möglichen Ergebnissen zu sein. Voraussetzung für eine erfolgreiche Ermittlung der Koeffizienten ist, dass vorliegende Datenpaare im Vornherein in der Nähe der noch zu ermittelnden Arbeitsgleichung liegen. Einleitung

Eine Funktion $f\left(x\right)$ sei bekannt aus den Berechnungsmöglichkeiten der Euler- Mascheroni- Konstante γ.

$$\gamma = \int\limits_0^\infty f\left(x\right) \cdot dx = -\int\limits_0^\infty \ln(-\ln x) \cdot dx$$

Grundgedanke $f\left(x\right) = -\ln\left(-\ln x\right)$ regressieren zu können, ist die der Resttermregression. [1]

Eine durch einfache Mittel linear regressierte Funktion $Y = b + a \cdot X$ mit den Koeffizienten a und b lässt die Werte von p und q bekannt werden. Das Vorgehen dahin, wird im weiteren Verlauf erläutert.

[1] Siehe dazu „Das Resttermverfahren“

1.2 Darstellung der Regressionsfunktion

Regressionsfkt.

Gegeben ist die parametrische Beschreibung einer speziellen, uns interessierenden Funktion.

1.2.1 Der Sonderfall $p = q = 1$

$$x = e^{-t} \qquad y = -\ln t$$

Wobei durch Koordinatentransformation $t \to y, x \to t$ bzw. $t \to x, y \to t$ beide Darstellungen ineinander überführt werden können.

$$t = e^{-y} \qquad t = -\ln x$$

$\Rightarrow$

$$-\ln t = y \qquad e^{-t} = x$$

Die Parameterdarstellung insgesamt kann in das kartesische Koordinatensystem überführt werden.

$$t = -\ln x \qquad y = \ln t$$

$\Rightarrow$

$$y = -\ln(-\ln x)$$

1.2.2 Der allgemeine Fall $p \neq 1$ oder $q \neq 1$

Gegeben ist die parametrische Beschreibung einer speziellen, uns interessierenden Funktion.

$$x = p \cdot e^{-q \cdot t} \qquad y = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{t}{p}$$

Wobei durch Koordinatentransformation $t \to y, x \to t$ bzw. $t \to x, y \to t$ beide Darstellungen ineinander überführt werden können.

$$t = p \cdot e^{-q \cdot y} \qquad t = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{x}{p}$$

$\Rightarrow$

$$-\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{t}{p} = y \qquad p \cdot e^{-q \cdot t} = x$$

Die Parameterdarstellung explizit in das kartesische Koordinatensystem überführt werden.

$$t = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{x}{p} \qquad y = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{t}{p}$$

$\Rightarrow$

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln \left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln \frac{x}{p} \right)$$

Letzterer, funktioneller Ausdruck ist die Arbeitsgleichung der vorliegender Regression.

1.3 Durchführung der Regression über das Resttermverfahren

Durchführung

Gegeben sei die lineare Funktion:

$$Z = b + a \cdot X$$

Damit werden die Transformatoren mittels Resttermeinschub aus der zu regressierenden Arbeitsgleichung gebildet.

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{x}{p}\right)$$

$\Rightarrow$

$$e^{-q \cdot y} = \frac{\ln p}{p \cdot q} + \frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{1}{x}$$

Zwischen Term links und Term rechts wird die lineare Funktion als Resttermfunktion eingefügt.

$$e^{-q \cdot y} = Z = b + a \cdot X = \frac{\ln p}{p \cdot q} + \frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{1}{x}$$

Zwischen Z und b wird die Äquivalenzkette aufgebrochen und die sich ergebenden Gleichungen sind die Transformatoren der Urlistwerte.

$$Z = e^{-q^{(a)} \cdot y} \qquad b + a \cdot X = \frac{\ln p^{(a)}}{p^{(a)} \cdot q^{(a)}} + \frac{1}{p^{(a)} \cdot q^{(a)}} \cdot \ln\frac{1}{x}$$

Die Koeffizienten $\widetilde{b}$ und $\widetilde{a}$ können[2] definiert werden über eine lineare Regression zwischen den Werten $b + a \cdot X_i$ und Z_i. Durch Umstellen sind damit die Endwerte von p und q bekannt.

$$b = \frac{\ln p^{(a)}}{p^{(a)} \cdot q^{(a)}} \qquad a = \frac{1}{p^{(a)} \cdot q^{(a)}} > 0 \qquad X = -\ln x$$

$\Rightarrow$

$$p = e^{\frac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}}} \qquad q = \frac{1}{p \cdot \widetilde{a}} = \frac{1}{\widetilde{a}} \cdot e^{-\frac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}}}$$

Um beschriebene Regression überhaupt „starten“ zu können, sind Abschätzung der Startwerte (a) von p und q nötig - setzen des Grafs mittig in das Intervall $0 < x < 1$:

$$p^{(a)} = MAX\,(x_i) + MIN\,(x_i)$$

Für $q^{(a)}$ über die geschätzte Nullstelle x_0

$$0 = y_0 = -\frac{1}{q^{(a)}} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p^{(a)} \cdot q^{(a)}} \cdot \ln\frac{x_0}{p^{(a)}}\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_0 = p^{(a)} \cdot e^{-p^{(a)} \cdot q^{(a)}}$$

$\Rightarrow$

$$q^{(a)} = -\frac{1}{p^{(a)}} \cdot \ln\frac{x_0}{p^{(a)}}$$

Damit ist die Regression durchführbar und abgeschlossen.

[2] Funktionsgleichung der linearen Regression: $Z_i = \widetilde{b} + \widetilde{a} \cdot (b + a \cdot X_i)$

1.4 Der Restterm als Fehlerwertkontrolle

Vorliegende Regression ist fehlerbehaftet. Allein schon die Abschätzung der Nullstelle der Urlistwerte ist unsicher. Daher ist es vorteilhaft eine Ermittlung des zu erwartenden Fehlers durch zu führen. Methoden und Möglichkeiten sind in der Statistik an betreffender Stelle einsehbar. Oftmals sind die dort beschriebenen Vorgehensweisen komplex und zeitaufwändig. Abhilfe und Vereinfachung kann ein Ermitteln des (Gesamt)Restwertes sein. Dieser ist vorliegend allgemein definiert als: Fehlerwert

$$R_i = \frac{b + a \cdot X_i}{Z_i}$$

Die Restwerte werden in das erste und zweite Zentrale Moment überführt, um sie statistisch auswerten zu können. Diese sind definiert durch:

$$ZM^{(k)} = E\left((X-\mu)^k\right) \qquad ZM^{|k|} = E\left(|X-\mu|^k\right)$$

Wobei $E(\cdot)$ der Erwartungswert ist, X die Zufallsvariable darstellt und μ der wahre Mittelwert. Von Interesse ist hier nur das erste und zweite Zentrale Moment. Das dritte (Exzess) und das vierte (Wölbung) Moment ist hier nicht von Belang.

• **Das erste Zentrale Moment:**

Das erste Zentrale Moment ist bewiesenermaßen immer Null. Ist dies nicht der Fall, ist entweder μ falsch oder die Zufallsvariablen sind nicht vollständig bekannt. Der Mittelwert im vorliegenden Fall ist definiert mit $\mu = 1 = R$, was aus der Definition des Restterms erfolgt. Damit ist das erste Zentrale Moment ein Gradmesser der Fehlerhaftigkeit der (Restterm)Regression.

$$ZM^{(1)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (R_i - 1) \to 0$$

• **Das erste Zentrale absolute Moment:**

$$ZM^{|1|} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |R_i - 1| \to 0$$

Hierbei handelt es sich um die mittlere absolute Abweichung bezüglich des Restwertes. Sind der Durchschnitt der einzelnen Restwerte gleich dem Median und sind die einzelnen Restwerte gleichzeitig normalverteilt, muss zusätzlich gelten:

$$ZM^{|1|} = \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot ZM^{(2)}}$$

$\Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{ZM^{(2)}}{\left(ZM^{|1|}\right)^2}} = 1$$

• **Das zweite Zentrale (absolute) Moment:**

Ist laut Definition in der Statistik die Varianz der Zufallsvariablen und damit das Quadrat der Standardabweichung. Wobei das zweite Zentrale und das zweite Zentrale absolute Moment gleiche Ergebnisse liefert.

$$ZM^{(2)} \equiv Var(R_i) \equiv \sigma_i^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (R_i - 1)^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |R_i - 1|^2 \to 0$$

1.5 Der Pearson- Korrelationskoeffizient ersten Grades - $\rho^{(1)}$

Korrelationskoeff.

Ist ermittelbar über den Anstieg a des Restterms.

$$a = \rho^{(1)} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

Mit:

$$a > 0$$

$\Rightarrow$

$$\rho^{(1)} > 0$$

Bedeutet im Konkreten, dass nur positiv linear korrelierende Datenpaare nach vorliegender Vorschrift regressiert werden können. Gegebenenfalls ist dies vorher zu überprüfen.

Daher:

$$0 < \rho^{(1)} \leq +1$$

$\Rightarrow$

$$0 < a \cdot \sigma_X \leq \sigma_Y$$

Über eine andere allgemeine Berechnungsgrundlage des Korrelationskoeffizienten folgt:

$$\rho^{(1)} = \frac{\text{Cov}\,(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

$\Rightarrow$

$$0 < \text{Cov}\,(X, Y) \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y$$

Da $\sigma_X > 0$ und $\sigma_Y > 0$ gilt, muss sein:

$$\text{Cov}\,(X, Y) > 0$$

1.6 Definition der Koeffizienten

1.6.1 Definition von q

Aus $+\infty > q > \frac{1}{t} \cdot \ln p$ und $+\infty > t > 0$ folgt, dass gilt: Koeffizienten

$$q > \frac{1}{t} \cdot \ln p > 0$$

$\Rightarrow$

$$q > 0$$

1.6.2 Definition von p

Aus der Arbeitsgleichung sind die Anforderungen für p direkt ablesbar.

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{x}{p}\right)$$

$\Rightarrow$

$$0 < -\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{x}{p} < +\infty$$

$\Rightarrow$

$$p > x > 0$$

$\Rightarrow$

$$p > 0$$

1.6.3 Der Definitionsbereich der Arbeitsgleichung

$$0 < x < +1$$

$\Rightarrow$

$$0 < p \cdot e^{-q \cdot t} < +1$$

$\Rightarrow$

$$+\infty > q > \frac{1}{t} \cdot \ln p$$

$\Rightarrow$

$$+\infty > t > 0$$

1.6.4 Der Wertebereich der Arbeitsgleichung

$$-\infty < y < +\infty$$

$\Rightarrow$

$$-\infty < -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{t}{p} < +\infty$$

$\Rightarrow$

$$+\infty > t > 0$$

2 Beispiele für eine Regression

2.1 Beispiel 1 – Große x_i - und y_i - Werte

Urlistwerte, transformierte Werte und Koeffizienten der linearen Regression als Ergebnis der Abszissenwerte $b + a \cdot X_i$ und der Ordinatenwerte Z_i.[3] Beispiel 1

$$b + a \cdot X_i = \frac{\ln p^{(a)}}{p^{(a)} \cdot q^{(a)}} + \frac{1}{p^{(a)} \cdot q^{(a)}} \cdot \ln \frac{1}{x_i} \qquad Z_i = e^{-q^{(a)} \cdot y_i}$$

$\Rightarrow$

x_i	$b + a \cdot X_i$	y_i	Z_i	$\widetilde{b}$	$\widetilde{a}$
100	2, 371	-1000	2, 508	0, 284	0, 926
500	0, 780	+100	0, 912		
1000	0, 094	+900	0, 437		

Vorher gewählte Schätzparameter.

$$p^{(a)} = 1000 + 100 = 1100$$
$$x_0^{(a)} = 400$$
$$q^{(a)} = 0,92 \cdot 10^{-3}$$

Die endgültigen Koeffizienten aus $\widetilde{a}$ und $\widetilde{b}$ berechnet.

$$p = 1,359$$
$$x_0 = 0,461$$
$$q = 0,795$$

Die vorläufige Regressionsgleichung.

$$\tilde{y} = -1,258 \cdot \ln\left(-0,926 \cdot \ln\left(0,736 \cdot \tilde{x}\right)\right)$$

Einfügen der Schätzparameter und endgültige Regressionsgleichung.

$$\tilde{y} \cdot p^{(a)} = -1,258 \cdot \ln\left(-0,926 \cdot \ln \frac{0,736 \cdot \tilde{x}}{p^{(a)}}\right)$$

$\Rightarrow$

$$y^{(r)} = -1383,648 \cdot \ln\left(-0,926 \cdot \ln\left(0,000668 \cdot x\right)\right)$$

Mit dem Definitionsbereich:

$$-\infty < y \cdot p^{(a)} = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln \frac{x}{p^{(a)} \cdot p}\right) < +\infty$$

$\Rightarrow$

$$0 < x < p^{(a)} \cdot p$$

$\Rightarrow$

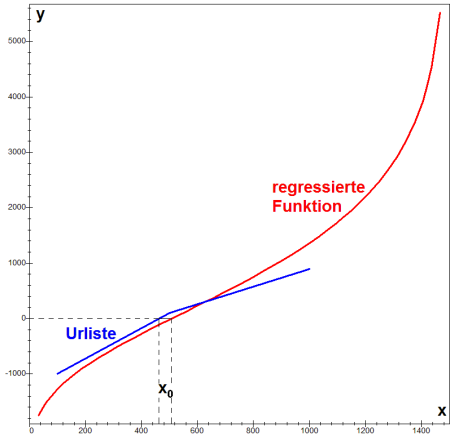
$$0 < x < 1494,9$$

Numerische und grafische Darstellung.

[3] Funktionsgleichung der linearen Regression: $Z_i = \widetilde{b} + \widetilde{a} \cdot (b + a \cdot X_i)$

x_i	y_i	$y_i^{(r)}$
100	-1000	-1271
500	+100	-21
1000	+900	+1041

$\Rightarrow$



Der lineare Korrelationskoeffizient nach Pearson mit dem Kurzbezeichner $X_i \leftarrow b + a \cdot \widetilde{X}_i$.

i	X_i	Z_i	$X_i - X_M$	$Z_i - Z_M$	$(X_i - X_M) \cdot (X_i - X_M)$	$(Z_i - Z_M) \cdot (Z_i - Z_M)$	$(X_i - X_M) \cdot (Z_i - Z_M)$
1	2, 371	2, 508	+1, 289	+1, 222	1, 662	1, 493	1, 575
2	0, 780	0, 912	-0, 302	-0, 374	0, 091	0, 140	0, 113
3	0, 094	0, 437	-0, 988	-0, 849	0, 976	0, 721	0, 839
$n = 3$	$\Sigma = 3, 245$	$\Sigma = 3, 857$	$\Sigma =$ -0, 001	$\Sigma =$ -0, 001	$\Sigma = 2, 729$	$\Sigma = 2, 354$	$\Sigma = 2, 527$

$\Rightarrow$

$$X_M = \frac{3,245}{3} = 1,082 \qquad Y_M = \frac{3,857}{3} = 1,286$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{2,729}{3}} = 0,954 \qquad \sigma_Y = \sqrt{\frac{2,354}{3}} = 0,886$$

$\Rightarrow$

$$\text{Cov}\,(X,Y) = \frac{2,527}{3} = 0,842 > 0$$

$\Rightarrow$

$$\rho^{(1)} = \frac{0,842}{0,954 \cdot 0,886} = 0,996 > 0$$

Und:

$$0 < a \cdot \sigma_X = 0,926 \cdot 0,954 = 0,883 < 0,886 = \sigma_Y$$

Sowie:

$$0 < \text{Cov}\,(X, Y) \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y$$

$\Rightarrow$

$$0 < 0,842 < 0,954 \cdot 0,886 = 0,845$$

Die Summe des Restterms:

i	X_i	Z_i	$\frac{X_i}{Z_i}$	$\frac{X_i}{Z_i} - 1$	$\left\lvert \frac{X_i}{Z_i} - 1 \right\rvert$	$\left(\frac{X_i}{Z_i} - 1\right)^2$
1	2, 371	2, 508	0, 945	-0, 055	0, 055	0, 003
2	0, 780	0, 912	0, 855	-0, 145	0, 145	0, 021
3	0, 094	0, 437	0, 215	-0, 785	0, 785	0, 616
$n = 3$	Σ = $3,245$	Σ = $3,857$	Σ = $2,015$	Σ = $-0,985$	Σ = $0,985$	Σ = $0,640$

$\Rightarrow$

$$ZM^{|1|} \equiv R_{MAX} = \frac{0,985}{3} = 0,328$$

Sowie:

$$ZM^{(1)} = -\frac{0,985}{3} = -0,328$$

Und:

$$ZM^{(2)} = \frac{0,640}{3} = 0,213$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{0,640}{3}} = 0,462$$

Schlussendlich:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{ZM^{(2)}}{\left(ZM^{|1|}\right)^2}} = 1$$

$\Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot 3 \cdot \frac{0,640}{0,985^2}} = 1,122 \rightarrow 1$$

2.2 Beispiel 2 – Kleine x_i - und y_i - Werte

Beispiel 2

Urlistwerte, transformierte Werte und Koeffizienten der linearen Regression als Ergebnis der Abszissenwerte $b + a \cdot X_i$ und der Ordinatenwerte Z_i.[4]

$$b + a \cdot X_i = \frac{\ln p^{(a)}}{p^{(a)} \cdot q^{(a)}} + \frac{1}{p^{(a)} \cdot q^{(a)}} \cdot \ln \frac{1}{x_i} \qquad Z_i = e^{-q^{(a)} \cdot y_i}$$

$\Rightarrow$

x_i	$b + a \cdot X_i$	y_i	Z_i	$\widetilde{b}$	$\widetilde{a}$
0, 11	2, 409	-0, 85	2, 179	0, 400	0, 868
0, 19	1, 812	-0, 46	1, 524		
0, 30	1, 314	-0, 18	1, 179		
0, 41	0, 973	+0, 09	0, 921		
0, 49	0, 779	+0, 37	0, 712		
0, 61	0, 539	+0, 66	0, 546		
0, 70	0, 389	+1, 04	0, 386		
0, 79	0, 257	+1, 50	0, 253		
0, 89	0, 127	+2, 26	0, 126		

Vorher gewählte Schätzparameter.

$$p^{(a)} = 0,11 + 0,89 = 1$$
$$x_0^{(a)} = 0,4$$
$$q^{(a)} = 0,916$$

Die endgültigen Koeffizienten aus $\widetilde{a}$ und $\widetilde{b}$ berechnet.

$$p = 1,047$$
$$x_0 = 0,331$$
$$q = 1,100$$

Die vorläufige Regressionsgleichung.

$$\tilde{y} = -0,909 \cdot \ln\left(-0,868 \cdot \ln\left(0,955 \cdot \tilde{x}\right)\right)$$

Einfügen der Schätzparameter und endgültige Regressionsgleichung.

$$\tilde{y} \cdot p^{(a)} = -0,909 \cdot \ln\left(-0,868 \cdot \ln \frac{0,955 \cdot \tilde{x}}{p^{(a)}}\right)$$

$\Rightarrow$

$$y^{(r)} = -0,909 \cdot \ln\left(-0,868 \cdot \ln\left(0,955 \cdot x\right)\right)$$

Mit dem Definitionsbereich:

$$-\infty < y \cdot p^{(a)} = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln \frac{x}{p^{(a)} \cdot p}\right) < +\infty$$

$\Rightarrow$

$$0 < x < p^{(a)} \cdot p$$

$\Rightarrow$

$$0 < x < 1,047$$

Numerische und grafische Darstellung.

[4] Funktionsgleichung der linearen Regression: $Z_i = \widetilde{b} + \widetilde{a} \cdot (b + a \cdot X_i)$

x_i	y_i	$y_i^{(r)}$
0, 11	-0, 85	-0, 610
0, 19	-0, 46	-0, 357
0, 30	-0, 18	-0, 074
0, 41	+0, 09	+0, 187
0, 49	+0, 37	+0, 379
0, 61	+0, 66	+0, 688
0, 70	+1, 04	+0, 955
0, 79	+1, 50	+1, 280
0, 89	+2, 26	+1, 780

Der lineare Korrelationskoeffizient nach Pearson mit dem Kurzbezeichner $X_i \leftarrow b + a \cdot \widetilde{X}_i$.

i	X_i	Z_i	$X_i - X_M$	$Z_i - Z_M$	$(X_i - X_M) \cdot (X_i - X_M)$	$(Z_i - Z_M) \cdot (Z_i - Z_M)$	$(X_i - X_M) \cdot (Z_i - Z_M)$
1	2, 409	2, 179	+1, 454	+1, 309	2, 114	1, 713	1, 903
2	1, 812	1, 524	+0, 857	+0, 654	0, 734	0, 428	0, 560
3	1, 314	1, 179	+0, 359	+0, 309	0, 129	0, 095	0, 111
4	0, 973	0, 921	+0, 018	+0, 051	0, 000	0, 003	0, 001
5	0, 779	0, 712	-0, 176	-0, 158	0, 031	0, 025	0, 028
6	0, 539	0, 546	-0, 416	-0, 324	0, 173	0, 105	0, 135
7	0, 389	0, 386	-0, 566	-0, 484	0, 320	0, 234	0, 274
8	0, 257	0, 253	-0, 698	-0, 617	0, 487	0, 381	0, 431
9	0, 127	0, 126	-0, 828	-0, 744	0, 686	0, 554	0, 616
$n = 9$	Σ = 8, 599	Σ = 7, 826	Σ = +0, 004	Σ = -0, 004	Σ = 4, 674	Σ = 3, 565	Σ = 4, 059

$\Rightarrow$

$$X_M = \frac{8,599}{9} = 0,955 \qquad Y_M = \frac{7,826}{9} = 0,870$$

$\Rightarrow$

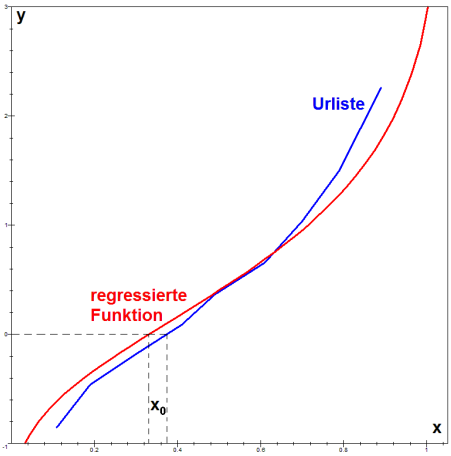
$$\sigma_X = \sqrt{\frac{4,674}{9}} = 0,721 \qquad \sigma_Y = \sqrt{\frac{3,565}{9}} = 0,629$$

$\Rightarrow$

$$\text{Cov}\,(X, Y) = \frac{4,059}{9} = 0,451 > 0$$

$\Rightarrow$

$$\rho^{(1)} = \frac{0,451}{0,721 \cdot 0,629} = 0,994 > 0$$



Und:

$$0 < a \cdot \sigma_X = 0,868 \cdot 0,721 = 0,626 < 0,629 = \sigma_Y$$

Sowie:

$$0 < \text{Cov}\,(X, Y) \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y$$

$\Rightarrow$

$$0 < 0,451 < 0,721 \cdot 0,629 = 0,454$$

Die Summe des Restterms:

i	X_i	Z_i	$\frac{X_i}{Z_i}$	$\frac{X_i}{Z_i} - 1$	$\left\lvert \frac{X_i}{Z_i} - 1 \right\rvert$	$\left(\frac{X_i}{Z_i} - 1\right)^2$
1	2, 409	2, 179	1, 106	+0, 106	0, 106	0, 011
2	1, 812	1, 524	1, 189	+0, 189	0, 189	0, 036
3	1, 314	1, 179	1, 115	+0, 115	0, 115	0, 013
4	0, 973	0, 921	1, 056	+0, 056	0, 056	0, 003
5	0, 779	0, 712	1, 094	+0, 094	0, 094	0, 009
6	0, 539	0, 546	0, 987	-0, 013	0, 013	0, 000
7	0, 389	0, 386	1, 008	+0, 008	0, 008	0, 000
8	0, 257	0, 253	1, 016	+0, 016	0, 016	0, 000
9	0, 127	0, 126	1, 008	+0, 008	0, 008	0, 000
$n = 9$	Σ = $8,599$	Σ = $7,826$	Σ = $9,579$	Σ = $+0,579$	Σ = $0,605$	Σ = $0,072$

$\Rightarrow$

$$ZM^{|1|} \equiv R_{MAX} = \frac{0,605}{9} = 0,067$$

Sowie:

$$ZM^{(1)} = \frac{0,579}{9} = 0,064$$

Und:

$$ZM^{(2)} = \frac{0,072}{9} = 0,008$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{0,072}{9}} = 0,089$$

Schlussendlich:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{ZM^{(2)}}{\left(ZM^{|1|}\right)^2}} = 1$$

$\Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot 9 \cdot \frac{0,072}{0,605^2}} = 1,062 \approx 1$$

2.3 Beispiel 3 – Falsche Voraussetzungen für x_i - und y_i - Werte

Beispiel 3

Urlistwerte, transformierte Werte und Koeffizienten der linearen Regression als Ergebnis der Abszissenwerte $b + a \cdot X_i$ und der Ordinatenwerte Z_i.[5]

$$b + a \cdot X_i = \frac{\ln p^{(a)}}{p^{(a)} \cdot q^{(a)}} + \frac{1}{p^{(a)} \cdot q^{(a)}} \cdot \ln \frac{1}{x_i} \qquad Z_i = e^{-q^{(a)} \cdot y_i}$$

$\Rightarrow$

x_i	$b + a \cdot X_i$	y_i	Z_i	$\widetilde{b}$	$\widetilde{a}$
0, 89	0, 252	-0, 85	1, 481	1, 293	-0, 224
0, 79	0, 510	-0, 46	1, 237		
0, 70	0, 772	-0, 18	1, 087		
0, 61	1, 070	+0, 09	0, 959		
0, 49	1, 544	+0, 37	0, 843		
0, 41	1, 930	+0, 66	0, 737		
0, 30	2, 606	+1, 04	0, 618		
0, 19	3, 594	+1, 50	0, 500		
0, 11	4, 777	+2, 26	0, 352		

Widerspricht der Forderung $a > 0$. Es wird dennoch weiter gerechnet als Negativbeispiel.

Vorher gewählte Schätzparameter.

$$p^{(a)} = 0,11 + 0,89 = 1$$
$$x_0^{(a)} = 0,63$$
$$q^{(a)} = 0,462$$

Die endgültigen Koeffizienten aus $\widetilde{a}$ und $\widetilde{b}$ berechnet.

$$p = 0,00314$$
$$x_0 = 0,270$$
$$q = -1419,59$$

Spätestens hier widerspricht der ermittelte Wert von $q = -1419,59$ der Forderung $q > 0$ aus den Ausgangsdefinitionen der Koeffizienten. Es wird dennoch weiter gerechnet als Negativbeispiel.

Die vorläufige Regressionsgleichung.

$$\tilde{y} = 0,000704 \cdot \ln\left(0,224 \cdot \ln\left(318,574 \cdot \tilde{x}\right)\right)$$

Einfügen der Schätzparameter und endgültige Regressionsgleichung.

$$\tilde{y} \cdot p^{(a)} = 0,000704 \cdot \ln\left(0,224 \cdot \ln \frac{318,574 \cdot \tilde{x}}{p^{(a)}}\right)$$

$\Rightarrow$

$$y^{(r)} = 0,000704 \cdot \ln\left(0,224 \cdot \ln\left(318,574 \cdot x\right)\right)$$

Mit dem Definitionsbereich:

$$-\infty < y \cdot p^{(a)} = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln \frac{x}{p^{(a)} \cdot p}\right) < +\infty$$

$\Rightarrow$

$$0 < x < p^{(a)} \cdot p$$

$\Rightarrow$

$$0 < x < 0,00314$$

[5] Funktionsgleichung der linearen Regression: $Z_i = \widetilde{b} + \widetilde{a} \cdot (b + a \cdot X_i)$

Numerische und grafische Darstellung.

x_i	y_i	$y_i^{(r)}$
0, 89	-0, 85	+0, 002
0, 79	-0, 46	+0, 002
0, 70	-0, 18	+0, 001
0, 61	+0, 09	+0, 001
0, 49	+0, 37	+0, 001
0, 41	+0, 66	+0, 001
0, 30	+1, 04	+0, 000
0, 19	+1, 50	-0, 000
0, 11	+2, 26	-0, 002

Der lineare Korrelationskoeffizient nach Pearson mit dem Kurzbezeichner $X_i \leftarrow b + a \cdot \widetilde{X}_i$.

i	X_i	Z_i	$X_i - X_M$	$Z_i - Z_M$	$(X_i - X_M) \cdot (X_i - X_M)$	$(Z_i - Z_M) \cdot (Z_i - Z_M)$	$(X_i - X_M) \cdot (Z_i - Z_M)$
1	0, 252	1, 481	-1, 643	+0, 613	2, 699	0, 376	-1, 007
2	0, 510	1, 237	-1, 385	+0, 369	1, 918	0, 136	-0, 511
3	0, 772	1, 087	-1, 123	+0, 219	1, 261	0, 048	-0, 246
4	1, 070	0, 959	-0, 825	+0, 091	0, 681	0, 008	-0, 075
5	1, 544	0, 843	-0, 351	-0, 025	0, 123	0, 001	+0, 009
6	1, 930	0, 737	+0, 035	-0, 131	0, 001	0, 017	-0, 005
7	2, 606	0, 618	+0, 711	-0, 250	0, 506	0, 063	-0, 178
8	3, 594	0, 500	+1, 699	-0, 368	2, 887	0, 135	-0, 625
9	4, 777	0, 352	+2, 882	-0, 516	8, 306	0, 266	-1, 487
$n = 9$	Σ = 17, 055	Σ = 7, 814	Σ = 0, 000	Σ = 0, 002	Σ = 18, 382	Σ = 1, 050	Σ = 4, 125

$\Rightarrow$

$$X_M = \frac{17,055}{9} = 1,895 \qquad Y_M = \frac{7,814}{9} = 0,868$$

$\Rightarrow$

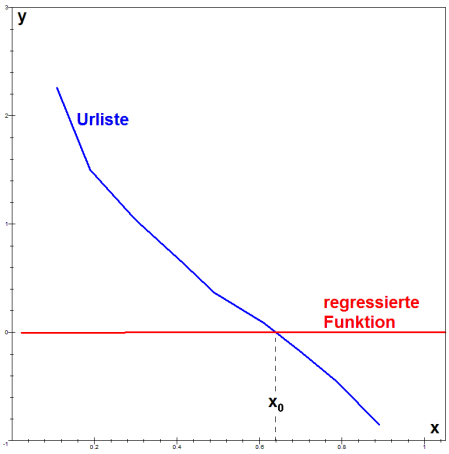
$$\sigma_X = \sqrt{\frac{18,382}{9}} = 1,429 \qquad \sigma_Y = \sqrt{\frac{1,050}{9}} = 0,342$$

$\Rightarrow$

$$\text{Cov}\,(X,Y) = -\frac{4,125}{9} = -0,458 \overset{!}{<} 0$$

$\Rightarrow$

$$\rho^{(1)} = -\frac{0,458}{1,429 \cdot 0,342} = -0,938 \overset{!}{<} 0$$



Und:

$$0 \overset{!}{>} a \cdot \sigma_X = -0,224 \cdot 1,429 = -0,320 < 0,342 = \sigma_Y$$

Sowie:

$$0 < \text{Cov}\,(X, Y) \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y$$

$\Rightarrow$

$$0 \overset{!}{>} -0,458 < 1,429 \cdot 0,342 = 0,489$$

Die Summe des Restterms:

i	X_i	Z_i	$\frac{X_i}{Z_i}$	$\frac{X_i}{Z_i} - 1$	$\left\lvert \frac{X_i}{Z_i} - 1 \right\rvert$	$\left(\frac{X_i}{Z_i} - 1\right)^2$
1	0, 252	1,481	0, 170	-0, 830	0, 830	0, 689
2	0, 510	1,237	0, 412	-0, 588	0, 588	0, 346
3	0, 772	1,087	0, 710	-0, 290	0, 290	0, 084
4	1, 070	0,959	1, 116	+0, 116	0, 116	0, 013
5	1, 544	0,843	1, 832	+0, 832	0, 832	0, 692
6	1, 930	0,737	2, 619	+1, 619	1, 619	2, 621
7	2, 606	0,618	4, 217	+3, 217	3, 217	10, 349
8	3, 594	0,500	7, 188	+6, 188	6, 188	38, 291
9	4, 777	0,352	13, 571	+12, 571	12, 571	158, 030
$n = 9$	Σ = $17,055$	Σ = $7,814$	Σ = $13,835$	Σ = $+22,835$	Σ = $26,251$	Σ = $211,115$

$\Rightarrow$

$$ZM^{|1|} \equiv R_{MAX} = \frac{26,251}{9} = 2,917$$

Sowie:

$$ZM^{(1)} = \frac{22,835}{9} = 2,537$$

Und:

$$ZM^{(2)} = \frac{211,115}{9} = 23,457$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{211,115}{9}} = 4,843$$

Schlussendlich:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{ZM^{(2)}}{\left(ZM^{|1|}\right)^2}} = 1$$

$\Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot 9 \cdot \frac{23,457}{26,251^2}} = 1,325 \neq 1$$

2.4 Beispiel 4 – Durch Modifikation der Arbeitsgleichung das Beispiel 3 korrigiert

Beispiel 4

Modifikation der Arbeitsgleichung.

$$\hat{y} = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{\hat{x}}{p}\right)$$

$\Rightarrow$

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{p - x}{p}\right)$$

$\Rightarrow$

$$e^{-q \cdot y} = \frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln p + \frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{1}{p - x}$$

Modifikation des Schätzparameters $q^{(a)}$ und Darstellung von x_0.

$$0 = y_0 = -\frac{1}{q^{(a)}} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p^{(a)} \cdot q^{(a)}} \cdot \ln\frac{p^{(a)} - x_0}{p^{(a)}}\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_0 = p^{(a)} \cdot \left(1 - e^{-p^{(a)} \cdot q^{(a)}}\right)$$

$\Rightarrow$

$$q^{(a)} = -\frac{1}{p^{(a)}} \cdot \ln\frac{p^{(a)} - x_0}{p^{(a)}}$$

Urlistwerte, transformierte Werte und Koeffizienten der linearen Regression als Ergebnis der Abszissenwerte $b + a \cdot X_i$ und der Ordinatenwerte Z_i.[6]

$$b + a \cdot X_i = \frac{\ln p^{(a)}}{p^{(a)} \cdot q^{(a)}} + \frac{1}{p^{(a)} \cdot q^{(a)}} \cdot \ln\frac{1}{p^{(a)} - x_i} \qquad Z_i = e^{-q^{(a)} \cdot y_i}$$

$\Rightarrow$

x_i	$b + a \cdot X_i$	y_i	Z_i	$\widetilde{b}$	$\widetilde{a}$
0, 89	2, 221	-0, 85	2, 328	-0, 025	1, 038
0, 79	1, 570	-0, 46	1, 580		
0, 70	1, 211	-0, 18	1, 196		
0, 61	0, 947	+0, 09	0, 914		
0, 49	0, 677	+0, 37	0, 692		
0, 41	0, 531	+0, 66	0, 519		
0, 30	0, 359	+1, 04	0, 356		
0, 19	0, 212	+1, 50	0, 225		
0, 11	0, 117	+2, 26	0, 106		

Vorher gewählte Schätzparameter.

$$p^{(a)} = 0,11 + 0,89 = 1$$
$$x_0^{(a)} = 0,63$$
$$q^{(a)} = 0,994$$

Die endgültigen Koeffizienten aus $\widetilde{a}$ und $\widetilde{b}$ berechnet.

$$p = 0,976$$
$$x_0 = 0,372$$
$$q = 0,987$$

[6] Funktionsgleichung der linearen Regression: $Z_i = \widetilde{b} + \widetilde{a} \cdot (b + a \cdot X_i)$

Die vorläufige Regressionsgleichung.

$$\tilde{y} = -1,013 \cdot \ln\left(-1,038 \cdot \ln\left(1 - 1,025 \cdot \tilde{x}\right)\right)$$

Einfügen der Schätzparameter und endgültige Regressionsgleichung.

$$\tilde{y} \cdot p^{(a)} = -1,013 \cdot \ln\left(-1,038 \cdot \ln \frac{1 - 1,025 \cdot \tilde{x}}{p^{(a)}}\right)$$

$\Rightarrow$

$$y^{(r)} = -1,013 \cdot \ln\left(-1,038 \cdot \ln\left(1 - 1,025 \cdot x\right)\right)$$

Mit dem Definitionsbereich:

$$-\infty < y \cdot p^{(a)} = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln \frac{p - x}{p^{(a)} \cdot p}\right) < +\infty$$

$\Rightarrow$

$$p > x > \left(1 - p^{(a)}\right) \cdot p$$

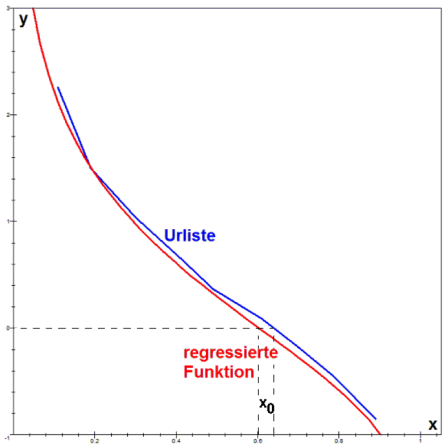
$\Rightarrow$

$$0 < x < 0,976$$

Numerische und grafische Darstellung.

x_i	y_i	$y_i^{(r)}$
0, 89	-0, 85	-0, 937
0, 79	-0, 46	-0, 550
0, 70	-0, 18	-0, 274
0, 61	+0, 09	-0, 018
0, 49	+0, 37	+0, 328
0, 41	+0, 66	+0, 577
0, 30	+1, 04	+0, 977
0, 19	+1, 50	+1, 512
0, 11	+2, 26	+2, 114

$\Rightarrow$



Der lineare Korrelationskoeffizient nach Pearson mit dem Kurzbezeichner $X_i \leftarrow b + a \cdot \widetilde{X}_i$.

i	X_i	Z_i	$X_i - X_M$	$Z_i - Z_M$	$(X_i - X_M) \cdot (X_i - X_M)$	$(Z_i - Z_M) \cdot (Z_i - Z_M)$	$(X_i - X_M) \cdot (Z_i - Z_M)$
1	2, 221	2, 328	+1, 349	+1, 448	1, 820	2, 097	1, 953
2	1, 570	1, 580	+0, 698	+0, 700	0, 487	0, 490	0, 489
3	1, 211	1, 196	+0, 339	+0, 316	0, 115	0, 100	0, 107
4	0, 947	0, 914	+0, 075	+0, 034	0, 006	0, 001	0, 003
5	0, 677	0, 692	-0, 195	-0, 188	0, 038	0, 035	0, 037
6	0, 531	0, 519	-0, 341	-0, 361	0, 116	0, 130	0, 123
7	0, 359	0, 356	-0, 513	-0, 524	0, 263	0, 275	0, 269
8	0, 212	0, 225	-0, 660	-0, 655	0, 436	0, 430	0, 432
9	0, 117	0, 106	-0, 755	-0, 774	0, 570	0, 599	0, 584
$n = 9$	Σ = 7, 845	Σ = 7, 916	Σ = -0, 003	Σ = -0, 004	Σ = 3, 851	Σ = 4, 157	Σ = 3, 997

$\Rightarrow$

$$X_M = \frac{7,845}{9} = 0,872 \qquad Y_M = \frac{7,916}{9} = 0,880$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{3,851}{9}} = 0,654 \qquad \sigma_Y = \sqrt{\frac{4,157}{9}} = 0,680$$

$\Rightarrow$

$$\text{Cov}\,(X,Y) = \frac{3,997}{9} = 0,444 > 0$$

$\Rightarrow$

$$\rho^{(1)} = -\frac{0,444}{0,654 \cdot 0,680} = 0,999 > 0$$

Und:

$$0 < a \cdot \sigma_X = 1,038 \cdot 0,654 = 0,679 < 0,680 = \sigma_Y$$

Sowie:

$$0 < \text{Cov}\,(X,Y) \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y$$

$\Rightarrow$

$$0 < 0,444 < 0,654 \cdot 0,680 = 0,445$$

Die Summe des Restterms:

i	X_i	Z_i	$\frac{X_i}{Z_i}$	$\frac{X_i}{Z_i} - 1$	$\left\lvert \frac{X_i}{Z_i} - 1 \right\rvert$	$\left(\frac{X_i}{Z_i} - 1\right)^2$
1	2, 221	2, 328	0, 954	-0, 046	0, 046	0, 002
2	1, 570	1, 580	0, 994	-0, 006	0, 006	0, 000
3	1, 211	1, 196	1, 013	+0, 013	0, 013	0, 000
4	0, 947	0, 914	1, 036	+0, 036	0, 036	0, 001
5	0, 677	0, 692	0, 978	-0, 022	0, 022	0, 000
6	0, 531	0, 519	1, 023	+0, 023	0, 023	0, 000
7	0, 359	0, 356	1, 008	+0, 008	0, 008	0, 000
8	0, 212	0, 225	0, 942	-0, 058	0, 058	0, 003
9	0, 117	0, 106	1, 104	+0, 104	0, 104	0, 011
$n = 9$	Σ = $7,845$	Σ = $7,916$	Σ = $9,052$	Σ = $+0,052$	Σ = $0,316$	Σ = $0,017$

$\Rightarrow$

$$ZM^{|1|} \equiv R_{MAX} = \frac{0,316}{9} = 0,035$$

Sowie:

$$ZM^{(1)} = \frac{0,052}{9} = 0,006$$

Und:

$$ZM^{(2)} = \frac{0,017}{9} = 0,002$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{0,017}{9}} = 0,043$$

Schlussendlich:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot \frac{ZM^{(2)}}{\left(ZM^{|1|}\right)^2}} = 1$$

$\Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot 9 \cdot \frac{0,017}{0,316^2}} = 0,988 \approx 1$$

2.5 Beispiel – Zusammenfassung der statistischen Werte der Beispiele 1 - 4

Zusammenfassung

Es werden die relevanten, berechneten, statistischen Werte gesammelt und nochmals dargestellt.

Beispiel	σ_X	σ_Y	Cov (X_i, Y_i)	$\rho^{(1)}$	$ZM^{\lvert 1 \rvert}$ $\equiv$ R_{MAX}	$ZM^{(1)}$ $\equiv$ $\oslash$	$\sqrt{ZM^{(2)}}$ $\equiv$ σ_i
1	0, 954	0, 886	+0, 842	+0, 996	0, 328	-0, 328	0, 462
2	0, 721	0, 629	+0, 451	+0, 994	0, 067	+0, 064	0, 089
3	1, 429	0, 342	-0, 458	-0, 938	2, 917	+2, 537	4, 843
4	0, 654	0, 680	+0, 444	+0, 999	0, 035	+0, 006	0, 043

3 Zusammenfassung der Berechnungsgrundlagen

Zum Schluss sollen die notwendigen Berechnungsgrundlagen aufgelistet werden. Zusammenfassung

3.1 Bilogarithmisch monoton steigend

Parametrische Darstellung der Arbeitsgleichung

$$x(t) = p \cdot e^{-q \cdot t} \qquad y(t) = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{t}{p}$$

Kartesische Darstellung der Arbeitsgleichung

$$y(x) = -\frac{1}{q} \cdot \ln \left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln \frac{x}{p} \right)$$

Resttermdarstellung der Arbeitsgleichung - die Transformatoren

$$(b + a \cdot X_1)(x) = \frac{\ln p^{(a)}}{p^{(a)} \cdot q^{(a)}} + \frac{1}{p^{(a)} \cdot q^{(a)}} \cdot \ln \frac{1}{x_i} \qquad Z_i(y) = e^{-q^{(a)} \cdot y_i}$$

Definition der Startkoeffizienten (a), x_0 wird geschätzt oder andersweitig ermittelt

$$p^{(a)} = MAX(x_i) + MIN(x_i)$$

$$x_0 = p^{(a)} \cdot e^{-p^{(a)} \cdot q^{(a)}}$$

$$q^{(a)} = -\frac{1}{p^{(a)}} \cdot \ln \frac{x_0}{p^{(a)}}$$

Durchführung der Linearen Regression, Ermittlung der Koeffizienten $\widetilde{a}$ und $\widetilde{b}$

$$Z_i = \widetilde{b} + \widetilde{a} \cdot (b + a \cdot X_i)$$

Definition der endgültigen Koeffizienten p und q

$$p = e^{\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}}$$

$$q = \frac{1}{p \cdot \widetilde{a}}$$

$$x_0 = p \cdot e^{-p \cdot q}$$

Der Definitionsbereich

$$0 < x < p^{(a)} \cdot p$$

Der Restterm als Fehlerwertkontrolle, die maximale Abweichung (Betrag aller Abweichungen)

$$ZM^{|1|} \equiv R_{Max} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{b + a \cdot X_i}{Z_i} - 1 \right| \to 0$$

Das erste und zweite Zentrale Moment als Fehlerwertkontrolle

$$ZM^{(1)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b + a \cdot X_i}{Z_i} - 1 \right) \to 0$$

$$ZM^{(2)} \equiv \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b + a \cdot X_i}{Z_i} - 1 \right)^2} \to 0$$

3.2 Bilogarithmisch monoton fallend

Zusammenfassung

Parametrische Darstellung der Arbeitsgleichung

$$x(t) = p \cdot \left(1 - e^{-q \cdot t}\right) \qquad y(t) = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{t}{p}$$

Kartesische Darstellung der Arbeitsgleichung

$$y(x) = -\frac{1}{q} \cdot \ln \left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln \frac{p - x}{p} \right)$$

Resttermdarstellung der Arbeitsgleichung - die Transformatoren

$$(b + a \cdot X_i)(x) = \frac{\ln p^{(a)}}{p^{(a)} \cdot q^{(a)}} + \frac{1}{p^{(a)} \cdot q^{(a)}} \cdot \ln \frac{1}{p^{(a)} - x_i} \qquad Z_i(y) = e^{-q^{(a)} \cdot y_i}$$

Definition der Startkoeffizienten (a), x_0 wird geschätzt oder andersweitig ermittelt

$$p^{(a)} = MAX(x_i) + MIN(x_i)$$

$$x_0 = p^{(a)} \cdot \left(1 - e^{-p^{(a)} \cdot q^{(a)}}\right)$$

$$q^{(a)} = -\frac{1}{p^{(a)}} \cdot \ln \frac{p^{(a)} - x_0}{p^{(a)}}$$

Durchführung der Linearen Regression, Ermittlung der Koeffizienten $\widetilde{a}$ und $\widetilde{b}$

$$Z_i = \widetilde{b} + \widetilde{a} \cdot (b + a \cdot X_i)$$

Definition der endgültigen Koeffizienten p und q

$$p = e^{\frac{\widetilde{b}}{\widetilde{a}}}$$

$$q = \frac{1}{p \cdot \widetilde{a}}$$

$$x_0 = p \cdot \left(1 - e^{-p \cdot q}\right)$$

Der Definitionsbereich

$$\left(1 - p^{(a)}\right) \cdot p < x < p$$

Der Restterm als Fehlerwertkontrolle, die maximale Abweichung (Betrag aller Abweichungen)

$$ZM^{|1|} \equiv R_{Max} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{b + a \cdot X_i}{Z_i} - 1 \right| \to 0$$

Das erste und zweite Zentrale Moment als Fehlerwertkontrolle

$$ZM^{(1)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b + a \cdot X_i}{Z_i} - 1 \right) \to 0$$

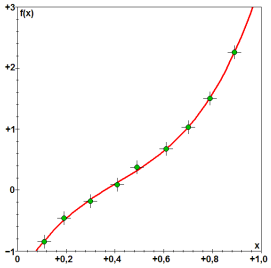
$$ZM^{(2)} \equiv \sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b + a \cdot X_i}{Z_i} - 1 \right)^2} \to 0$$

LaTeX 2_ε

$$\oiint$$

3.4.2 Polynomregression einer bilogarithmischen Funktion

Durchführung der Regression einer bilogarith-



mischen Funktion über das Polynomverfahren

Autor: Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 6. September 2023 – Letzte Revision: 6. Januar 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Die Regression der bilogarithmischen Funktion **3**
1.1 Methode . . . 3
1.1.1 Monoton steigend . . . 3
1.1.2 Monoton fallend . . . 4
1.2 Parameter . . . 5
1.2.1 Monoton steigend . . . 5
1.2.2 Monoton fallend . . . 6
1.3 Koeffizienten . . . 7
1.3.1 Koeffizient a_4 . . . 7
1.3.2 Koeffizient a_3 . . . 8
1.3.3 Koeffizient a_2 . . . 9
1.3.4 Koeffizient a_1 . . . 10
1.3.5 Koeffizient a_0 . . . 11

2 Zusammenfassung **13**

3 Beispiele **15**
3.1 Beispiel I . . . 15
3.2 Beispiel II . . . 16
3.3 Grafiken . . . 17

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

[Dip] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Durchführung einer Regression über das Resttermverfahren am Beispiel einer bilogarithmischen Funktion.

---

1 Die Regression der bilogarithmischen Funktion

1.1 Methode

1.1.1 Monoton steigend

Gegeben ist eine bilogarithmische Funktion nach [Dip]: [001]

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{x}{p}\right)$$

Mit den Definitionsbereichen:

$$p > 0 \qquad q > 0 \qquad 0 < x < p$$

Die Funktion besitzt keine Extrema, dafür eine Wendestelle bei:

$$x_W = q \cdot e^{-1} = q \cdot E \qquad y_W = -\frac{1}{q} \cdot \ln\frac{1}{p \cdot q}$$

Um diesen Wert x_W wird bis x^4 taylorisiert.

$$y_T = -\frac{1}{24 \cdot q^5 \cdot E^4} \cdot x^4 + \frac{8}{24 \cdot q^4 \cdot E^3} \cdot x^3 - \frac{18}{24 \cdot q^3 \cdot E^2} \cdot x^2 + \frac{16}{24 \cdot q^2 \cdot E} \cdot x + \frac{24 - 24 \cdot q \cdot E \cdot \ln\frac{1}{p \cdot q} - 5 \cdot q \cdot E}{24 \cdot q^2 \cdot E}$$

Die zweite Ableitung wird gebildet und Null gesetzt:

$$y_T'' = -\frac{12}{24 \cdot q^5 \cdot E^4} \cdot x^2 + \frac{48 \cdot E \cdot q}{24 \cdot q^5 \cdot E^4} \cdot x - \frac{36 \cdot E^2 \cdot q^2}{24 \cdot q^5 \cdot E^4}$$

$\Rightarrow$

$$x^2 - 4 \cdot E \cdot q \cdot x + 3 \cdot E^2 \cdot q^2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{N,1} = 3 \cdot E \cdot q \qquad x_{N,2} = E \cdot q$$

Damit ist die Darstellung der bilogarithmischen Funktion über eine biquadratische Polynomregression durchführbar.

1.1.2 Monoton fallend

[001] Gegeben ist eine bilogarithmische Funktion nach [Dip]:

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{p-x}{p}\right)$$

Mit den Definitionsbereichen:

$$p > 0 \qquad q > 0 \qquad 0 < x < p$$

Die Funktion besitzt keine Extrema, dafür eine Wendestelle bei:

$$x_W = p - q \cdot e^{-1} = p - q \cdot E \qquad y_W = -\frac{1}{q} \cdot \ln\frac{1}{p \cdot q}$$

Die Nullstellen der zweiten Ableitung der taylorisierten Bilogfunktion:

$$x_{N,1} = p - 3 \cdot E \cdot q \qquad x_{N,2} = p - E \cdot q$$

Damit ist die Darstellung der bilogarithmischen Funktion über eine biquadratische Polynomregression durchführbar. Im Gegensatz zur monoton steigenden Funktion sind die Nullstellen überbestimmt. Die Ermittlung von q und p weichen daher voneinander ab.

1.2 Parameter

1.2.1 Monoton steigend

Das regressierte Polynom ist bekannt:

$$y_R = a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0$$

Damit auch die Ableitungen:

$$y_R{}' = 4 \cdot a_4 \cdot x^3 + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 2 \cdot a_2 \cdot x^1 + a_1 \cdot x^0$$

$\Rightarrow$

$$y_R{}'' = 12 \cdot a_4 \cdot x^2 + 6 \cdot a_3 \cdot x^1 + 2 \cdot a_2 \cdot x^0$$

Die Wendestelle(n) = die Nullstellen der zweiten Ableitung:

$$x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot x + \frac{1}{6} \cdot \frac{a_2}{a_4} = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{N,1;2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{a_3}{a_4} \pm \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{a_4} \cdot \sqrt{a_3^2 - \frac{8}{3} \cdot a_2 \cdot a_4}$$

Mit der Abschätzung:

$$a_3^2 - \frac{8}{3} \cdot a_2 \cdot a_4 \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a_2 \cdot a_4}{a_3^2} \leq \frac{3}{8}$$

Da für x_W eine Berechnungsgrundlage aus der bilogarithmischen Funktion bekannt ist, kann der Koeffizient q bestimmt werden:

$$q = x_N \cdot e^1$$

$\Rightarrow$

$$q = e^1 \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{a_3}{a_4} \pm \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{a_4} \cdot \sqrt{a_3^2 - \frac{8}{3} \cdot a_2 \cdot a_4} \right)$$

Mit der Forderung $q > 0$ ergibt sich:

$$a_2 \cdot a_4 < 0 \qquad \rightarrow \qquad \operatorname{sgn}(a_2) \neq \operatorname{sgn}(a_4)$$

Damit ist obige Abschätzung immer erfüllt. Durch Einsetzen von x_W in y_T ergibt sich der Wert y_W welcher wiederum den Koeffizienten p liefert:

$$p = \frac{1}{q} \cdot e^{q \cdot y_N}$$

Auch für p gibt es eine Bedingung:

$$p > 0$$

$\Rightarrow$

$$e^{q \cdot y_N} > 0$$

Was immer erfüllt ist.

1.2.2 Monoton fallend

Das regressierte Polynom ist bekannt:

$$y_R = a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0$$

Damit auch die Ableitungen:

$$y_R{}' = 4 \cdot a_4 \cdot x^3 + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 2 \cdot a_2 \cdot x^1 + a_1 \cdot x^0$$

$\Rightarrow$

$$y_R{}'' = 12 \cdot a_4 \cdot x^2 + 6 \cdot a_3 \cdot x^1 + 2 \cdot a_2 \cdot x^0$$

Die Wendestelle(n) = die Nullstellen der zweiten Ableitung:

$$x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot x + \frac{1}{6} \cdot \frac{a_2}{a_4} = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{N,1;2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{a_3}{a_4} \pm \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{a_4} \cdot \sqrt{a_3^2 - \frac{8}{3} \cdot a_2 \cdot a_4}$$

Mit der Abschätzung:

$$a_3^2 - \frac{8}{3} \cdot a_2 \cdot a_4 \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a_2 \cdot a_4}{a_3^2} \leq \frac{3}{8}$$

Die Berechnung des Koeffizienten p erfolgt diesmal zuerst. So soll gelten:

$$x_{N,2} > x_{N,1}$$

$\Rightarrow$

$$p = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot x_{N,2} - x_{N,1})$$

Der Wert $x_{N,2}$ wird in die regressierte Funktion $y_R = y_T$ eingesetzt und $y_T(x_{N,2})$ berechnet. Anschließend kann q mit bekanntem p ermittelt werden über:

$$y_T(x_{N,2}) = y(x_{N,2})$$

$\Rightarrow$

$$q = -\frac{1}{y_T(x_{N,2})} \cdot \mathbf{W}\left(\frac{y_T(x_{N,2})}{p} \cdot \ln \frac{p - x_{N,2}}{p}\right)$$

Das Ergebnis ist eine LambertW-Funktion $\mathbf{W}(\bullet)$, welche mit geeigneten Mitteln aufgelöst werden muss.

1.3 Koeffizienten

Die Ermittlung des Regressionspolynoms erfolgt über den Gaußalgorithmus. Für die Notation siehe [Dip].

1.3.1 Koeffizient a_4

$$a_4 = \frac{\bar{B}}{\bar{A}}$$

Mit:

$$\bar{A} = \frac{\hat{B}}{\hat{A}} - \frac{\hat{E}}{\hat{D}} \qquad \bar{B} = \frac{\hat{C}}{\hat{A}} - \frac{\hat{F}}{\hat{D}}$$

Mit:

$$\hat{A} = \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{F}}{\tilde{E}} \qquad \hat{B} = \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{G}}{\tilde{E}} \qquad \hat{C} = \frac{\tilde{D}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{H}}{\tilde{E}}$$

$$\hat{D} = \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{J}}{\tilde{I}} \qquad \hat{E} = \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{K}}{\tilde{I}} \qquad \hat{F} = \frac{\tilde{D}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{L}}{\tilde{I}}$$

Mit:

$$\tilde{A} = \frac{B}{A} - \frac{G}{F} \qquad \tilde{B} = \frac{C}{A} - \frac{H}{F} \qquad \tilde{C} = \frac{D}{A} - \frac{I}{F} \qquad \tilde{D} = \frac{E}{A} - \frac{J}{F}$$

$$\tilde{E} = \frac{B}{A} - \frac{L}{K} \qquad \tilde{F} = \frac{C}{A} - \frac{M}{K} \qquad \tilde{G} = \frac{D}{A} - \frac{N}{K} \qquad \tilde{H} = \frac{E}{A} - \frac{O}{K}$$

$$\tilde{I} = \frac{B}{A} - \frac{Q}{P} \qquad \tilde{J} = \frac{C}{A} - \frac{R}{P} \qquad \tilde{K} = \frac{D}{A} - \frac{S}{P} \qquad \tilde{L} = \frac{E}{A} - \frac{T}{P}$$

Mit:

$$A = U - \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \qquad B = V - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \qquad C = W - \frac{\{x^4\}}{\{x\}} \qquad D = X - \frac{\{x^5\}}{\{x\}}$$

$$E = Y - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}} \qquad F = U - \frac{\{x^3\}}{\{x^2\}} \qquad G = V - \frac{\{x^4\}}{\{x^2\}} \qquad H = W - \frac{\{x^5\}}{\{x^2\}}$$

$$I = X - \frac{\{x^6\}}{\{x^2\}} \qquad J = Y - \frac{\{x^2 \cdot y\}}{\{x^2\}} \qquad K = U - \frac{\{x^4\}}{\{x^3\}} \qquad L = V - \frac{\{x^5\}}{\{x^3\}}$$

$$M = W - \frac{\{x^6\}}{\{x^3\}} \qquad N = X - \frac{\{x^7\}}{\{x^3\}} \qquad O = Y - \frac{\{x^3 \cdot y\}}{\{x^3\}} \qquad P = U - \frac{\{x^5\}}{\{x^4\}}$$

$$Q = V - \frac{\{x^6\}}{\{x^4\}} \qquad R = W - \frac{\{x^7\}}{\{x^4\}} \qquad S = X - \frac{\{x^8\}}{\{x^4\}} \qquad T = Y - \frac{\{x^4 \cdot y\}}{\{x^4\}}$$

Mit:

$$U = \frac{\{x\}}{n} \qquad V = \frac{\{x^2\}}{n} \qquad W = \frac{\{x^3\}}{n} \qquad X = \frac{\{x^4\}}{n} \qquad Y = \frac{\{y\}}{n}$$

1.3.2 Koeffizient a_3

$$a_3 = \frac{\hat{C}}{\hat{A}} - \frac{\hat{B}}{\hat{A}} \cdot a_4$$

Mit:

$$\hat{A} = \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{F}}{\tilde{E}} \qquad \hat{B} = \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{G}}{\tilde{E}} \qquad \hat{C} = \frac{\tilde{D}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{H}}{\tilde{E}}$$

Mit:

$$\tilde{A} = \frac{B}{A} - \frac{G}{F} \qquad \tilde{B} = \frac{C}{A} - \frac{H}{F} \qquad \tilde{C} = \frac{D}{A} - \frac{I}{F} \qquad \tilde{D} = \frac{E}{A} - \frac{J}{F}$$

$$\tilde{E} = \frac{B}{A} - \frac{L}{K} \qquad \tilde{F} = \frac{C}{A} - \frac{M}{K} \qquad \tilde{G} = \frac{D}{A} - \frac{N}{K} \qquad \tilde{H} = \frac{E}{A} - \frac{O}{K}$$

Mit:

$$A = U - \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \qquad B = V - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \qquad C = W - \frac{\{x^4\}}{\{x\}} \qquad D = X - \frac{\{x^5\}}{\{x\}} \qquad E = Y - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}}$$

$$F = U - \frac{\{x^3\}}{\{x^2\}} \qquad G = V - \frac{\{x^4\}}{\{x^2\}} \qquad H = W - \frac{\{x^5\}}{\{x^2\}} \qquad I = X - \frac{\{x^6\}}{\{x^2\}} \qquad J = Y - \frac{\{x^2 \cdot y\}}{\{x^2\}}$$

$$K = U - \frac{\{x^4\}}{\{x^3\}} \qquad L = V - \frac{\{x^5\}}{\{x^3\}} \qquad M = W - \frac{\{x^6\}}{\{x^3\}} \qquad N = X - \frac{\{x^7\}}{\{x^3\}} \qquad O = Y - \frac{\{x^3 \cdot y\}}{\{x^3\}}$$

Mit:

$$U = \frac{\{x\}}{n} \qquad V = \frac{\{x^2\}}{n} \qquad W = \frac{\{x^3\}}{n} \qquad X = \frac{\{x^4\}}{n} \qquad Y = \frac{\{y\}}{n}$$

1.3.3 Koeffizient a_2

$$a_2 = \frac{\tilde{D}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} \cdot a_4 - \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} \cdot a_3$$

Mit:

$$\tilde{A} = \frac{B}{A} - \frac{G}{F} \qquad \tilde{B} = \frac{C}{A} - \frac{H}{F}$$

$$\tilde{C} = \frac{D}{A} - \frac{I}{F} \qquad \tilde{D} = \frac{E}{A} - \frac{J}{F}$$

Mit:

$$A = U - \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \qquad B = V - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \qquad C = W - \frac{\{x^4\}}{\{x\}} \qquad D = X - \frac{\{x^5\}}{\{x\}} \qquad E = Y - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}}$$

$$F = U - \frac{\{x^3\}}{\{x^2\}} \qquad G = V - \frac{\{x^4\}}{\{x^2\}} \qquad H = W - \frac{\{x^5\}}{\{x^2\}} \qquad I = X - \frac{\{x^6\}}{\{x^2\}} \qquad J = Y - \frac{\{x^2 \cdot y\}}{\{x^2\}}$$

Mit:

$$U = \frac{\{x\}}{n} \qquad V = \frac{\{x^2\}}{n} \qquad W = \frac{\{x^3\}}{n} \qquad X = \frac{\{x^4\}}{n} \qquad Y = \frac{\{y\}}{n}$$

1.3.4 Koeffizient a_1

$$a_1 = \frac{E}{A} - \frac{D}{A} \cdot a_4 - \frac{C}{A} \cdot a_3 - \frac{B}{A} \cdot a_2$$

Mit:

$$A = U - \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \qquad B = V - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \qquad C = W - \frac{\{x^4\}}{\{x\}} \qquad D = X - \frac{\{x^5\}}{\{x\}} \qquad E = Y - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}}$$

Mit:

$$U = \frac{\{x\}}{n} \qquad V = \frac{\{x^2\}}{n} \qquad W = \frac{\{x^3\}}{n} \qquad X = \frac{\{x^4\}}{n} \qquad Y = \frac{\{y\}}{n}$$

1.3.5 Koeffizient a_0

$$a_0 = Y - X \cdot a_4 - W \cdot a_3 - V \cdot a_2 - U \cdot a_1$$

Mit:

$$U = \frac{\{x\}}{n} \qquad V = \frac{\{x^2\}}{n} \qquad W = \frac{\{x^3\}}{n} \qquad X = \frac{\{x^4\}}{n} \qquad Y = \frac{\{y\}}{n}$$

2 Zusammenfassung

• **Monoton steigend:**

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{x}{p}\right)$$

Berechnung der Koeffizienten a_0 bis a_4 über eine biquadratische Regression.

$$y_T = a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$\Rightarrow$

$$x_{N,1;2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{a_3}{a_4} \pm \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{a_4} \cdot \sqrt{a_3^2 - \frac{8}{3} \cdot a_2 \cdot a_4}$$

Bilden der zweiten Ableitung y_T'' und Berechnung der Nullstellen $x_{N,1;2}$ entspricht den Wendestellen von y_T. Ermitteln der Funktionswerte $y_T\left(x_{N,1;2}\right) = y_{N,1;2}$. Berechnen von q und p nach:

$$q = x_{N,1} \cdot e^{+1}$$

Sowie:

$$p = \frac{1}{q} \cdot e^{+q \cdot y_{N,1}}$$

• **Monoton fallend:**

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{p - x}{p}\right)$$

Berechnung der Koeffizienten a_0 bis a_4 über eine biquadratische Regression.

$$y_T = a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$\Rightarrow$

$$x_{N,1;2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{a_3}{a_4} \pm \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{a_4} \cdot \sqrt{a_3^2 - \frac{8}{3} \cdot a_2 \cdot a_4}$$

Bilden der zweiten Ableitung y_T'' und Berechnung der Nullstellen $x_{N,1;2}$ entspricht den Wendestellen von y_T. Ermitteln der Funktionswerte $y_T\left(x_{N,1;2}\right) = y_{N,1;2}$. Berechnen von q und p nach:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \left(3 \cdot x_{N,2} - x_{N,1}\right)$$

Sowie:

$$q = -\frac{1}{y_{N,2}} \cdot \mathbf{W}\left(\frac{y_{N,2}}{p} \cdot \ln\frac{p - x_{N,2}}{p}\right)$$

Wobei die LambertW-Funktion $\mathbf{W}(\bullet)$ mit geeigneten Mitteln aufgelöst werden muss.

• **Genauigkeitsabschätzung:**

$$\frac{a_2 \cdot a_4}{a_3^2} \leq \frac{3}{8}$$

Wobei gilt, je näher an $3/8$, desto genauer die durchgeführte Regression.

• **LambertW-Funktion:**

Ein optimierbarer Ersatz für die LambertW-Funktion im Intervall von 0 bis 5 ist gegeben durch:

$$\mathbf{W}(x) \approx a \cdot \ln(b \cdot x + 1)$$

Mit:

$$a = 0,614 \qquad b = 1,523$$

3 Beispiele

3.1 Beispiel I

Aus [Dip] ist für folgende Regression bekannt, dass

$$q = 1,1001 \qquad\qquad p = 1,0472$$

bei den Werten:

n	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
1	0, 110	0, 012 100	0, 001 331	0, 000 146	0, 000 016	0, 000 002	0, 000 000	0, 000 000
2	0, 190	0, 036 100	0, 006 859	0, 001 303	0, 000 248	0, 000 047	0, 000 009	0, 000 002
3	0, 300	0, 090 000	0, 027 000	0,008 100	0, 002 430	0, 000 729	0, 000 219	0, 000 066
4	0, 410	0, 168 100	0, 068 921	0, 028 258	0, 011 586	0, 004 750	0, 001 948	0, 000 798
5	0, 490	0, 240 100	0, 117 649	0, 057 648	0, 028 248	0, 013 841	0, 006 782	0, 003 323
6	0, 610	0, 372 100	0, 226 981	0, 138 458	0, 084 460	0, 051 520	0, 031 427	0, 019 171
7	0, 700	0, 490 000	0, 343 000	0, 240 100	0, 168 070	0, 117 649	0, 082 354	0, 057 648
8	0, 790	0, 624 100	0, 493 039	0, 389 501	0, 307 706	0, 243 087	0, 192 039	0, 151 711
9	0, 890	0, 792 100	0, 704 969	0, 627 422	0, 558 406	0, 496 981	0, 442 313	0, 393 659
9	**4, 490**	**2, 824 700**	**1, 989 749**	**1, 490937**	**1, 161 168**	**0, 928 607**	**0, 757 092**	**0, 626 378**

n	$x^0 \cdot f(x)$	$x^1 \cdot f(x)$	$x^2 \cdot f(x)$	$x^3 \cdot f(x)$	$x^4 \cdot f(x)$	-	-	-
1	-0, 850	-0, 093 500	-0, 010 285	-0, 001 131	-0, 000 124	-	-	-
2	-0, 460	-0, 087 400	-0, 016 606	-0, 003 155	-0, 000 599	-	-	-
3	-0, 180	-0, 054 000	-0, 016 200	-0, 004 860	-0, 001 458	-	-	-
4	+0, 090	+0, 036 900	+0, 015 129	+0, 006 203	+0, 002 543	-	-	-
5	+0, 370	+0, 181 300	+0, 088 837	+0, 043 530	+0, 021 330	-	-	-
6	+0, 660	+0, 402 600	+0, 245 586	+0, 149 807	+0, 091 383	-	-	-
7	+1, 040	+0, 728 000	+0, 509 600	+0, 356 720	+0, 249 704	-	-	-
8	+1, 500	+1, 185 000	+0, 936 150	+0, 739 559	+0, 584 251	-	-	-
9	+2, 260	+2, 011 400	+1, 790 146	+1, 593 230	+1, 417 975	-	-	-
9	**+4, 430**	**+4, 310 300**	**+3, 542 357**	**+2, 879 902**	**+2, 365 003**	**-**	**-**	**-**

Die Koeffizienten aus der Polynomregression bilden die Funktion y_T ab mit den Nullstellen der zweiten Ableitung y_T'':[1]

$$\begin{aligned} y_T \rightarrow a_4 &= +0,923554 \\ a_3 &= +7,077860 \\ a_2 &= -9,755919 \\ a_1 &= +6,587674 \\ a_0 &= -1,450138 \\ &\rightarrow \frac{a_2 \cdot a_4}{a_3^2} = -0,18 \leq \frac{3}{8} = 0,375 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$y_T'' = 0 \rightarrow x_{N,1;2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{7,077860}{0,923554} \pm \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{0,923554} \cdot \sqrt{7,077860^2 + \frac{8}{3} \cdot 9,755919 \cdot 0,923554}$$

$\Rightarrow$

$$x_{N,1} = +0,414598 \qquad\qquad x_{N,2} = -4,246461$$

Mit:

$$y_T \rightarrow y_{N,1} = +0,135838$$

Damit sind die Koeffizienten q und p berechnet:

$$q = +0,414598 \cdot e^{+1} = +1,127 \qquad\qquad p = \frac{1}{+1,127} \cdot e^{+1,127 \cdot 0,135838} = +1,034$$

Grafik dazu im Anhang.

[1] Siehe unter www.Zenithpoint.de dazugehöriges Classic-Maple-Worksheet©.

3.2 Beispiel II

Aus [Dip] ist für folgende Regression bekannt, dass

$$q = 0,9872 \qquad\qquad p = 0,9759$$

bei den Werten:

n	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
1	0, 890	0, 792 100	0, 704 969	0, 627 422	0, 558 406	0, 496 981	0, 442 313	0, 393 659
2	0, 790	0, 624 100	0, 493 039	0, 389 501	0, 307 706	0, 243 087	0, 192 039	0, 151 711
3	0, 700	0, 490 000	0, 343 000	0, 240 100	0, 168 070	0, 117 649	0, 082 354	0, 057 648
4	0, 610	0, 372 100	0, 226 981	0, 138 458	0, 084 460	0, 051 520	0, 031 427	0, 019 171
5	0, 490	0, 240 100	0, 117 649	0, 057 648	0, 028 248	0, 013 841	0, 006 782	0, 003 323
6	0, 410	0, 168 100	0, 068 921	0, 028 258	0, 011 586	0, 004 750	0, 001 948	0, 000 798
7	0, 300	0, 090 000	0, 027 000	0,008 100	0, 002 430	0, 000 729	0, 000 219	0, 000 066
8	0, 190	0, 036 100	0, 006 859	0, 001 303	0, 000 248	0, 000 047	0, 000 009	0, 000 002
9	0, 110	0, 012 100	0, 001 331	0, 000 146	0, 000 016	0, 000 002	0, 000 000	0, 000 000
9	**4, 490**	**2, 824 700**	**1, 989 749**	**1, 490937**	**1, 161 168**	**0, 928 607**	**0, 757 092**	**0, 626 378**

n	$x^0 \cdot f(x)$	$x^1 \cdot f(x)$	$x^2 \cdot f(x)$	$x^3 \cdot f(x)$	$x^4 \cdot f(x)$	-	-	-
1	-0, 850	-0, 756 500	-0, 673 285	-0, 599 224	-0, 533 309	-	-	-
2	-0, 460	-0, 363 400	-0, 287 086	-0, 226 798	-0, 179 170	-	-	-
3	-0, 180	-0, 126 000	-0, 088 200	-0, 061 740	-0, 043 218	-	-	-
4	+0, 090	+0, 054 900	+0, 033 489	+0, 020 428	+0, 012 461	-	-	-
5	+0, 370	+0, 181 300	+0, 088 837	+0, 043 530	+0, 021 330	-	-	-
6	+0, 660	+0, 270 600	+0, 110 946	+0, 045 487	+0, 018 650	-	-	-
7	+1, 040	+0, 312 000	+0, 093 600	+0, 028 080	+0, 008 424	-	-	-
8	+1, 500	+0, 285 000	+0, 054 150	+0 010 289	+0, 001 955	-	-	-
9	+2, 260	+0, 248 600	+0, 027 346	+0, 003 008	+0, 000 331	-	-	-
9	**+4, 430**	**+0, 106 500**	**-0, 640 203**	**-0, 736 939**	**-0, 692 547**	**-**	**-**	**-**

Die Koeffizienten aus der Polynomregression bilden die Funktion y_T ab mit den Nullstellen der zweiten Ableitung y_T'':[2]

$$\begin{aligned} y_T \rightarrow a_4 &= +14,864865 \\ a_3 &= -38,873180 \\ a_2 &= +35,764983 \\ a_1 &= -16,591674 \\ a_0 &= +3,676284 \\ &\rightarrow \frac{a_2 \cdot a_4}{a_3^2} = 0,352 \leq \frac{3}{8} = 0,375 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$y_T'' = 0 \rightarrow x_{N,1;2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{-38,873180}{+14,864865} \pm \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{+14,864865} \cdot \sqrt{38,873180^2 - \frac{8}{3} \cdot 35,764983 \cdot 14,864865}$$

$\Rightarrow$

$$x_{N,1} = +0,491228 \qquad\qquad x_{N,2} = +0,816325$$

Mit:

$$y_T \rightarrow y_{N,2} = -0,580097$$

Damit sind die Koeffizienten q und p berechnet:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,816325 - 0,491228) = +0,9789 \\ q &= \frac{1}{0,580097} \cdot \mathbf{W}\left(-\frac{0,580097}{0,978873} \cdot \ln \frac{0,978873 - 0,816325}{0,978873}\right) = 1,7238 \cdot \mathbf{W}(1,064) \\ &= 1,7238 \cdot 0,5899 = +1,0169 \end{aligned}$$

Grafik dazu im Anhang.

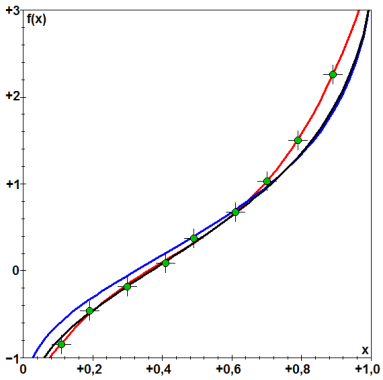
[2] Siehe unter www.Zenithpoint.de dazugehöriges Classic-Maple-Worksheet©.

3.3 Grafiken

• Monoton steigend

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{x}{p}\right)$$

$\Rightarrow$

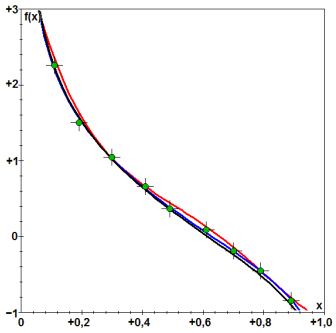


Rot - Das regressierte biquadratische Polynom.
Blau - Die ermittelte bilogarithmische Funktion
Schwarz - Der Vergleich zur Regression nach [Dip].

• Monoton fallend

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{p-x}{p}\right)$$

$\Rightarrow$

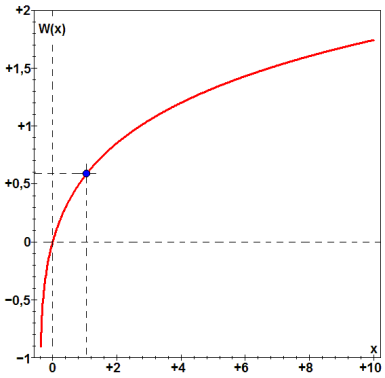


Rot - Das regressierte biquadratische Polynom.
Blau - Die ermittelte bilogarithmische Funktion
Schwarz - Der Vergleich zur Regression nach [Dip].

• LambertW-Funktion

$$y = \mathbf{W}(x)$$

$\Rightarrow$



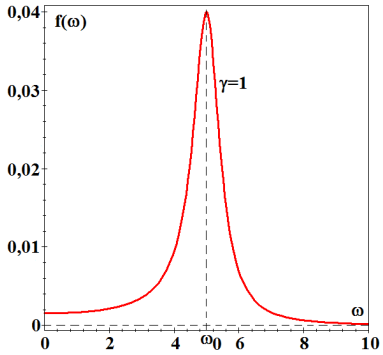
Der obere Ast der Lambertschen **W**-Funktion. Der untere Ast ist irrelevant, da dieser außerhalb $0 < x < p$ liegt. Mit eingezeichnet der **W**-Wert für Beispiel II.

LaTeX 2ε

$$\oiint$$

3.4.3 Die vollständige Regression der Lorentzfunktion

Die vollständige Regression der Lorentzfunktion



Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 26. September 2021 – Letzte Revision: 11. April 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Die Regression der Lorentzfunktion **3**
1.1 Methode . . . 3
1.2 Ermittlung der Koeffizienten . . . 4
1.2.1 Koeffizient a_4 . . . 4
1.2.2 Koeffizient a_3 . . . 5
1.2.3 Koeffizient a_2 . . . 6
1.2.4 Koeffizient a_1 . . . 7
1.2.5 Koeffizient a_0 . . . 8
1.3 Qualitätskontrolle . . . 9

2 Zusammenfassung **11**
2.1 Lorentzverteilt . . . 11
2.2 Nichtlorentzverteilt . . . 12

3 Beispiel **13**
3.1 Lorentzverteilt . . . 13
3.2 Nichtlorentzverteilt . . . 14

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

[Dipa] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Analyse verschiedener Lorentzfunktionen.

[Dipb] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Die Regression der Pseudo-Voigt-Funktion.

[Dipc] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. (Polynom)Regression von Datenpunkten.

---

1 Die Regression der Lorentzfunktion

1.1 Methode

Gegeben ist die Lorentzfunktion: [001]

$$f^*(\omega) = \frac{\gamma^2 \cdot \omega_0^2}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \gamma^2 \cdot \omega_0^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{f^*(\omega)}{\gamma^2 \cdot \omega_0^2} = f(\omega) = \frac{1}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \gamma^2 \cdot \omega_0^2}$$

Dabei beschreibt ω_0 die Lage des Maximums (Resonanzpunkt) und γ die Breite der Funktion.

Die Aufgabe ist es, eine Regressionsvorschrift zu finden. Dafür wird umgestellt:

$$f(\omega)^{-1} = \left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \gamma^2 \cdot \omega_0^2$$

$\Rightarrow$

$$f(\omega)^{-1} = \omega^4 - 2\omega_0^2 \cdot \omega^2 + \left(\omega_0^2 + \gamma^2\right) \cdot \omega_0^2$$

$\Leftarrow$

$$P(x) = a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0$$

Damit ist festgestellt, dass eine Biquadratische Polynomregression die Parameter der Lorentzfunktion vollständig[1] bestimmen kann. Für die Koeffizienten gilt:

$$a_4 = 1 \qquad a_3 = 0 \qquad a_2 = -2 \cdot \omega_0^2 \qquad a_1 = 0 \qquad a_0 = \left(\omega_0^2 + \gamma^2\right) \cdot \omega_0^2$$

$\Rightarrow$

$$\omega_0^2 = -\frac{a_2}{2} \qquad \gamma^2 = \frac{a_0 - \omega_0^4}{\omega_0^2}$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = \frac{a_2^2 - 4 \cdot a_0}{2 \cdot a_2}$$

[1] Vollständig, da Regression ohne Restterm.

1.2 Ermittlung der Koeffizienten

Die Ermittlung des Regressionspolynoms erfolgt über den Gaußalgorithmus. Für die Notation siehe [Dipc].

1.2.1 Koeffizient a_4

$$a_4 = 1 = \frac{\bar{B}}{\bar{A}}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{A} - \bar{B} = 0$$

Mit:

$$\bar{A} = \frac{\hat{B}}{\hat{A}} - \frac{\hat{E}}{\hat{D}} \qquad \bar{B} = \frac{\hat{C}}{\hat{A}} - \frac{\hat{F}}{\hat{D}}$$

Mit:

$$\hat{A} = \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{F}}{\tilde{E}} \qquad \hat{B} = \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{G}}{\tilde{E}} \qquad \hat{C} = \frac{\tilde{D}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{H}}{\tilde{E}}$$

$$\hat{D} = \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{J}}{\tilde{I}} \qquad \hat{E} = \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{K}}{\tilde{I}} \qquad \hat{F} = \frac{\tilde{D}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{L}}{\tilde{I}}$$

Mit:

$$\tilde{A} = \frac{B}{A} - \frac{G}{F} \qquad \tilde{B} = \frac{C}{A} - \frac{H}{F} \qquad \tilde{C} = \frac{D}{A} - \frac{I}{F} \qquad \tilde{D} = \frac{E}{A} - \frac{J}{F}$$

$$\tilde{E} = \frac{B}{A} - \frac{L}{K} \qquad \tilde{F} = \frac{C}{A} - \frac{M}{K} \qquad \tilde{G} = \frac{D}{A} - \frac{N}{K} \qquad \tilde{H} = \frac{E}{A} - \frac{O}{K}$$

$$\tilde{I} = \frac{B}{A} - \frac{Q}{P} \qquad \tilde{J} = \frac{C}{A} - \frac{R}{P} \qquad \tilde{K} = \frac{D}{A} - \frac{S}{P} \qquad \tilde{L} = \frac{E}{A} - \frac{T}{P}$$

Mit:

$$A = U - \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \qquad B = V - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \qquad C = W - \frac{\{x^4\}}{\{x\}} \qquad D = X - \frac{\{x^5\}}{\{x\}}$$

$$E = Y - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}} \qquad F = U - \frac{\{x^3\}}{\{x^2\}} \qquad G = V - \frac{\{x^4\}}{\{x^2\}} \qquad H = W - \frac{\{x^5\}}{\{x^2\}}$$

$$I = X - \frac{\{x^6\}}{\{x^2\}} \qquad J = Y - \frac{\{x^2 \cdot y\}}{\{x^2\}} \qquad K = U - \frac{\{x^4\}}{\{x^3\}} \qquad L = V - \frac{\{x^5\}}{\{x^3\}}$$

$$M = W - \frac{\{x^6\}}{\{x^3\}} \qquad N = X - \frac{\{x^7\}}{\{x^3\}} \qquad O = Y - \frac{\{x^3 \cdot y\}}{\{x^3\}} \qquad P = U - \frac{\{x^5\}}{\{x^4\}}$$

$$Q = V - \frac{\{x^6\}}{\{x^4\}} \qquad R = W - \frac{\{x^7\}}{\{x^4\}} \qquad S = X - \frac{\{x^8\}}{\{x^4\}} \qquad T = Y - \frac{\{x^4 \cdot y\}}{\{x^4\}}$$

Mit:

$$U = \frac{\{x\}}{n} \qquad V = \frac{\{x^2\}}{n} \qquad W = \frac{\{x^3\}}{n} \qquad X = \frac{\{x^4\}}{n} \qquad Y = \frac{\{y\}}{n}$$

1.2.2 Koeffizient a_3

$$a_3 = 0 = \frac{\hat{C}}{\hat{A}} - \frac{\hat{B}}{\hat{A}} \cdot a_4$$

$\Rightarrow$

$$a_4 = \frac{\hat{C}}{\hat{B}}$$

Da $a_4 = 1$ gelten muss, folgt daraus:

$$\hat{B} - \hat{C} = 0$$

Mit:

$$\hat{B} = \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{G}}{\tilde{E}} \qquad \hat{C} = \frac{\tilde{D}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{H}}{\tilde{E}}$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{E} \cdot \left(\tilde{C} - \tilde{D}\right) + \tilde{A} \cdot \left(\tilde{H} - \tilde{G}\right) = 0$$

Mit:

$$\tilde{A} = \frac{B}{A} - \frac{G}{F} \qquad \tilde{C} = \frac{D}{A} - \frac{I}{F} \qquad \tilde{D} = \frac{E}{A} - \frac{J}{F}$$

$$\tilde{E} = \frac{B}{A} - \frac{L}{K} \qquad \tilde{G} = \frac{D}{A} - \frac{N}{K} \qquad \tilde{H} = \frac{E}{A} - \frac{O}{K}$$

Mit:

$$A = U - \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \qquad B = V - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \qquad D = X - \frac{\{x^5\}}{\{x\}}$$

$$E = Y - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}} \qquad F = U - \frac{\{x^3\}}{\{x^2\}} \qquad G = V - \frac{\{x^4\}}{\{x^2\}}$$

$$I = X - \frac{\{x^6\}}{\{x^2\}} \qquad J = Y - \frac{\{x^2 \cdot y\}}{\{x^2\}} \qquad K = U - \frac{\{x^4\}}{\{x^3\}}$$

$$L = V - \frac{\{x^5\}}{\{x^3\}} \qquad N = X - \frac{\{x^7\}}{\{x^3\}} \qquad O = Y - \frac{\{x^3 \cdot y\}}{\{x^3\}}$$

Mit:

$$U = \frac{\{x\}}{n} \qquad V = \frac{\{x^2\}}{n} \qquad W = \frac{\{x^3\}}{n} \qquad X = \frac{\{x^4\}}{n} \qquad Y = \frac{\{y\}}{n}$$

1.2.3 Koeffizient a_2

$$a_2 = -2 \cdot \omega_0^2$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\tilde{D}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} \cdot a_4 - \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} \cdot a_3 = -2 \cdot \omega_0^2$$

$\Rightarrow$

$$\omega_0^2 = \frac{\tilde{C} - \tilde{D}}{2 \cdot \tilde{A}}$$

Mit:

$$\tilde{A} = \frac{B}{A} - \frac{G}{F} \qquad \tilde{C} = \frac{D}{A} - \frac{I}{F} \qquad \tilde{D} = \frac{E}{A} - \frac{J}{F}$$

$\Rightarrow$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{F \cdot (D - E) + A \cdot (J - I)}{B \cdot F - A \cdot G}$$

Mit:

$$A = U - \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \qquad B = V - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \qquad D = X - \frac{\{x^5\}}{\{x\}}$$

$$E = Y - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}} \qquad F = U - \frac{\{x^3\}}{\{x^2\}} \qquad I = X - \frac{\{x^6\}}{\{x^2\}} \qquad J = Y - \frac{\{x^2 \cdot y\}}{\{x^2\}}$$

Mit:

$$U = \frac{\{x\}}{n} \qquad V = \frac{\{x^2\}}{n} \qquad X = \frac{\{x^4\}}{n} \qquad Y = \frac{\{y\}}{n}$$

1.2.4 Koeffizient a_1

$$a_1 = 0 = \frac{E}{A} - \frac{D}{A} \cdot a_4 - \frac{C}{A} \cdot a_3 - \frac{B}{A} \cdot a_2$$

$\Rightarrow$

$$0 = E - D + 2 \cdot B \cdot \omega_0^2$$

$\Rightarrow$

$$\omega_0^2 = \frac{D - E}{2 \cdot B}$$

Mit:

$$B = V - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \qquad D = X - \frac{\{x^5\}}{\{x\}} \qquad E = Y - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}}$$

Mit:

$$V = \frac{\{x^2\}}{n} \qquad X = \frac{\{x^4\}}{n} \qquad Y = \frac{\{y\}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$B = \frac{\{x^2\}}{n} - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \qquad D = \frac{\{x^4\}}{n} - \frac{\{x^5\}}{\{x\}} \qquad E = \frac{\{y\}}{n} - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}}$$

1.2.5 Koeffizient a_0

$$a_0 = \left(\omega_0^2 + \gamma^2\right) \cdot \omega_0^2 = Y - X \cdot a_4 - W \cdot a_3 - V \cdot a_2 - U \cdot a_1$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = \frac{Y - X}{\omega_0^2} + 2 \cdot V - \omega_0^2$$

Mit:

$$V = \frac{\left\{x^2\right\}}{n} \qquad X = \frac{\left\{x^4\right\}}{n} \qquad Y = \frac{\{y\}}{n}$$

1.3 Qualitätskontrolle

Grundgedanke nach [Dipa] ist die Tatsache, dass ein Polynom vierten Grades vorliegt. Dementsprechend ist zur Berechnung der vorliegenden Maxima die erste Ableitung des Regressionspolynoms zu bilden und Null zu setzen. Sämtliche Maxima sind über die Cardanische Formel für den Fall „Casus irreducibilis“ berechenbar. Im Rechenweg erscheinen zwei Hilfsvariablen p und q.

$$p = \frac{8 \cdot a_2 \cdot a_4 - 3 \cdot a_3^2}{16 \cdot a_4^2} \qquad q = \frac{a_3^3 + 8 \cdot a_1 \cdot a_4^2 - 4 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4}{32 \cdot a_4^3}$$

Zurückgeführt auf die Standardlorentzfunktion gilt dann:

$$a_4 = 1 \qquad a_3 = 0 \qquad a_1 = 0$$

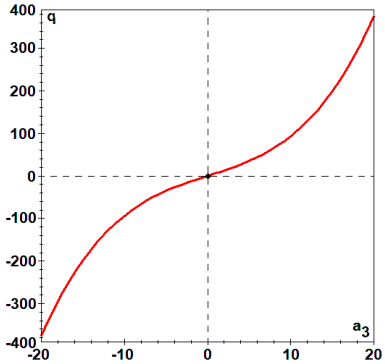
$\Rightarrow$

$$p = \frac{1}{2} \cdot a_2 \quad \rightarrow \quad p = -\omega_0^2 \qquad q = 0$$

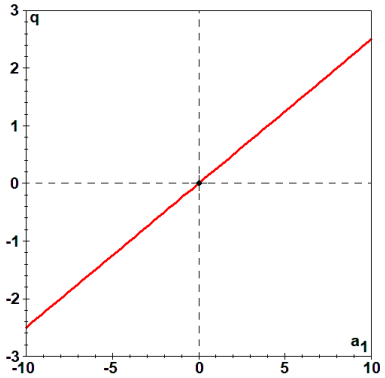
Von Interesse ist hier ausschließlich q.

Für eine Abweichung von Null sind die Koeffizienten a_3 und a_1 zuständig. Der Koeffizient $a_4 = 1$ beeinflusst nur dann q, wenn $a_3 \neq 0$ und/oder $a_1 \neq 0$.

Bei in [Dipa] genutztem Beispiel mit $a_4 = 1$, $a_0 = 650$, $a_2 = -50$ somit $\omega_0^2 = 25$ und $\gamma^2 = 1$ ergäbe sich beispielshaft grafisch für a_3:



Abschließend für a_1.



Es lässt sich q als „Qualitätsfaktor“ für die Regression einer Lorentzfunktion nutzen.

2 Zusammenfassung

2.1 Lorentzverteilt

Die Regression der Lorentzfunktion[2] erfolgt durch:

• Nachweis der Gültigkeit

Mit geeigneten oder den oben gezeigten Mitteln ist nachzuweisen, dass die vorliegenden Datenpaare lorentzverteilt sind, z.B. über:

$$\hat{B} - \hat{C} = 0 \qquad \text{und} \qquad \bar{A} - \bar{B} = 0$$

$\Rightarrow$

$$a_3 = 0 \qquad \text{und} \qquad a_4 = 1$$

• Ermitteln von ω_0^2

Für sicher lorentzverteilte Daten gilt:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{D - E}{B}$$

$\Rightarrow$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\{x^4\} \cdot \{x\} - \{x\} \cdot \{y\} + \{x \cdot y\} \cdot n - \{x^5\} \cdot n}{\{x^2\} \cdot \{x\} - \{x^3\} \cdot n}$$

• Ermitteln von γ^2

Für sicher lorentzverteilte Daten gilt:

$$\gamma^2 = \frac{Y - X}{\omega_0^2} + 2 \cdot V - \omega_0^2$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = \frac{\{y\} - \{x^4\}}{\omega_0^2 \cdot n} + \frac{2}{n} \cdot \{x^2\} - \omega_0^2$$

• Für die Lorentzkoeffizienten gilt

$$\begin{aligned} \text{Ideal} : a_4 &= 1 \\ \text{Ideal} : a_3 &= 0 \\ \text{Ideal} : a_2 &< 0 \\ \text{Ideal} : a_1 &= 0 \\ \text{Muss} : a_0 &> 0 \end{aligned}$$

• Aus den Lorentzkoeffizienten ergibt sich der „Qualitätsfaktor“ q

$$q = \frac{a_3^3 + 8 \cdot a_1 \cdot a_4^2 - 4 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4}{32 \cdot a_4^3}$$

Wobei hier $q = 0$ zu erwarten ist.

[2] eine weitere Möglichkeit ist in [Dipb] beschrieben

2.2 Nichtlorentzverteilt

Für den Fall das:

$$\hat{B} - \hat{C} \neq 0 \qquad \text{oder} \qquad \bar{A} - \bar{B} \neq 0$$

$\Rightarrow$

$$a_3 \neq 0 \qquad \text{oder} \qquad a_4 \neq 1$$

Die Regression der Lorentzfunktion erfolgt dann durch:

- **Ermitteln von ω_0^2 ersatzweise als $\hat{\omega_0^2}$**

$$\hat{\omega_0^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\{x^4\} \cdot \{x\} - \{x\} \cdot \{y\} + \{x \cdot y\} \cdot n - \{x^5\} \cdot n}{\{x^2\} \cdot \{x\} - \{x^3\} \cdot n}$$

- **Ermitteln von γ^2 ersatzweise als $\hat{\gamma^2}$**

$$\hat{\gamma^2} = \frac{1}{f(\omega)_{max} \cdot \omega_0^2}$$

- **Das Kontrollprodukt**

$$\hat{\gamma^2} \cdot \hat{\omega_0^2} = \gamma^2 \cdot \omega_0^2$$

- **Für die Lorentzkoeffizienten gilt**

Für bestimmte Anwendungen ist es vorteilhaft, mit den reduzierten Lorentzkoeffizienten weiter zu rechnen.

$$\begin{aligned}
\hat{a}_4 &= 1 \\
\hat{a}_3 &= a_3/a_4 \\
\hat{a}_2 &= a_2/a_4 \\
\hat{a}_1 &= a_1/a_4 \\
\hat{a}_0 &= a_0/a_4
\end{aligned}$$

- **Aus den Lorentzkoeffizienten ergibt sich der „Qualitätsfaktor“ q**

$$q = \frac{a_3^3 + 8 \cdot a_1 \cdot a_4^2 - 4 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4}{32 \cdot a_4^3}$$

Wobei hier $q \neq 0$ zu erwarten ist.

3 Beispiel

3.1 Lorentzverteilt

Die Datenpaare folgen einer Lorentzfunktion, da gilt $\hat{B} - \hat{C} = 0$ und $\bar{A} - \bar{B} = 0$ [3].

n	ω^1	ω^2	ω^3	ω^4	ω^5
1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1
3	2	4	8	16	32
4	3	9	27	81	243
5	4	16	64	256	1 024
6	5	25	125	625	3 125
7	6	36	216	1 296	7 776
8	7	49	343	2 401	16 807
9	8	64	512	4 096	32 768
10	9	81	729	6 561	59 049
11	10	100	1 000	10 000	100 000
11	**55**	**385**	**3 025**	**25 333**	**220 825**

n	$f(\omega)^{+1}$	$\omega^0 \cdot f(\omega)^{-1}$	$\omega^1 \cdot f(w)^{-1}$	$\omega^2 \cdot f(w)^{-1}$	$\omega^3 \cdot f(w)^{-1}$
1	0, 001 538 461 538	650	0	-	-
2	0, 001 663 893 511	601	601	-	-
3	0, 002 145 922 747	466	932	-	-
4	0, 003 558 718 861	281	843	-	-
5	0, 009 433 962 264	106	424	-	-
6	0, 040 000 000 000	25	125	-	-
7	0, 006 849 315 068	146	876	-	-
8	0, 001 663 893 511	601	4 207	-	-
9	0, 000 646 830 530	1 546	12 368	-	-
10	0, 000 316 355 584	3 161	28 449	-	-
11	0, 000 176 991 150	5 650	56 500	-	-
11	**0, 067 994 344 764**	**13 233**	**105 325**	-	-

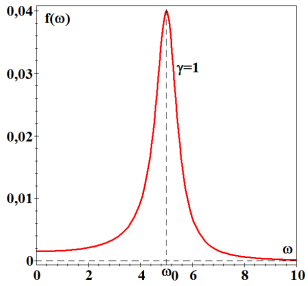
$\Rightarrow$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{25333 \cdot 55 - 55 \cdot 13233 + 105325 \cdot 11 - 220825 \cdot 11}{385 \cdot 55 - 3025 \cdot 11} = 25$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = \frac{13233 - 25333}{25 \cdot 11} + \frac{2}{11} \cdot 385 - 25 = 1$$

$\Rightarrow$



[3] Berechnung dazu siehe Maple©-Classic-Worksheet auf www.ZenithPoint.de

3.2 Nichtlorentzverteilt

Die Datenpaare folgen keiner Lorentzfunktion, da gilt $\hat{B} - \hat{C} = 1,579$ und $\bar{A} - \bar{B} = 2,985$ [4].

n	ω^1	ω^2	ω^3	ω^4	ω^5
1	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1
3	2	4	8	16	32
4	3	9	27	81	243
5	4	16	64	256	1 024
6	5	25	125	625	3 125
7	6	36	216	1 296	7 776
8	7	49	343	2 401	16 807
9	8	64	512	4 096	32 768
10	9	81	729	6 561	59 049
11	10	100	1 000	10 000	100 000
11	**55**	**385**	**3 025**	**25 333**	**220 825**

n	$f(\omega)^{+1}$	$\omega^0 \cdot f(\omega)^{-1}$	$\omega^1 \cdot f(w)^{-1}$	$\omega^2 \cdot f(w)^{-1}$	$\omega^3 \cdot f(w)^{-1}$
1	0, 001 000	1 000, 000	0, 000	-	-
2	0, 008 800	113, 636	113, 640	-	-
3	0, 016 600	60, 241	120, 480	-	-
4	0, 024 400	40, 984	122, 950	-	-
5	0, 032 200	31, 056	124, 220	-	-
6	0, 040 000	25, 000	125, 000	-	-
7	0, 032 040	31, 211	187, 000	-	-
8	0, 024 080	41, 528	290, 700	-	-
9	0, 016 120	62, 035	496, 280	-	-
10	0, 008 160	122, 550	1 102, 950	-	-
11	0, 000 200	5 000, 000	50 000, 000	-	-
11	**0, 203 600**	**6 528, 200**	**52 683, 490**	-	-

$\Rightarrow$

$$\hat{\omega_0^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25333 \cdot 55 - 55 \cdot 6528,2 + 52683,49 \cdot 11 - 220825 \cdot 11}{385 \cdot 55 - 3025 \cdot 11} = 33,690$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = \frac{6528,2 - 25333}{33,690 \cdot 11} + \frac{2}{11} \cdot 385 - 33,690 = -14,433$$

bzw.

$$\hat{\gamma^2} = \frac{1}{0,04 \cdot 33,690} = 0,742$$

Da für beide Beispiele

$$f(\omega)_{max} = 0,04$$

gilt, ist:

$$0,742 \cdot 33,690 = 1 \cdot 25$$

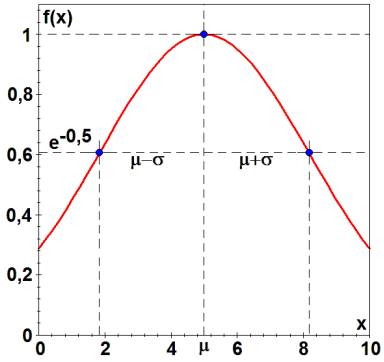
LaTeX 2_ε

[4] Berechnung dazu siehe Maple©-Classic-Worksheet auf www.ZenithPoint.de

$$\oiint$$

3.4.4 Die unvollständige Regression der Normalfunktion

Die unvollständige Regression der Normalfunktion



Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 19. Oktober 2021 – Letzte Revision: 6. Januar 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Die Regression der Normalfunktion **3**
1.1 Methode . . . 3
1.2 Ermittlung der Koeffizienten . . . 4
1.2.1 Koeffizient a_3 . . . 4
1.2.2 Koeffizient a_2 . . . 5
1.2.3 Koeffizient a_1 . . . 6
1.2.4 Koeffizient a_0 . . . 7

2 Zusammenfassung **8**

3 Beispiel **9**

4 Zusatz **11**
4.1 Mittelwert μ . . . 11
4.2 Standardabweichung σ . . . 12

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

[Dip] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. (Polynom)Regression von Datenpunkten.

---

1 Die Regression der Normalfunktion

1.1 Methode

Gegeben ist die Normalfunktion: [001]ff.

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Dabei beschreibt μ die Lage des Maximums und σ die Breite der Funktion.

Die Aufgabe ist es, eine Regressionsvorschrift zu finden. Dafür wird taylorisiert:

$$f(x)_T = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{(x-\mu)^4}{\sigma^4} - \frac{1}{48}\cdot\frac{(x-\mu)^6}{\sigma^6} + \ldots = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^i}{\prod_{j=1}^{i} 2\cdot j}\cdot\frac{(x-\mu)^{2\cdot i}}{\sigma^{2\cdot i}}\right)$$

Bedingt durch die Symmetrie reicht der quadratische Ausdruck für $i = 1\cdots 1$.

$$f(x)_T \equiv 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}$$

$\Rightarrow$

$$f(x)_T = -\frac{1}{2\cdot\sigma^2}\cdot x^2 + \frac{\mu}{\sigma^2}\cdot x + \frac{2\cdot\sigma^2 - \mu^2}{2\cdot\sigma^2}$$

$\Leftarrow$

$$P(x) = a_3\cdot x^3 + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x + a_0$$

Damit ist festgestellt, dass eine kubische Polynomregression die Parameter der Normalfunktion bestimmen kann. Für die Koeffizienten gilt:

$$a_3 = 0 \qquad a_2 = -\frac{1}{2\cdot\sigma^2} \qquad a_1 = \frac{\mu}{\sigma^2} \qquad a_0 = \frac{2\cdot\sigma^2 - \mu^2}{2\cdot\sigma^2}$$

Dabei kann als Kontrolle genutzt werden:

$$a_3 = 0 \qquad a_2 < 0$$

1.2 Ermittlung der Koeffizienten

Die Ermittlung des Regressionspolynoms erfolgt über den Gaußalgorithmus. Für die Notation siehe [Dip].

1.2.1 Koeffizient a_3

$$a_3 = 0 = \frac{T}{S}$$

$\Rightarrow$

$$T = 0 = \frac{O}{M} - \frac{R}{P}$$

$\Rightarrow$

$$R \cdot M = O \cdot P$$

Mit:

$$R = \frac{D}{A} - \frac{L}{I} \qquad M = \frac{B}{A} - \frac{F}{E} \qquad O = \frac{D}{A} - \frac{H}{E} \qquad P = \frac{B}{A} - \frac{J}{I}$$

Mit:

$$A = V - \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \qquad B = W - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \qquad D = U - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}}$$

$$E = V - \frac{\{x^3\}}{\{x^2\}} \qquad F = W - \frac{\{x^4\}}{\{x^2\}} \qquad H = U - \frac{\{x^2 \cdot y\}}{\{x^2\}}$$

$$I = V - \frac{\{x^4\}}{\{x^3\}} \qquad J = W - \frac{\{x^5\}}{\{x^3\}} \qquad L = U - \frac{\{x^3 \cdot y\}}{\{x^3\}}$$

Mit:

$$U = \frac{\{y\}}{n} \qquad V = \frac{\{x\}}{n} \qquad W = \frac{\{x^2\}}{n}$$

Im eigentlichen Sinne würde eine quadratische Regression ausreichen, jedoch ist mit $a_3 = 0$ bzw. $T = 0$ bei der kubischen Regression eine Kontrollmöglichkeit definiert.

1.2.2 Koeffizient a_2

$$a_2 = \frac{O}{M} - \frac{N}{M} \cdot a_3 = -\frac{1}{2 \cdot \sigma_*^2} < 0$$

Da $a_3 = 0$ gegeben ist, gilt:

$$a_2 = \frac{O}{M} < 0$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_*^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{M}{O}$$

Mit:

$$M = \frac{B}{A} - \frac{F}{E} \qquad O = \frac{D}{A} - \frac{H}{E}$$

Mit:

$$A = V - \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \qquad B = W - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \qquad D = U - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}}$$

$$E = V - \frac{\{x^3\}}{\{x^2\}} \qquad F = W - \frac{\{x^4\}}{\{x^2\}} \qquad H = U - \frac{\{x^2 \cdot y\}}{\{x^2\}}$$

Mit:

$$U = \frac{\{y\}}{n} \qquad V = \frac{\{x\}}{n} \qquad W = \frac{\{x^2\}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B}{A} < \frac{F}{E}$$

1.2.3 Koeffizient a_1

$$a_1 = \frac{D}{A} - \frac{B}{A} \cdot a_2 - \frac{C}{A} \cdot a_3 = \frac{\mu}{\sigma^2}$$

Da $a_3 = 0$ und $a_2 = -\frac{1}{2 \cdot \sigma_*^2}$ und gegeben ist, gilt:

$$\mu = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \sigma_*^2 \cdot D + B}{A}$$

Mit:

$$A = V - \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \qquad B = W - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \qquad D = U - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}}$$

Mit:

$$U = \frac{\{y\}}{n} \qquad V = \frac{\{x\}}{n} \qquad W = \frac{\{x^2\}}{n}$$

1.2.4 Koeffizient a_0

Für den Koeffizienten a_0 gibt es drei Berechnungsmöglichkeiten. Daher auch die Unterscheidung von σ^2, σ_*^2 und σ_{**}^2.

Möglichkeit 1:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \left\{ (x-\mu)^2 \right\} = \frac{\left\{x^2\right\}}{n} - 2 \cdot \mu \cdot \frac{\{x\}}{n} + \mu^2$$

$\Rightarrow$

$$\sigma^2 = W - 2 \cdot \mu \cdot V + \mu^2$$

Mit:

$$V = \frac{\{x\}}{n} \qquad W = \frac{\left\{x^2\right\}}{n}$$

Möglichkeit 2:

$$\sigma_*^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{M}{O}$$

$\Rightarrow$

$$a_0^* = \frac{2 \cdot \sigma_*^2 - \mu^2}{2 \cdot \sigma_*^2}$$

Möglichkeit 3:

$$a_0^{**} = U - V \cdot a_1 - W \cdot a_2$$

Mit:

$$U = \frac{\{y\}}{n} \qquad V = \frac{\{x\}}{n} \qquad W = \frac{\left\{x^2\right\}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_{**}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu^2}{1 - a_0^{**}}$$

2 Zusammenfassung

Der Mittelwert wird berechnet:

$$\mu = V = \frac{\{x\}}{n}$$

Die Standardabweichung lässt sich ermitteln nach - **Möglichkeit 1**:

$$\sigma^2 = W - V^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\{x^2\} \cdot n - \{x\}^2\right)$$

$\Rightarrow$

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$\Rightarrow$

$$f(x)_T = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}$$

Die Standardabweichung lässt sich ermitteln nach - **Möglichkeit 2**:

$$\sigma_*^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{M}{O}$$

$\Rightarrow$

$$f(x)_T = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma_*^2}$$

Die Standardabweichung lässt sich ermitteln nach - **Möglichkeit 3**:

$$a_2 = \frac{O}{M} \qquad a_1 = \frac{D}{A} - \frac{B}{A} \cdot a_2 \qquad a_0 = U - V \cdot a_1 - W \cdot a_2$$

$\Rightarrow$

$$P(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$\Rightarrow$

$$P(x) = -\frac{1}{2 \cdot \sigma_*^2} \cdot x^2 + \frac{\mu}{\sigma_*^2} \cdot x + \frac{2 \cdot \sigma_{**}^2 - \mu^2}{2 \cdot \sigma_{**}^2}$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_{**}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu^2}{1 - a_0}$$

Kontrolle über alles:

$$T = 0 \qquad a_2 < 0$$

3 Beispiel

Die Datenpaare folgen einer Normalfunktion, da gilt $T = 0$ und $a_2 = -0,0282 < 0$ [1].

n	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1
3	2	4	8	16	32	64
4	3	9	27	81	243	729
5	4	16	64	256	1 024	4 096
6	5	25	125	625	3 125	15 625
7	6	36	216	1 296	7 776	46 656
8	7	49	343	2 401	16 807	117 649
9	8	64	512	4 096	32 768	262 144
10	9	81	729	6 561	59 049	531 441
11	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
11	**55**	**385**	**3 025**	**25 333**	**220 825**	**1 978 405**

n	$x^0 \cdot f(x)$	$x^1 \cdot f(x)$	$x^2 \cdot f(x)$	$x^3 \cdot f(x)$		
1	0, 286 505	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000		
2	0, 449 329	0, 449 329	0, 449 329	0, 449 329		
3	0, 637 628	1, 275 256	2, 550 513	5, 101 025		
4	0, 818 731	2, 456 192	7, 368 577	22, 105 730		
5	0, 951 229	3, 804 918	15, 219 671	60, 878 683		
6	1, 000 000	5, 000 000	25, 000 000	125, 000 000		
7	0, 951 229	5, 707 377	34, 244 259	205, 465 556		
8	0, 818 731	5, 731 115	40, 117 807	280, 824 648		
9	0, 637 628	5, 101 025	40, 808 202	326, 465 614		
10	0, 449 329	4, 043 961	36, 395 646	327, 560 815		
11	0, 286 505	2, 865 048	28, 650 480	286, 504 797		
11	**7, 286 844**	**36, 434 221**	**230, 804 483**	**1 640, 356 197**		

$\Rightarrow$

$$\mu = \frac{\{x\}}{n} = \frac{55}{11} = 5$$

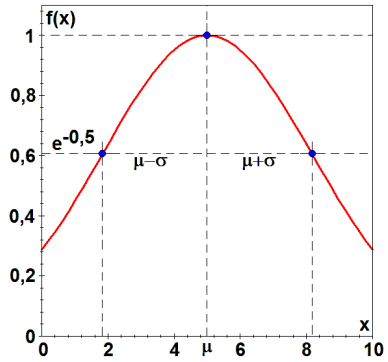
$\Rightarrow$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\{x^2\} \cdot n - \{x\}^2\right) = \frac{1}{11^2} \cdot \left(385 \cdot 11 - 55^2\right) = 10$$

$\Rightarrow$

$$f(x) = e^{-\frac{1}{20} \cdot (x-5)^2}$$

$\Rightarrow$

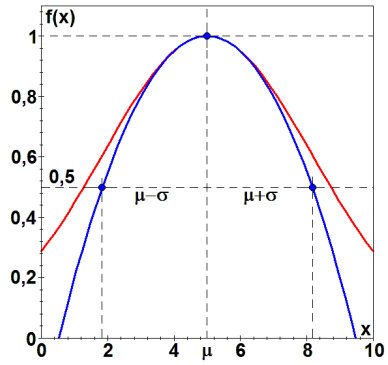


$\Rightarrow$

$$f(x)_T = 1 - \frac{1}{20} \cdot (x-5)^2$$

$\Rightarrow$

[1] Berechnung dazu siehe Maple©-Classic-Worksheet auf www.ZenithPoint.de

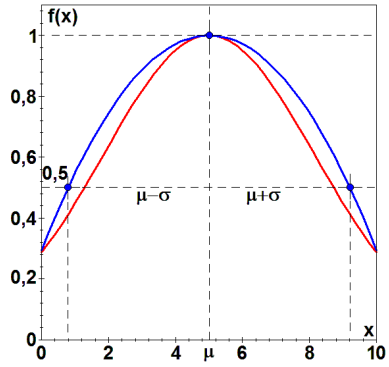


$\Rightarrow$

$$\sigma_*^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{M}{O} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-0,780}{0{,}022} = 17,702$$

$\Rightarrow$

$$f(x)_T = 1 - \frac{1}{35,403} \cdot (x-5)^2$$



$\Rightarrow$

$$a_2 = \frac{O}{M} = \frac{0,022}{-0,780} = -0,0282 < 0$$
$$a_1 = \frac{D}{A} - \frac{B}{A} \cdot a_2 = \frac{0}{-2} - \frac{-20}{-2} \cdot (-0,0282) = 0,282$$
$$a_0 = U - V \cdot a_1 - W \cdot a_2 = 0,662 - 5 \cdot 0,282 - 35 \cdot (-0,0282) = 0,239$$

$\Rightarrow$

$$P(x) = -0,0282 \cdot x^2 + 0,282 \cdot x + 0,239$$

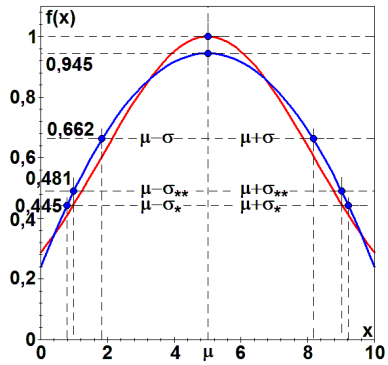
$\Rightarrow$

$$P(x) = -\frac{1}{2 \cdot \sigma_*^2} \cdot x^2 + \frac{\mu}{\sigma_*^2} \cdot x + \frac{2 \cdot \sigma_{**}^2 - \mu^2}{2 \cdot \sigma_{**}^2}$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_{**}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu^2}{1 - a_0^{**}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{1 - 0,239} = 16,42$$

$\Rightarrow$



4 Zusatz

4.1 Mittelwert μ

$$f(\mu) = e^{-\frac{1}{20}\cdot(\mu-5)^2} = 1$$

Sowie:

$$f(\mu)_T = 1 - \frac{1}{20}\cdot(\mu-5)^2 = 1$$

Sowie:

$$f(\mu)_T = 1 - \frac{1}{35,403}\cdot(\mu-5)^2 = 1$$

Sowie:

$$P(\mu) = -0,0282\cdot\mu^2 + 0,282\cdot\mu + 0,239 = 0,945$$

4.2 Standardabweichung σ

$$e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;2} = \mu \pm \sigma$$

Sowie:

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;2} = \mu \pm \sigma$$

Sowie:

$$P(\mu \pm \sigma_*) = a_2 \cdot (\mu \pm \sigma_*)^2 + a_1 \cdot (\mu \pm \sigma_*) + a_0$$

$\Rightarrow$

$$P(\mu \pm \sigma_*) = -\frac{1}{2\cdot\sigma_*^2}\cdot(\mu \pm \sigma_*)^2 + \frac{\mu}{\sigma_*^2}\cdot(\mu \pm \sigma_*) + \frac{2\cdot\sigma_{**}^2 - \mu^2}{2\cdot\sigma_{**}^2}$$

$\Rightarrow$

$$P(\mu \pm \sigma_*) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{\mu^2}{\sigma_*^2} - \frac{\mu^2}{\sigma_{**}^2}\right)$$

$\Rightarrow$

$$P(\mu \pm \sigma_*) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{25}{17,702} - \frac{25}{16,42}\right) = 0,445$$

Oder:

$$P(\mu \pm \sigma_{**}) = -\frac{1}{2\cdot\sigma_*^2}\cdot(\mu \pm \sigma_{**})^2 + \frac{\mu}{\sigma_*^2}\cdot(\mu \pm \sigma_{**}) + \frac{2\cdot\sigma_{**}^2 - \mu^2}{2\cdot\sigma_{**}^2}$$

$\Rightarrow$

$$P(\mu \pm \sigma_{**}) = \frac{1}{2\cdot\sigma_*^2}\cdot\left(\frac{\sigma_{**}^2 - \sigma_*^2}{\sigma_{**}^2}\cdot\mu^2 + 2\cdot\sigma_*^2 - \sigma_{**}^2\right)$$

$\Rightarrow$

$$P(\mu \pm \sigma_{**}) = \frac{1}{2\cdot 17,702}\cdot\left(\frac{16,42 - 17,702}{16,42}\cdot 25 + 2\cdot 17,702 - 16,42\right) = 0,481$$

Oder:

$$P(\mu \pm \sigma) = -\frac{1}{2\cdot\sigma_*^2}\cdot(\mu \pm \sigma)^2 + \frac{\mu}{\sigma_*^2}\cdot(\mu \pm \sigma) + \frac{2\cdot\sigma_{**}^2 - \mu^2}{2\cdot\sigma_{**}^2}$$

$\Rightarrow$

$$P(\mu \pm \sigma) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\mu^2 - \sigma^2}{\sigma_*^2} + \frac{2\cdot\sigma_{**}^2 - \mu^2}{\sigma_{**}^2}\right)$$

$\Rightarrow$

$$P(\mu \pm \sigma) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{25 - 10}{17,702} + \frac{2\cdot 16,42 - 25}{16,42}\right) = 0,662$$

Sowie:

$$\frac{1}{2}\cdot P(\mu) = -\frac{1}{2\cdot\sigma_*^2}\cdot x^2 + \frac{\mu}{\sigma_*^2}\cdot x + \frac{2\cdot\sigma_{**}^2 - \mu^2}{2\cdot\sigma_{**}^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2\cdot\sigma_*^2}\cdot\mu^2 + \frac{\mu}{\sigma_*^2}\cdot\mu + \frac{2\cdot\sigma_{**}^2 - \mu^2}{2\cdot\sigma_{**}^2}\right) = -\frac{1}{2\cdot\sigma_*^2}\cdot x^2 + \frac{\mu}{\sigma_*^2}\cdot x + \frac{2\cdot\sigma_{**}^2 - \mu^2}{2\cdot\sigma_{**}^2}$$

$\Rightarrow$

$$x^2 - 2\cdot\mu\cdot x + \frac{\mu^2\cdot\sigma_*^2 - 2\cdot\sigma_*^2\cdot\sigma_{**}^2 + \mu^2\cdot\sigma_{**}^2}{2\cdot\sigma_{**}^2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;2} = \mu \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{2}\cdot\left(1 - \frac{\sigma_*^2}{\sigma_{**}^2}\right) + \sigma_*^2} = \mu \pm \sigma_{eff}$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;2} = 5 \pm \sqrt{\frac{25}{2} \cdot \left(1 - \frac{17,702}{16,42}\right) + 17,702} = 5 \pm 4,09$$

$\Rightarrow$

$$x_1 = 0,910 \qquad x_2 = 9,09$$

Mit:

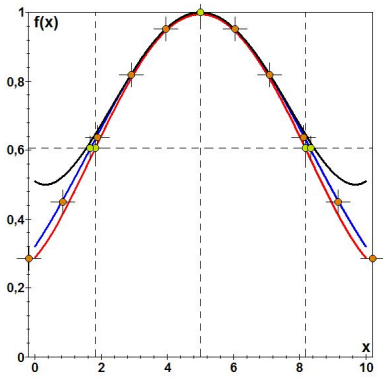
$$P\left(x_{1;2}\right) = 0,472 = \frac{1}{2} \cdot P\left(\mu\right) = \frac{1}{2} \cdot 0,945$$

LaTeX 2_ε

$$\oiint$$

3.4.5 Die vollständige Regression der Normalfunktion

Die vollständige Regression der Normalfunktion



Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 19. April 2023 – Letzte Revision: 6. Januar 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Herleitung **3**
1.1 Grundlagen 3
1.2 Regressionvorschrift I 4
1.3 Regressionvorschrift II 5
1.4 Genauigkeitabschätzung 6

2 Beispiele **7**
2.1 Beispiel I 7
2.2 Beispiel II 9

Literatur

[Dipa] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Die (Polynom)Regression von Datenpunkten. www.Zenithpoint.de.

[Dipb] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Die unvollständige Regression der Normalfunktion. www.Zenithpoint.de.

---

1 Herleitung

1.1 Grundlagen

[Dipb]

Gegeben ist die leicht modifizierte Normalfunktion:

$$N(x,\gamma,\omega_0) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\omega_0)^2}{\gamma^2\cdot\omega_0^2}}$$

In taylorisierter Schreibweise lässt sich diese Funktion allgemein darstellen durch:

$$N(x,\gamma,\omega_0)_T = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^i}{\prod_{j=1}^{i} 2\cdot j}\cdot\left(\frac{x-\omega_0}{\omega_0\cdot\gamma}\right)^{2\cdot i}\right)$$

Die ersten drei Glieder sollen hier ausreichend sein.

$$N(x,\gamma,\omega_0)_T = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\omega_0)^2}{\omega_0^2\cdot\gamma^2} + \frac{1}{8}\cdot\frac{(x-\omega_0)^4}{\omega_0^4\cdot\gamma^4}$$

Expandiert ergibt sich daraus ein biquadratisches Polynom.

$$N(x,\gamma,\omega_0)_T = \frac{1}{8\cdot\omega_0^4\cdot\gamma^4}\cdot x^4 - \frac{4}{8\cdot\omega_0^3\cdot\gamma^4}\cdot x^3 + \frac{6-4\cdot\gamma^2}{8\cdot\omega_0^2\cdot\gamma^4}\cdot x^2 + \frac{8\cdot\gamma^2-4}{8\cdot\omega_0\cdot\gamma^4}\cdot x + \frac{1-4\cdot\gamma^2+8\cdot\gamma^4}{8\cdot\gamma^4}$$

Zum Zwecke der Ermittlung der Wendestellen, werden die ersten zwei Ableitungen ermittelt.

$$N(x,\gamma,\omega_0)_T{}' = \frac{4}{8\cdot\omega_0^4\cdot\gamma^4}\cdot x^3 - \frac{12}{8\cdot\omega_0^3\cdot\gamma^4}\cdot x^2 + \frac{12-8\cdot\gamma^2}{8\cdot\omega_0^2\cdot\gamma^4}\cdot x + \frac{8\cdot\gamma^2-4}{8\cdot\omega_0\cdot\gamma^4}$$

$\Rightarrow$

$$N(x,\gamma,\omega_0)_T{}'' = \frac{12}{8\cdot\omega_0^4\cdot\gamma^4}\cdot x^2 - \frac{24}{8\cdot\omega_0^3\cdot\gamma^4}\cdot x + \frac{12-8\cdot\gamma^2}{8\cdot\omega_0^2\cdot\gamma^4} = 0$$

$\Rightarrow$

$$x^2 - 2\omega_0\cdot x + \frac{1}{3}\cdot\left(3-2\cdot\gamma^2\right)\cdot\omega_0^2 = 0$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung.

$$x_{1;2} = \omega_0 \pm \omega_0\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\gamma$$

Der Wert ω_0 ist direkt ablesbar.

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\omega_0\cdot\gamma$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sigma^2}{\omega_0^2}$$

Der Wert γ ist mit einer konstanten Abweichung belegt, das im Ergebnis ablesbar sein wird.

Die Ermittlung der Werte ist über eine biquadratische Regression vollständig durchführbar. Limitierend ist die Genauigkeit der biquadratischen Regression, besonders bei wenigen Daten in der Urliste.

1.2 Regressionvorschrift I

Gegeben ist die leicht modifizierte Normalfunktion:

$$N(x,\gamma,\omega_0) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\omega_0)^2}{\gamma^2\cdot\omega_0^2}}$$

Wie bekannt, befindet sich das Maximum an der Stelle:

$$N(x,\gamma,\omega_0)_{\max} = (\omega_0, 1)$$

Die Wendestellen liegen bei:

$$N(x,\gamma,\omega_0)_{W,1} = \left((1+\gamma)\cdot\omega_0, e^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad N(x,\gamma,\omega_0)_{W,2} = \left((1-\gamma)\cdot\omega_0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

In allgemeiner Darstellung:

$$N(x,\gamma,\omega_0)_{W,1} = (x = \omega_0 + \omega_0\cdot\gamma = (1+\gamma)\cdot\omega_0)$$

$$N(x,\gamma,\omega_0)_{W,2} = (x = \omega_0 - \omega_0\cdot\gamma = (1-\gamma)\cdot\omega_0)$$

Es wird die Normalfunktion als Polynom dargestellt.

$$P(N(x,\gamma,\omega_0)) = a_4\cdot x^4 + a_3\cdot x^3 + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x^1 + a_0\cdot x^0$$

Die Koeffizienten können durch eine biquadratische Regression ermittelt werden[1].

Von Interesse ist die zweite Ableitung von P.

$$P(N(x,\gamma,\omega_0))' = 4\cdot a_4\cdot x^3 + 3\cdot a_3\cdot x^2 + 2\cdot a_2\cdot x^1 + a_1\cdot x^0$$

$\Rightarrow$

$$P(N(x,\gamma,\omega_0))'' = 12\cdot a_4\cdot x^2 + 6\cdot a_3\cdot x^1 + 2\cdot a_2\cdot x^0$$

Die Wendestellen werden ermittelt:

$$x^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{a_3}{a_4}\cdot x^1 + \frac{1}{6}\cdot\frac{a_2}{a_4}\cdot x^0 = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{a_3}{a_4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}\cdot\frac{a_3^2}{a_4^2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{a_2}{a_4}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{a_3}{a_4}\cdot\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8}{3}\cdot\frac{a_2\cdot a_4}{a_3^2}}\right)$$

Über der allgemeinen Vorschrift der Wendestellen ist ω_0^2 und γ^2 berechenbar.

$$\omega_0^2 = \frac{1}{16}\cdot\frac{a_3^2}{a_4^2} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{16}\cdot\frac{a_3^2}{a_4^2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{a_2}{a_4} = \omega_0^2\cdot\gamma^2 = \frac{3\cdot a_3^2 - 8\cdot a_2\cdot a_4}{48\cdot a_4^2}$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = 1 - \frac{8}{3}\cdot\frac{a_2\cdot a_4}{a_3^2}$$

$\Rightarrow$

$$0 < 3\cdot a_3^2 > 8\cdot a_2\cdot a_4$$

Damit ist die vollständige Regression der Normalfunktion definiert.

[1] nach [Dipa], Maple-Classic-Worksheet©, unter www.Zenithpoint.de

1.3 Regressionvorschrift II

Aus den Koeffizienten des Polynoms sind die gesuchten Werte direkt ablesbar.

$$a_4 = \frac{1}{8 \cdot \omega_0^4 \cdot \gamma^4} \qquad a_3 = -\frac{4}{8 \cdot \omega_0^3 \cdot \gamma^4}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a_3}{a_4} = -4 \cdot \omega_0$$

Sowie:

$$a_4 = \frac{1}{8 \cdot \omega_0^4 \cdot \gamma^4} \qquad a_2 = \frac{6 - 4 \cdot \gamma^2}{8 \cdot \omega_0^2 \cdot \gamma^4}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a_2}{a_4} = 2 \cdot \left(3 - 2 \cdot \gamma^2\right) \cdot \omega_0^2$$

Oder:

$$a_3 = -\frac{4}{8 \cdot \omega_0^3 \cdot \gamma^4} \qquad a_2 = \frac{6 - 4 \cdot \gamma^2}{8 \cdot \omega_0^2 \cdot \gamma^4}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a_2}{a_3} = \left(\gamma^2 - \frac{3}{2}\right) \cdot \omega_0$$

In den letzten beiden Berechnungsgrundlagen ist oben beschriebene Abweichung von $2/3$ enthalten. Korrigiert ergibt sich dann:

$$\frac{a_2}{a_4} = 2 \cdot \left(3 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \gamma^2\right) \cdot \omega_0^2 \qquad \frac{a_2}{a_3} = \left(\frac{3}{2} \cdot \gamma^2 - \frac{3}{2}\right) \cdot \omega_0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a_2}{a_4} = 6 \cdot \left(1 - \gamma^2\right) \cdot \omega_0^2 \qquad \frac{a_2}{a_3} = \frac{3}{2} \cdot \left(\gamma^2 - 1\right) \cdot \omega_0$$

1.4 Genauigkeitabschätzung

Die Genauigkeit der Regression[2] kann über den Schnittpunkt mit der Ordinate abschätzt werden. So gilt für die modifizierte Normalfunktion:

$$N(0,\gamma,\omega_0) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\gamma^2}}$$

Für die taylorisierte Darstellung ist der Koeffizient a_0 aussagekräftig.

$$a_0(0,\gamma,\omega_0)_T = \frac{1-4\cdot\gamma^2+8\cdot\gamma^4}{8\cdot\gamma^4}$$

Durch ein Verhältnis beider Berechnungsgrundlagen zueinander lässt der Bereich hoher Genauigkeit darstellen durch:

$$R = \frac{N(0,\gamma,\omega_0)}{a_0(0,\gamma,\omega_0)_T} \to 1$$

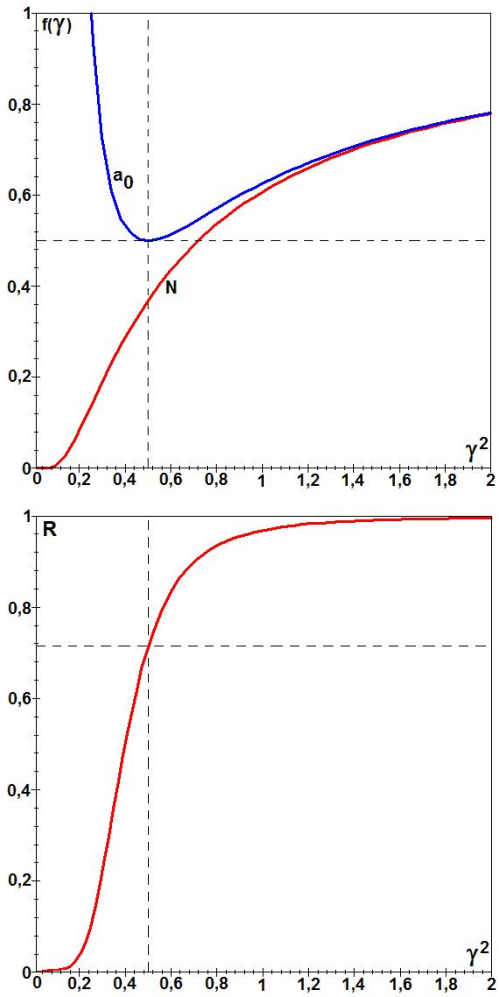
Da $a_0(0,\gamma,\omega_0)_T$ ein Minimum besitzt, ist auch eine Grenze für γ^2 definiert. So sollte gelten:

$$\gamma^2 > \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\sigma^2 > \frac{1}{2}\cdot\omega_0^2$$

$\Rightarrow$



Grafische Darstellung des Genauigkeitsabschätzers R der Regression der Normalfunktion. Werte von $\gamma^2 < 0,5$ sind möglichst einer Kontrolle zu unterziehen.

[2] R - Genauigkeitsabschätzung zwischen regressierter Polynomfunktion und Normalfunktion unter Nutzung der ermittelten Werte ω_0^2 und γ^2

2 Beispiele

2.1 Beispiel I

Mit $\omega_0^2 = 25$ und $\gamma^2 = 0,4$, daher $\sigma^2 = 10$.

n	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1	1	1
3	2	4	8	16	32	64	128	256
4	3	9	27	81	243	729	2 187	6 561
5	4	16	64	256	1 024	4 096	16 384	65 536
6	5	25	125	625	3 125	15 625	78 125	390 625
7	6	36	216	1 296	7 776	46 656	279 936	1 679 616
8	7	49	343	2 401	16 807	117 649	823 543	5 764 801
9	8	64	512	4 096	32 768	262 144	2 097 152	16 777 216
10	9	81	729	6 561	59 049	531 441	4 782 969	43 046 721
11	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000
11	**55**	**385**	**3 025**	**25 333**	**220 825**	**1 978 405**	**18 080 425**	**167 731 333**

n	$x^0 \cdot f(x)$	$x^1 \cdot f(x)$	$x^2 \cdot f(x)$	$x^3 \cdot f(x)$	$x^4 \cdot f(x)$	
1	0, 286 505	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
2	0, 449 329	0, 449 329	0, 449 329	0, 449 329	0, 449 329	
3	0, 637 628	1, 275 256	2, 550 513	5, 101 025	10, 202 048	
4	0, 818 731	2, 456 192	7, 368 577	22, 105 730	66, 317 211	
5	0, 951 229	3, 804 918	15, 219 671	60, 878 683	243, 514 624	
6	1, 000 000	5, 000 000	25, 000 000	125, 000 000	625, 000 000	
7	0, 951 229	5, 707 377	34, 244 259	205, 465 556	1232, 792 784	
8	0, 818 731	5, 731 115	40, 117 807	280, 824 648	1965, 773 131	
9	0, 637 628	5, 101 025	40, 808 202	326, 465 614	2611, 724 288	
10	0, 449 329	4, 043 961	36, 395 646	327, 560 815	2948, 047 569	
11	0, 286 505	2, 865 048	28, 650 480	286, 504 797	2865, 047 970	
11	**7, 286 844**	**36, 434 221**	**230, 804 483**	**1 640, 356 197**	**12 568, 868 950**	

Nativ sind die gesuchten Werte abschätzbar über[3]:

$$\omega_0^2 = \left(\frac{\{x\}}{n}\right)^2 = \left(\frac{55}{11}\right)^2 = 25$$

$\Rightarrow$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\{x^2\} \cdot n - \{x\}^2\right) = \frac{1}{11^2} \cdot \left(385 \cdot 11 - 55^2\right) = 10$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = \frac{10}{25} = 0,4$$

Über die Regressionsvorschriften ergibt sich[4]:

$$\begin{aligned} a_4 &= +0,00068966 \\ a_3 &= -0,01379317 \\ a_2 &= +0,05796129 \\ a_1 &= +0,11004546 \\ a_0 &= +0,28840569 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

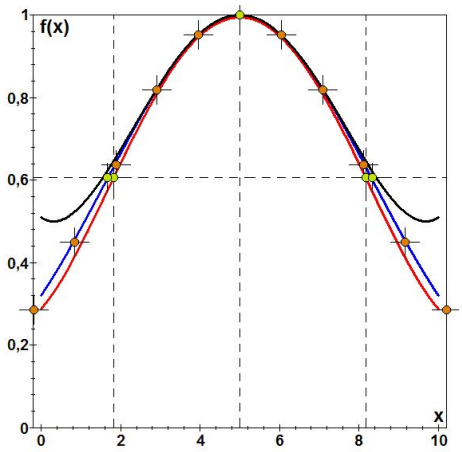
$$\omega_0^2 = 25 \qquad \sigma^2 = 11$$

[3] nach [Dipa]
[4] Ermittlung über Maple-Classic-Worksheet©, unter www.Zenithpoint.de

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = 0,44$$

Folgend Beispiel I grafisch dargestellt. Regressiertes Polynom **ROT** im Vergleich zur ermittelten Normalfunktion **BLAU**. **SCHWARZ**, die ersten drei Glieder der taylorisierten Normalfunktion. Ebenfalls eingezeichnet, Urlisten-, Wendepunkte und Mittelwert.



Der Genauigkeitsabschätzer R:

$$R = \frac{N(0,\gamma,\omega_0)}{a_0(0,\gamma,\omega_0)_T} = \frac{0,320984}{0,509298} = 0,63$$

2.2 Beispiel II

Mit $\omega_0^2 = 25$ und $\gamma^2 = 0,01$, daher $\sigma^2 = 0,25$.

n	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
-	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0
1	3	9	27	81	243	729	2 187	6 561
2	4	16	64	256	1 024	4 096	16 384	65 536
3	5	25	125	625	3 125	15 625	78 125	390 625
4	6	36	216	1 296	7 776	46 656	279 936	1 679 616
5	7	49	343	2 401	16 807	117 649	823 543	5 764 801
-	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0
5	**25**	**135**	**775**	**4 659**	**28 975**	**184 755**	**1 200 175**	**7 907 139**

n	$x^0 \cdot f(x)$	$x^1 \cdot f(x)$	$x^2 \cdot f(x)$	$x^3 \cdot f(x)$	$x^4 \cdot f(x)$	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
1	0, 000 335	0, 001 006	0, 003 019	0, 009 057	0, 027 172	
2	0, 135 335	0, 541 341	2, 165 365	8, 661 458	34, 645 833	
3	1, 000 000	5, 000 000	25, 000 000	125, 000 000	625, 000 000	
4	0, 135 335	0, 812 012	4, 872 070	29, 232 421	175, 394 527	
5	0, 000 335	0, 002 348	0, 016 438	0, 115 064	0, 805 446	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 062	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
5	**1, 271 340**	**6, 356 707**	**32, 056 892**	**163, 018 000**	**835, 873 040**	

Nativ sind die gesuchten Werte abschätzbar über[5]:

$$\omega_0^2 = \left(\frac{\{x\}}{n}\right)^2 = \left(\frac{25}{5}\right)^2 = 25$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_*^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\{x^2\} \cdot n - \{x\}^2\right) = \frac{1}{5^2} \cdot \left(135 \cdot 5 - 25^2\right) = 2$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = \frac{2}{25} = 0,08$$

Über die Regressionsvorschriften ergibt sich[6]:

$$\begin{aligned} a_4 &= +0,20486427 \\ a_3 &= -4,09727691 \\ a_2 &= +29,66016058 \\ a_1 &= -91,73799900 \\ a_0 &= +102,30532430 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

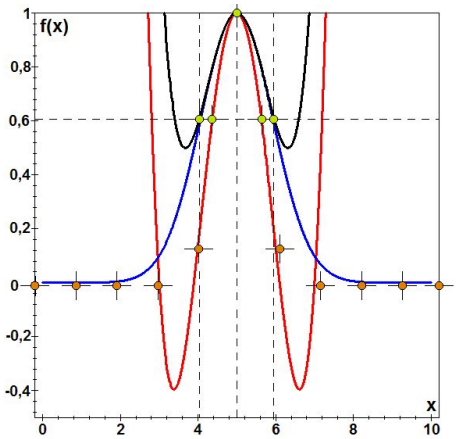
$$\omega_0^2 = 25 \qquad \sigma^2 = 0,87$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = 0,035$$

[5] nach [Dipa]
[6] Ermittlung über Maple-Classic-Worksheet©, unter www.Zenithpoint.de

Folgend Beispiel II grafisch dargestellt. Regressiertes Polynom **ROT** im Vergleich zur ermittelten Normalfunktion **BLAU**. **SCHWARZ**, die ersten drei Glieder der taylorisierten Normalfunktion. Ebenfalls eingezeichnet, Urlisten-, Wendepunkte und Mittelwert.



Obwohl effektiv nur drei Werte in der Urliste zur Verfügung stehen, ergeben sich nutzbare Ergebnisse.

Der Genauigkeitsabschätzer R:

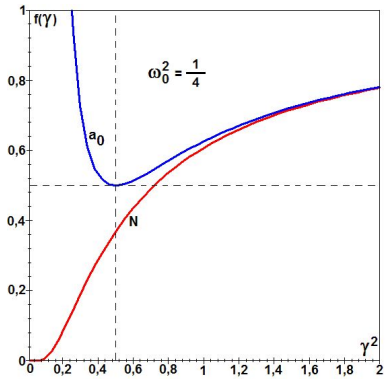
$$R = \frac{N(0,\gamma,\omega_0)}{a_0(0,\gamma,\omega_0)_T} = \frac{0,000001}{88,755102} \to 0$$

LaTeX 2ε

$$\oiint$$

3.4.6 Die Regression der ordinatensymmetrischen Normalfunktion

Die Regression der ordinatensymmetrischen Normalfunktion



Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 8. Mai 2023 – Letzte Revision: 6. Januar 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Herleitung **3**

1.1 Grundlagen 3

1.2 Regressionvorschrift I 5

1.3 Regressionvorschrift II 6

1.4 Genauigkeitabschätzung I 7

1.5 Genauigkeitabschätzung II 8

2 Beispiele **9**

2.1 Beispiel I 9

2.2 Beispiel II 11

2.3 Beispiel III 13

Literatur

[Dipa] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Die (Polynom)Regression von Datenpunkten. www.Zenithpoint.de.

[Dipb] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Die unvollständige Regression der Normalfunktion. www.Zenithpoint.de.

---

1 Herleitung

1.1 Grundlagen

[Dipb]

Gegeben ist die ordinatensymmetrische Normalfunktion:

$$N^*(x,\gamma,\omega_0) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2-\omega_0^2\right)^2}{\gamma^2\cdot\omega_0^2}}$$

Da die Regression sehr aufwändig durchzuführen ist, wird ein rechtsseitiges Substitut genutzt. Dafür wird festgelegt:

$$N(x,\gamma,\omega_0) = e^{-\frac{Z}{2}\cdot\frac{(x-\omega_0)^2}{\gamma^2\cdot\omega_0^2}} \cong N^*(x,\gamma,\omega_0) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\omega_0)^2}{\gamma^2\cdot\omega_0^2}\cdot(x+\omega_0)^2}$$

Zur Ermittlung des Substituts Z wird bis x^2 taylorisiert.

$$N(x,\gamma,\omega_0)_T = 1-\frac{Z}{2}\cdot\frac{(x-\omega_0)^2}{\gamma^2\cdot\omega_0^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{Z}{\gamma^2\cdot\omega_0^2}\cdot x^2+\frac{Z}{\gamma^2\cdot\omega_0}\cdot x+\frac{2\cdot\gamma^2-Z}{2\cdot\gamma^2}$$

Und:

$$N^*(x,\gamma,\omega_0)_T = 1-2\cdot\frac{(x-\omega_0)^2}{\gamma^2} = -2\cdot\frac{1}{\gamma^2}\cdot x^2+4\cdot\frac{\omega_0}{\gamma^2}\cdot x+\frac{\gamma^2-2\cdot\omega_0^2}{\gamma^2}$$

Von beiden werden die Nullstellen gesucht:

$$N(x,\gamma,\omega_0)_T = x^2-2\cdot\omega_0\cdot x+\left(Z-2\cdot\gamma^2\right)\cdot\frac{\omega_0^2}{Z} = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;2} = \omega_0 \pm \omega_0\cdot\gamma\cdot\sqrt{\frac{2}{Z}}$$

Sowie:

$$N^*(x,\gamma,\omega_0)_T = x^2-2\cdot\omega_0\cdot x+\omega_0^2-\frac{1}{2}\cdot\gamma^2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{3;4} = \omega_0 \pm \gamma\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Die korrespondierenden Nullstellen werden gleichgesetzt.

$$\omega_0+\omega_0\cdot\gamma\cdot\sqrt{\frac{2}{Z}} = \omega_0+\gamma\cdot\sqrt{\frac{1}{2}} \qquad \omega_0-\omega_0\cdot\gamma\cdot\sqrt{\frac{2}{Z}} = \omega_0-\gamma\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow$

$$Z = 4\cdot\omega_0^2$$

Das Substitut ist ermittelt, der Ersatz für die ordinatensymmetrische Normalfunktion ist definiert.

$$N(x,\gamma,\omega_0) = e^{-2\cdot\frac{(x-\omega_0)^2}{\gamma^2}}$$

Eine weitere Möglichkeit ist das Flächenintegral zwischen Normalfunktion und Abszisse.

$$\int_{x_1}^{x_2} N(x,\gamma,\omega_0)_T\,dx = \frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{Z}}\cdot\gamma\cdot\omega_0$$

Sowie:

$$\int_{x_3}^{x_4} N^*(x,\gamma,\omega_0)_T\,dx = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\gamma$$

Auch diese beiden Ausdrücke werden gleichgesetzt.

$$\int_{x_1}^{x_2} N(x,\gamma,\omega_0)_T\,dx = \int_{x_3}^{x_4} N^*(x,\gamma,\omega_0)_T\,dx$$

$\Rightarrow$

$$Z = 4\cdot\omega_0^2$$

Letztendlich ist der Wert ω_0 direkt aus den Nullstellen ablesbar. Für γ gilt:

$$\sigma = \gamma\cdot\sqrt{\frac{1}{2}} \qquad \sigma_\mathrm{T} = \gamma_\mathrm{T}\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = 2\cdot\sigma^2 \qquad \gamma_\mathrm{T}^2 = 6\cdot\sigma_\mathrm{T}^2$$

Der Wert γ ist mit einer konstanten Abweichung belegt, das im Regressionsergebnis enthalten sein wird.

Die Ermittlung der Werte ist über eine biquadratische Regression vollständig durchführbar. Limitierend ist die Genauigkeit der biquadratischen Regression, besonders bei wenigen Daten in der Urliste.

1.2 Regressionvorschrift I

Gegeben ist die leicht modifizierte Normalfunktion:

$$N(x,\gamma,\omega_0) = e^{-2\cdot\frac{(x-\omega_0)^2}{\gamma^2}}$$

Wie bekannt, befindet sich das Maximum an der Stelle:

$$N(x,\gamma,\omega_0)_{\max} = (\omega_0, 1)$$

Die Wendestellen liegen bei:

$$N(x,\gamma,\omega_0)_{W,1} = \left(\omega_0 + \frac{1}{2}\cdot\gamma, e^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad N(x,\gamma,\omega_0)_{W,2} = \left(\omega_0 - \frac{1}{2}\cdot\gamma, e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Es wird die Normalfunktion als Polynom dargestellt.

$$P(\ldots) = \frac{2}{\gamma^4}\cdot x^4 - \frac{8\cdot\omega_0}{\gamma^4}\cdot x^3 + \frac{12\cdot\omega_0^2 - 2\cdot\gamma^2}{\gamma^4}\cdot x^2 + \frac{4\cdot\omega_0\cdot\gamma^2 - 8\cdot\omega_0^3}{\gamma^4}\cdot x + \frac{\gamma^4 - 2\cdot\omega_0^2\cdot\gamma^2 + 2\cdot\omega_0^4}{\gamma^4}$$

$\Rightarrow$

$$P(N(x,\gamma,\omega_0)) = a_4\cdot x^4 + a_3\cdot x^3 + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x^1 + a_0\cdot x^0$$

Die Koeffizienten können durch eine biquadratische Regression ermittelt werden[1].

Von Interesse ist die zweite Ableitung von P.

$$P(N(x,\gamma,\omega_0))' = 4\cdot a_4\cdot x^3 + 3\cdot a_3\cdot x^2 + 2\cdot a_2\cdot x^1 + a_1\cdot x^0$$

$\Rightarrow$

$$P(N(x,\gamma,\omega_0))'' = 12\cdot a_4\cdot x^2 + 6\cdot a_3\cdot x^1 + 2\cdot a_2\cdot x^0$$

Die Wendestellen werden ermittelt:

$$x^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{a_3}{a_4}\cdot x^1 + \frac{1}{6}\cdot\frac{a_2}{a_4}\cdot x^0 = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{a_3}{a_4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}\cdot\frac{a_3^2}{a_4^2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{a_2}{a_4}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{a_3}{a_4}\cdot\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8}{3}\cdot\frac{a_2\cdot a_4}{a_3^2}}\right)$$

Über der allgemeinen Vorschrift der Wendestellen ist ω_0^2 und γ^2 berechenbar.

$$\omega_0^2 = \frac{1}{16}\cdot\frac{a_3^2}{a_4^2} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{16}\cdot\frac{a_3^2}{a_4^2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{a_2}{a_4} = \gamma^2 = \frac{3\cdot a_3^2 - 8\cdot a_2\cdot a_4}{48\cdot a_4^2}$$

$\Rightarrow$

$$0 < 3\cdot a_3^2 > 8\cdot a_2\cdot a_4$$

Damit ist die vollständige Regression der Normalfunktion definiert.

[1] nach [Dipa], Maple-Classic-Worksheet©, unter www.Zenithpoint.de

1.3 Regressionvorschrift II

Aus den Koeffizienten des Polynoms sind die gesuchten Werte direkt ablesbar.

$$a_4 = \frac{2}{\gamma^4} \qquad a_3 = -8 \cdot \frac{\omega_0}{\gamma^4}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a_3}{a_4} = -4 \cdot \omega_0$$

Sowie:

$$a_4 = \frac{2}{\gamma^4} \qquad a_2 = \frac{12 \cdot \omega_0^2 - 2 \cdot \gamma^2}{\gamma^4}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a_2}{a_4} = 6 \cdot \omega_0^2 - \gamma^2$$

Oder:

$$a_3 = -8 \cdot \frac{\omega_0}{\gamma^4} \qquad a_2 = \frac{12 \cdot \omega_0^2 - 2 \cdot \gamma^2}{\gamma^4}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a_2}{a_3} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{6 \cdot \omega_0^2 - \gamma^2}{\omega_0}$$

$\Rightarrow$

$$-4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{a_2}{a_3} = 6 \cdot \omega_0^2 - \gamma^2 = \frac{a_2}{a_4}$$

In den letzten beiden Berechnungsgrundlagen ist oben beschriebene Abweichung von 6 in γ^2 enthalten. Korrigiert ergibt sich dann:

$$-4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{a_2}{a_3} = 6 \cdot \left(\omega_0^2 - \gamma^2\right) = \frac{a_2}{a_4}$$

1.4 Genauigkeitabschätzung I

Die Genauigkeit der Regression[2] kann über den Schnittpunkt mit der Ordinate abschätzt werden. So gilt für die modifizierte Normalfunktion:

$$N(0,\gamma,\omega_0) = e^{-2\cdot\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}$$

Für die taylorisierte Darstellung ist der Koeffizient a_0 aussagekräftig.

$$N(x,\gamma,\omega_0)_T = \frac{2}{\gamma^4}\cdot x^4 - \frac{8\cdot\omega_0}{\gamma^4}\cdot x^3 + \frac{12\cdot\omega_0^2 - 2\cdot\gamma^2}{\gamma^4}\cdot x^2 + \frac{4\cdot\omega_0\cdot\gamma^2 - 8\cdot\omega_0^3}{\gamma^4}\cdot x + \frac{\gamma^4 - 2\cdot\omega_0^2\cdot\gamma^2 + 2\cdot\omega_0^4}{\gamma^4}$$

$\Rightarrow$

$$a_0(0,\gamma,\omega_0)_T = \frac{\gamma^4 - 2\cdot\omega_0^2\cdot\gamma^2 + 2\cdot\omega_0^4}{\gamma^4}$$

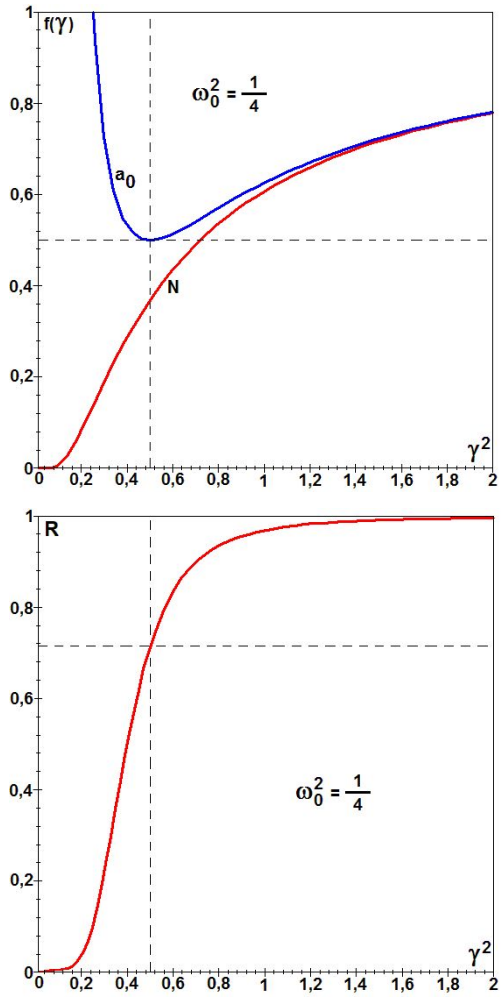
Durch ein Verhältnis beider Berechnungsgrundlagen zueinander lässt der Bereich hoher Genauigkeit darstellen durch:

$$R = \frac{N(0,\gamma,\omega_0)}{a_0(0,\gamma,\omega_0)_T} \to 1$$

Da $a_0(0,\gamma,\omega_0)_T$ ein Minimum besitzt, ist auch eine Grenze für γ^2 definiert. So sollte gelten:

$$\gamma^2 > 2\cdot\omega_0^2 \qquad \sigma^2 > 2\cdot\omega_0^2$$

$\Rightarrow$



Grafische Darstellung des Genauigkeitsabschätzers R der Regression der Normalfunktion. Werte von $\gamma^2 < 2\cdot\omega_0^2$ sind möglichst einer Kontrolle zu unterziehen.

[2] R - Genauigkeitsabschätzung zwischen regressierter Polynomfunktion und Normalfunktion unter Nutzung der ermittelten Werte ω_0^2 und γ^2

1.5 Genauigkeitabschätzung II

Gegeben ist die ordinatensymmetrische Normalfunktion:

$$N^*(x,\gamma,\omega_0) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2-\omega_0^2\right)^2}{\gamma^2\cdot\omega_0^2}}$$

$\Rightarrow$

$$N^*(0,\gamma,\omega_0) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}$$

Das rechtsseitige Substitut dazu:

$$N(x,\gamma,\omega_0) = e^{-2\cdot\frac{(x-\omega_0)^2}{\gamma^2}}$$

$\Rightarrow$

$$N(0,\gamma,\omega_0) = e^{-2\cdot\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}$$

Der Genauigkeitsabschätzer R^*[3] wird definiert durch:

$$R^* = (1+r^*)\cdot\frac{1+N(0,\gamma,\omega_0)}{1+N^*(0,\gamma,\omega_0)} - r^* \to 1$$

$\Rightarrow$

$$R^* = \frac{1+e^{-2\cdot\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}}{1+e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}} + \frac{e^{-2\cdot\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}} - e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}}{1+e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}}\cdot r^* \to 1$$

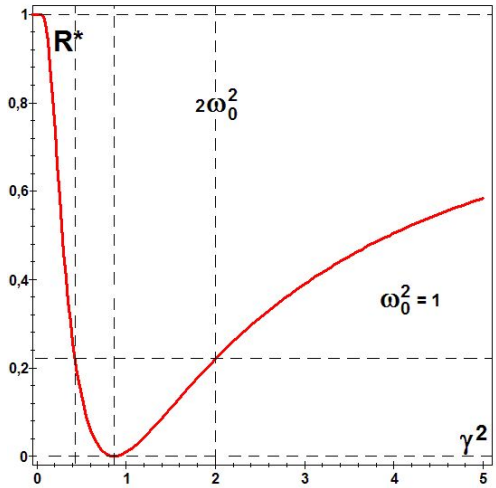
Mit:

$$r^* = 2,379143974...$$

Der Genauigkeitsabschätzer besitzt ein Minimum bei:

$$\gamma^2 = 0,8635\cdot\omega_0^2$$

Dieser Bereich wird vom Genauigkeitsabschätzer R überdeckt.



Grafische Darstellung des Genauigkeitsabschätzers R^* der Regression der Normalfunktion. Werte von $\gamma^2 < 2\cdot\omega_0^2$ sind möglichst einer Kontrolle zu unterziehen.

[3] R^* - Genauigkeitsabschätzung zwischen ordinatensymmetrischer Normal und der substituierten Normalfunktion unter Nutzung der ermittelten Werte ω_0^2 und γ^2

2 Beispiele

2.1 Beispiel I

Mit $\omega_0^2 = 25$ und $\gamma^2 = 12$, daher $\sigma^2 = 12$.

n	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4	2	4	8	16	32	64	128	256
5	3	9	27	81	243	729	2 187	6 561
6	4	16	64	256	1 024	4 096	16 384	65 536
7	5	25	125	625	3 125	15 625	78 125	390 625
8	6	36	216	1 296	7 776	46 656	279 936	1 679 616
9	7	49	343	2 401	16 807	117 649	823 543	5 764 801
10	8	64	512	4 096	32 768	262 144	2 097 152	16 777 216
11	9	81	729	6 561	59 049	531 441	4 782 969	43 046 721
12	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000
13	11	121	1 331	14 641	161 051	1 771 561	19 487 171	214 358 881
13	**65**	**507**	**4 355**	**39 975**	**381 875**	**3 749 967**	**37 567 595**	**382 090 215**

n	$x^0 \cdot f(x)$	$x^1 \cdot f(x)$	$x^2 \cdot f(x)$	$x^3 \cdot f(x)$	$x^4 \cdot f(x)$	
1	0, 005 841	-0, 005 841	0, 005 841	-0, 005 841	0, 005 841	
2	0, 015 504	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
3	0, 069 483	0, 069 483	0, 069 483	0, 069 483	0, 069 783	
4	0, 223 130	0, 446 260	0, 892 521	1, 785 041	3, 570 083	
5	0, 513 417	1, 540 251	4, 620 754	13, 862 262	41, 586 787	
6	0, 846 482	3, 385 927	13, 543 708	54, 174 830	216, 699 322	
7	1, 000 000	5, 000 000	25, 000 000	125, 000 000	625, 000 000	
8	0, 846 482	5, 078 890	30, 473 342	182, 840 053	1097, 040 315	
9	0, 513 417	3, 593 920	25, 157 439	176, 102 072	1232, 714 503	
10	0, 223 130	1, 785 041	14, 280 330	114, 242 642	913, 941 136	
11	0, 069 483	0, 625 351	5, 628 160	50, 653 436	455, 880 923	
12	0, 015 504	0, 155 039	1, 550 385	15, 503 854	155, 038 536	
13	0, 005 841	0, 064 251	0, 706 758	7, 774 341	85, 517 749	
13	**4, 347 714**	**21, 738 572**	**121, 978 721**	**742, 002 173**	**4 827, 064 678**	

Nativ sind die gesuchten Werte abschätzbar über[4]:

$$\omega_0^2 = \left(\frac{\{x\}}{n}\right)^2 = \left(\frac{65}{13}\right)^2 = 25$$

$\Rightarrow$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\{x^2\} \cdot n - \{x\}^2\right) = \frac{1}{13^2} \cdot \left(507 \cdot 13 - 65^2\right) = 14$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = 14$$

Über die Regressionsvorschriften ergibt sich[5]:

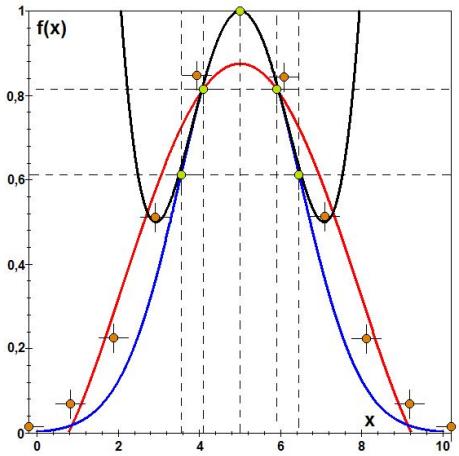
$$\begin{aligned} a_4 &= +0,00144541 \\ a_3 &= -0,02894461 \\ a_2 &= +0,14258814 \\ a_1 &= +0,02317022 \\ a_0 &= -0,09053861 \end{aligned}$$

[4] nach [Dipa]
[5] Ermittlung über Maple-Classic-Worksheet©, unter www.Zenithpoint.de

$\Rightarrow$

$$\omega_0^2 = 25 \qquad \gamma^2 = 8,62$$

Folgend Beispiel I grafisch dargestellt. Regressiertes Polynom **ROT** im Vergleich zur ermittelten substituierten Normalfunktion **BLAU**. **SCHWARZ**, die ersten drei Glieder der taylorisierten Normalfunktion. Ebenfalls eingezeichnet, Urlisten-, Wendepunkte und Mittelwert.



Der Genauigkeitsabschätzer R:

$$R = \frac{N(0,\gamma,\omega_0)}{a_0(0,\gamma,\omega_0)_T} = \frac{0,002985}{-0,090539} = -0,033$$

Der Genauigkeitsabschätzer R^*:

$$R^* = (1+r^*)\cdot\frac{1+N(0,\gamma,\omega_0)}{1+N^*(0,\gamma,\omega_0)} - r^* = 3,379144\cdot\frac{1,003026}{1,234543} - 2,379144 = 0,366$$

2.2 Beispiel II

Mit $\omega_0^2 = 25$ und $\gamma^2 = 14$, daher $\sigma^2 = 14$.

n	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4	2	4	8	16	32	64	128	256
5	3	9	27	81	243	729	2 187	6 561
6	4	16	64	256	1 024	4 096	16 384	65 536
7	5	25	125	625	3 125	15 625	78 125	390 625
8	6	36	216	1 296	7 776	46 656	279 936	1 679 616
9	7	49	343	2 401	16 807	117 649	823 543	5 764 801
10	8	64	512	4 096	32 768	262 144	2 097 152	16 777 216
11	9	81	729	6 561	59 049	531 441	4 782 969	43 046 721
12	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000
13	11	121	1 331	14 641	161 051	1 771 561	19 487 171	214 358 881
13	**65**	**507**	**4 355**	**39 975**	**381 875**	**3 749 967**	**37 567 595**	**382 090 215**

n	$x^0 \cdot f(x)$	$x^1 \cdot f(x)$	$x^2 \cdot f(x)$	$x^3 \cdot f(x)$	$x^4 \cdot f(x)$	
1	0, 439 175	-0, 439 175	0, 439 175	-0, 439 175	0, 439 175	
2	0, 409 484	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
3	0, 439 175	0, 439 175	0, 439 175	0, 439 175	0, 439 175	
4	0, 532 592	1, 065 184	2, 130 367	4, 260 734	8, 521 469	
5	0, 693 701	2, 081 103	6, 243 309	18, 729 926	56, 189 779	
6	0, 890 730	3, 562 919	14, 251 675	57, 006 700	228, 026 798	
7	1, 000 000	5, 000 000	25, 000 000	125, 000 000	625, 000 000	
8	0, 841 258	5, 047 547	30, 285 280	181, 711 682	1090, 270 091	
9	0, 439 175	3, 074 226	21, 519 579	150, 637 051	1054, 459 353	
10	0, 113 852	0, 910 815	7, 286 519	58, 292 153	466, 337 2221	
11	0, 011 333	0, 102 001	0, 918 006	8, 262 058	74, 358 524	
12	0, 000 324	0, 003 237	0, 032 369	0, 323 693	3, 236 932	
13	0, 000 019	0, 000 021	0, 000 232	0, 002 549	0, 028 040	
13	**5, 810 818**	**20, 847 053**	**108, 545 686**	**604, 227 546**	**3 607, 306 557**	

Nativ sind die gesuchten Werte abschätzbar über[6]:

$$\omega_0^2 = \left(\frac{\{x\}}{n}\right)^2 = \left(\frac{65}{13}\right)^2 = 25$$

$\Rightarrow$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\{x^2\} \cdot n - \{x\}^2\right) = \frac{1}{13^2} \cdot \left(507 \cdot 13 - 65^2\right) = 14$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = 14$$

Über die Regressionsvorschriften ergibt sich[7]:

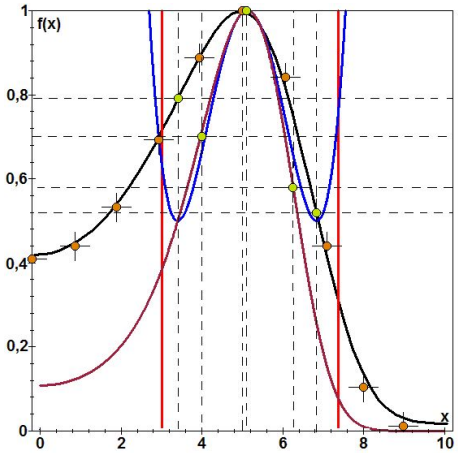
$$\begin{aligned} a_4 &= -60411,65 \\ a_3 &= +1237575,73 \\ a_2 &= -7370220,88 \\ a_1 &= +10356282,47 \\ a_0 &= +616835146,55 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\omega_0^2 = 26,23 \qquad \gamma^2 = 5,9$$

[6] nach [Dipa]
[7] Ermittlung über Maple-Classic-Worksheet©, unter www.Zenithpoint.de

Folgend Beispiel II grafisch dargestellt. Regressiertes Polynom **ROT** im Vergleich zur ermittelten substituierten Normalfunktion **BRAUN**. **BLAU**, die ersten drei Glieder der taylorisierten Normalfunktion, sowie **SCHWARZ** die ordinatensymmetrische Normalfunktion mit den nativen Werten. Ebenfalls eingezeichnet, Urlisten-, Wendepunkte und Mittelwert.



Der Genauigkeitsabschätzer R:

$$R = \frac{N(0,\gamma,\omega_0)}{a_0(0,\gamma,\omega_0)_T} = \frac{0,000137}{0,108130} = 0,001$$

Der Genauigkeitsabschätzer R^*:

$$R^* = (1+r^*)\cdot\frac{1+N(0,\gamma,\omega_0)}{1+N^*(0,\gamma,\omega_0)} - r^* = 3,379144\cdot\frac{1,000137}{1,108130} - 2,379144 = 0,671$$

2.3 Beispiel III

Mit $\omega_0^2 = 25$ und $\gamma^2 = 0,4$, daher $\sigma^2 = 0,4$.

n	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
-	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0
1/-	3	9	27	81	243	729	2 187	6 561
2/1	4	16	64	256	1 024	4 096	16 384	65 536
3/2	5	25	125	625	3 125	15 625	78 125	390 625
4/3	6	36	216	1 296	7 776	46 656	279 936	1 679 616
5/-	7	49	343	2 401	16 807	117 649	823 543	5 764 801
-	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0
3	**15**	**77**	**405**	**2 177**	**11 925**	**66 377**	**374 445**	**2 135 777**
5	**25**	**135**	**775**	**4 659**	**28 975**	**184 755**	**1 200 175**	**7 907 139**

n	$x^0 \cdot f(x)$	$x^1 \cdot f(x)$	$x^2 \cdot f(x)$	$x^3 \cdot f(x)$	$x^4 \cdot f(x)$	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
1	0, 006 738	0, 026 952	0, 107 807	0, 431 229	1, 724 914	
2	1, 000 000	5, 000 000	25, 000 000	125, 000 000	625, 000 000	
3	0, 006 738	0, 040 428	0, 242 566	1, 455 397	8, 732 379	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 062	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
3	**1, 013 476**	**5, 067 380**	**25, 350 373**	**126, 886 626**	**635, 457 293**	

Nativ sind die gesuchten Werte abschätzbar über[8]:

$$\omega_0^2 = \left(\frac{\{x\}}{n}\right)^2 = \left(\frac{15}{3}\right)^2 = 25$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_*^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\{x^2\} \cdot n - \{x\}^2\right) = \frac{1}{3^2} \cdot \left(77 \cdot 3 - 15^2\right) = 0,67$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = 0,67$$

Über die Regressionsvorschriften[9] ergibt sich[10]:

$$\begin{aligned} a_4 &= +0,24772461 \\ a_3 &= -4,95449010 \\ a_2 &= +35,91777344 \\ a_1 &= -111,45329100 \\ a_0 &= +124,80543790 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

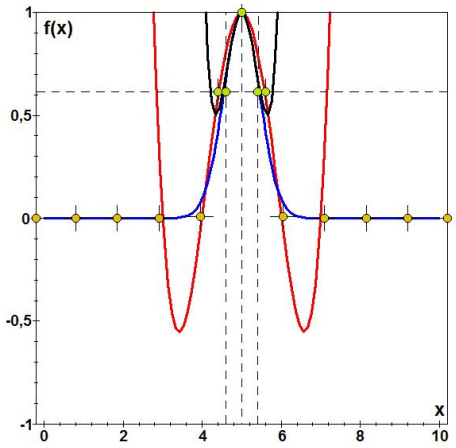
$$\omega_0^2 = 25 \qquad \gamma^2 = 0,835$$

[8] nach [Dipa]

[9] Eine biquadratische Regression verlangt mindestens 5 Stützpunkte auf der Abszisse, in der Tabelle grau eingezeichnet und hier genutzt.

[10] Ermittlung über Maple-Classic-Worksheet©, unter www.Zenithpoint.de

Folgend Beispiel III grafisch dargestellt. Regressiertes Polynom **ROT** im Vergleich zur ermittelten substituierten Normalfunktion **BLAU**. **SCHWARZ**, die ersten drei Glieder der taylorisierten Normalfunktion. Ebenfalls eingezeichnet, Urlisten-, Wendepunkte und Mittelwert.



Obwohl effektiv nur drei Werte in der Urliste zur Verfügung stehen, ergeben sich nutzbare Ergebnisse.

Der Genauigkeitsabschätzer R:

$$R = \frac{N(0,\gamma,\omega_0)}{a_0(0,\gamma,\omega_0)_T} = \frac{0,000001}{124,80543790} \to 0$$

Der Genauigkeitsabschätzer R^*:

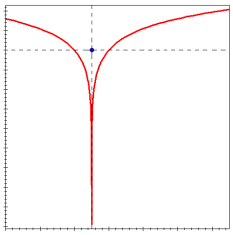
$$R^* = (1+r^*) \cdot \frac{1+N(0,\gamma,\omega_0)}{1+N^*(0,\gamma,\omega_0)} - r^* = 3,379144 \cdot \frac{1,000000}{1,000003} - 2,379144 = 0,999$$

LaTeX 2ε

$$\oiint$$

3.4.7 Die Regression der Hill-Funktion

Die Regression der Hill-Funktion



The regression of the Hill function

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 30. Oktober 2024 - Letzte Revision: 20. November 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Herleitungen **5**
2.1 Derivatbildung von $H(x)$ . . . 5
2.2 Schätzung der Koeffizienten a und b . . . 6
2.3 Regression der Koeffizienten c und d . . . 7
2.4 Sonderfälle der Hill-Funktion . . . 8

3 Zusammenfassung **9**

4 Anhang **11**
4.1 Beispiele . . . 11
4.1.1 Beispiel I . . . 11
4.1.2 Beispiel II mit $a \neq 0$ . . . 16
4.1.3 Beispiel II mit $a = 0$ . . . 22
4.2 Grafische Darstellungen . . . 28
4.2.1 Derivate . . . 28
4.2.2 Beispiel I . . . 31
4.2.3 Beispiel II mit $a \neq 0$ . . . 32
4.2.4 Beispiel II mit $a = 0$ . . . 33
4.2.5 Beispiel II mit Werten aus [F.] . . . 34

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

[Dip] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Reduzierte Lineare Regression, Fehlen von Anstieg oder Inhomogenität, Hinzufügen eines definierten Punktes. www.Zenithpoint.de.

[F.] F. Piva; M. Grigoletto; R. Brescancin; C. De Santi; M. Buffolo; J. Ruschel; J. Glaab; D. Hauer Vidal; M. Guttmann; J. Rass; S. Einfeldt; N. Susilo; T. Wernicke; M. Kneissl; G. Meneghesso; E. Zanoni; M. Meneghini. Impact of Mg-doping on the performance and degradation of AlGaN-based UV-C LEDs. https://doi.org/10.1063/5.0142054 Appl. Phys. Lett. 122, 151108 (2023).

1 Einleitung

[001]

Gegeben ist eine speziell zusammengesetzte Funktion H, die in der Literatur gewöhnlich als nach dessen Erstbeschreiber Archibald Hill „Hill's formula“ genannt wird. Je nach Anwendungsgebiet, das diese Funktion nutzt, existieren verschiedene Schreibweisen, auch in der Anzahl voneinander unabhängiger Koeffizienten, gibt es je nach Anwendungsfall Unterschiede. Im vorliegenden Fall wird als Hill-Funktion folgende Berechnungsgrundlage benannt:

$$H\left(x\right) = 1 - \frac{1-a}{1+\frac{b}{\left(x+c\right)^d}}$$

Gesucht ist eine Berechnungsmöglichkeit der Koeffizienten a, b, c und d für vorliegende Datenpunkte $P_i\left(x_i; H^{*0}\left(x_i\right)\right)$. Diese Aufgabe teilt sich in zwei Schritte auf. Zuerst die Umwandlung der Hill-Funktion in eine regressionsfähige Form, danach die eigentliche Regression selbst.

Wie bei jeder Regression erforderlich, funktioniert folgendes vorangehen nur, wenn vorliegende Daten sicher „Hill-verteilt“ sind. Ebenso muss der volle Definitionsbereich ausgenutzt sein, da sonst die unweigerlichen Regressionsfehler die Ergebnisse unbrauchbar gestalten.

Im Hinblick auf eine nötige Vorabschätzung des Koeffizienten c, ist eine „langgezogene“ Datensatzbreite von Vorteil.

Vorliegendes Skript ist ein Arbeitsblatt und entbehrt daher jeder Vollständigkeit und kann unter gegeben Umständen von mathematischen Vorgaben abweichen. Typografische Fehlerfreiheit im Bereich der Möglichkeiten.

2 Herleitungen

2.1 Derivatbildung von $H(x)$

Definiert werden acht Derivate von $H(x)$ durch schrittweises Umstellen.

$$
\begin{aligned}
H^{*0}(x) &= H(x) \\
H^{*1}(x) &= 1 - H^{*0}(x) \\
H^{*2}(x) &= H^{*1}(x)^{-1} \\
H^{*3}(x) &= H^{*2}(x) \cdot (1-a) \\
H^{*4}(x) &= H^{*3}(x) - 1 \\
H^{*5}(x) &= H^{*4}(x)^{-1} \\
H^{*6}(x) &= H^{*5}(x) \cdot b \\
H^{*7}(x) &= \ln H^{*6}(x)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
H^{*0}(x) &= 1 - \frac{1-a}{1+\frac{b}{(x+c)^d}} \\
H^{*1}(x) &= \frac{1-a}{1+\frac{b}{(x+c)^d}} \\
H^{*2}(x) &= \frac{1+\frac{b}{(x+c)^d}}{1-a} \\
H^{*3}(x) &= 1 + \frac{b}{(x+c)^d} \\
H^{*4}(x) &= \frac{b}{(x+c)^d} \\
H^{*5}(x) &= \frac{(x+c)^d}{b} \\
H^{*6}(x) &= (x+c)^d \\
H^{*7}(x) &= d \cdot \ln(x+c)
\end{aligned}
$$

Ein Zusammenhang zwischen $H^{*7}(x)$ und $H^{*0}(x)$ ist bekannt.

$$
H^{*7}(x) = \ln b - \ln\left(\frac{1-a}{1-H^{*0}(x)} - 1\right) = \ln b - \ln\frac{H^{*0}(x)-a}{1-H^{*0}(x)} = \ln\left(\frac{1-H^{*0}(x)}{H^{*0}(x)-a} \cdot b\right)
$$

Um $H^{*7}(x)$ berechnen zu können, ist die Ermittlung der Koeffizienten a und b nötig.

2.2 Schätzung der Koeffizienten a und b

• Berechnung von a[1]

Bekannt sind $H^{*2}(x)$ und $H^{*3}(x)$.

$$H^{*2}(x) = \frac{1 + \frac{b}{(x+c)^d}}{1-a} \qquad H^{*3}(x) = 1 + \frac{b}{(x+c)^d}$$

Damit kann der Koeffizient a definiert werden.

$$\frac{H^{*3}(x)}{H^{*2}(x)} = 1 - a$$

$\Rightarrow$

$$a = \frac{H^{*2}(x) - H^{*3}(x)}{H^{*2}(x)}$$

Problem, der Wert $H^{*3}(x)$ ist anfänglich unbekannt. Jedoch besagt der Grenzwert:

$$\lim_{x \to \pm\infty} H^{*3}(x) = 1$$

$\Rightarrow$

$$a \approx \frac{H^{*2}(|x| >> |c|) - 1}{H^{*2}(|x| >> |c|)}$$

Der Koeffizient kann mit einem konkreten Randwert von $H^{*2}(x)$ abgeschätzt werden.[2]

$$H^{*2}(x) = \frac{1}{1 - H^{*0}(x)}$$

• Abschätzung von b[3]

Die erste Möglichkeit b zu berechnen bietet $H^{*4}(x)$. So gilt:

$$H^{*4}(x) \cdot (x+c)^d = b$$

Mit:

$$(x+c)^d = 1$$

$\Rightarrow$

$$x = \pm 1 \pm c$$

Dann:

$$b = H^{*4}(x = \pm 1 \pm c)$$

Problem, die Stelle $x = \pm 1 \pm c$ ist unbekannt. Abhilfe schafft hier nur für alle $H^{*4}(x)$ das dazugehörige b zu berechnen, um anschließend mit $H^{*6}(x) = 1$ das Ergebnis zu verifizieren.

$$H^{*4}(x) = H^{*2}(x) \cdot (1-a) - 1 = \frac{1-a}{1 - H^{*0}(x)} - 1$$

Sowie:

$$H^{*6}(x) = \frac{b}{H^{*4}(x)} = \frac{b}{H^{*2}(x) \cdot (1-a) - 1} = \frac{b}{\frac{1-a}{1-H^{*0}(x)} - 1}$$

[1] Der Koeffizient a bestimmt den Wertebereich der Hillfunktion. So gilt für absteigende y-Werte $1 > H(x) > c$ und für aufsteigende y-Werte $c > H(x) > 1$. Daher kann a im konkreten praktischen Fall oftmals ohne Berechnung abgeschätzt werden.

[2] Reicht die Datenlage nicht aus, ein nutzfähiges a zu ermitteln, dann kann aus dem konkreten Anwendungsfall der Koeffizient festgelegt werden. Siehe Beispiel II - Alterung einer UVC-LED. Die untere Grenze dieser LED kann mit $a = 0$, keine Leistungsabgabe, dann legitim angenommen werden.

[3] Final im nachfolgenden Abschnitt.

2.3 Regression der Koeffizienten c und d

An der Stelle $x = c$ befindet sich ein Extrema. Nach Ermittlung von H^{*7} muss ggf. der Datensatz am Extrema getrennt werden. Der Datensatz links und rechts ergeben die gleichen Koeffizienten c und d, da beide Teildatensätze symmetrisch sind.

Zuerst wird der Koeffizient d ermittelt.

• **Berechnung von** d

Bei genauer Betrachtung von $H^{*7}(x)$ ergibt sich:

$$d = \frac{H^{*7}(x_i)}{\ln(x_i + c)} = \frac{d \cdot \ln(x_i + c)}{\ln(x_i + c)}$$

Der Koeffizient c ist bekannt, jedoch bedingt durch die Art der Ermittlung eine Näherung. Ebenso H^{*7}. Daher wird obige Berechnungsgrundlage nur in unmittelbarer Nähe zu c exakt sein. Daher gilt einschränkend für diese Berechnung:

$$d(x_i \to -c) \approx \frac{H^{*7}(x_i)}{\ln(x_i + c)}$$

Um den Koeffizienten d näher zu berechnen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Eine lineare Regression der Form $y = m \cdot x + n$ liefert dann $d = m$, wobei für die Inhomogenität $n \approx 0$ gelten sollte [4]. Eine Abweichung von Null kann für eine Interpretation der Messdatenqualität herangezogen werden. Wird auf die Inhomogenität verzichtet, lässt sich d vereinfacht berechnen über:

$$d = \frac{\sum X_i \cdot Y_i}{\sum X_i^2}$$

Wobei:

$$X_i = \ln(x_i + c) \qquad Y_i = \ln H^{*6}(x) = H^{*7}(x)$$

$\Rightarrow$

$$d_i = \frac{X_i \cdot Y_i}{X_i^2} = \frac{\ln(x_i + c) \cdot d \cdot \ln(x_i + c)}{\ln^2(x_i + c)}$$

• **Berechnung von** c[5]

Aus der Berechnungsgrundlage für d lässt sich feststellen, dass um der vermuteten Stelle von c gilt:

$$H^{*6}(x_i) = (x_i + c)^d$$

$\Rightarrow$

$$c = \sqrt[d]{H^{*6}(x_i)} - x_i$$

Was den Koeffizienten c letztendlich fixiert.

• **Berechnung von** b

Da die Koeffizienten a, c und d bekannt sind, kann die Abschätzung von b konkretisiert werden über:

$$H^{*0}(x) = 1 - \frac{1 - a}{1 + \frac{b}{(x+c)^d}}$$

$\Rightarrow$

$$b = \frac{H^{*0}(x) - a}{1 - H^{*0}(x)} \cdot (x + c)^d$$

[4] Ergibt sich aus der Vorschrift der Linearen Regression $y = m \cdot x + n$ nach der Methode der kleinsten Quadrate - MKQ. So gilt für den Anstieg m und der Inhomogenität n für zwei Punkte $i = 2$, welche y eindeutig festlegen:

$$m = \frac{2 \cdot \{X \cdot Y\} - \{X\} \cdot \{Y\}}{2 \cdot \{X^2\} - \{X\}^2} = \frac{X \cdot Y}{X^2} \qquad n = \frac{\{X^2\} \cdot \{Y\} - \{X \cdot Y\} \cdot \{X\}}{2 \cdot \{X^2\} - \{X\}^2} = 0$$

[5] Der Koeffizient c bestimmt den Abstand zur Ordinate. Daher kann c oftmals für den konkreten praktischen Fall ohne Berechnung abgeschätzt werden.

2.4 Sonderfälle der Hill-Funktion

• **Sonderfall** $a = 1$

Gegeben ist der Sonderfall $a = 1$.

$$H(x) = 1 - \frac{1-a}{1+\frac{b}{(x+c)^d}} \qquad \rightarrow \qquad H(x, a=1) = 1$$

• **Sonderfall** $a = 0$

Gegeben ist der Sonderfall $a = 0$.

$$H(x) = 1 - \frac{1-a}{1+\frac{b}{(x+c)^d}} \qquad \rightarrow \qquad H(x, a=0) = \frac{b}{(x+c)^d + b}$$

• **Sonderfall** $b = 1$

Gegeben ist der Sonderfall $b = 1$.

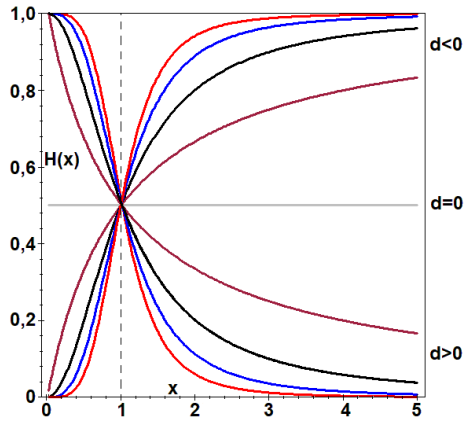
$$H(x) = 1 - \frac{1-a}{1+\frac{b}{(x+c)^d}} \qquad \rightarrow \qquad H(x, b=1) = \frac{a \cdot (x+c)^d + 1}{(x+c)^d + 1}$$

• **Sonderfall** $a = 0$ **und** $b = 1$

Gegeben ist der Sonderfall $a = 0$ und $b = 1$.

$$H(x) = 1 - \frac{1-a}{1+\frac{b}{(x+c)^d}} \qquad \rightarrow \qquad H(x, a=0, b=1) = \frac{1}{(x+c)^d + 1}$$

$\Rightarrow$



Grafische Darstellung des Sonderfalles $x \neq 0$, $a = 0$ und $b = 1$,
sowie $c = 0$ mit den ausgewählten Werten für den Koeffizient d.
Mit $d = \pm 4$, $d = \pm 3$, $d = \pm 2$, $d = \pm 1$ und $d = 0$.

• **Sonderfall** $d = 0$ **und** $x + c \neq 0$

Gegeben ist der Sonderfall $d = 0$ und $x + c \neq 0$.

$$H(x) = 1 - \frac{1-a}{1+\frac{b}{(x+c)^d}} \qquad \rightarrow \qquad H(x, d=0) = \frac{a+b}{1+b}$$

• **Sonderfall** $d = 0$**,** $a = 0$**,** $b = 1$ **und** $x + c \neq 0$

Gegeben ist der Sonderfall $d = 0$, $a = 0$, $b = 1$ und $x + c \neq 0$.

$$H(x) = 1 - \frac{1-a}{1+\frac{b}{(x+c)^d}} \qquad \rightarrow \qquad H(x, d=0) = \frac{1}{2}$$

3 Zusammenfassung

• **Ermittlung des Koeffizienten** a

$$a = \frac{H^{*2}(x) - H^{*3}(x)}{H^{*2}(x)}$$

$\Rightarrow$

$$a \approx \frac{H^{*2}(|x| >> |c|) - 1}{H^{*2}(|x| >> |c|)}$$

Der Koeffizient kann mit einem konkreten Randwert von $H^{*2}(x)$ abgeschätzt werden.[6,7]

• **Abschätzung des Koeffizienten** b

$$b = H^{*4}(x = \pm 1 \pm c)$$

Für alle $H^{*4}(x)$ ist das dazugehörige b zu berechnen und anschließend mit $H^{*6}(x) = 1$ verifizieren.

$$H^{*4}(x) = H^{*2}(x) \cdot (1 - a) - 1 = \frac{1 - a}{1 - H^{*0}(x)} - 1$$

Sowie:

$$H^{*6}(x) = \frac{b}{H^{*4}(x)} = \frac{b}{H^{*2}(x) \cdot (1 - a) - 1} = \frac{b}{\frac{1-a}{1-H^{*0}(x)} - 1}$$

• **Ermittlung des Koeffizienten** d

Zuerst wird der Koeffizient d ermittelt, danach c

Über einen Messpunkt in Nähe von $-c$[8] kann der Koeffizient d abgeschätzt werden.

$$d(x_i \to -c) \approx \frac{H^{*7}(x_i)}{\ln(x_i + c)}$$

Um den Koeffizienten d zu berechnen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Eine lineare Regression der Form $y = m \cdot x + n$ liefert dann $d = m$, wobei für die Inhomogenität $n \approx 0$ gelten sollte[9]. Eine Abweichung von Null kann für eine Interpretation der Messdatenqualität herangezogen werden. Wird auf die Inhomogenität verzichtet, lässt sich d vereinfacht berechnen über:

$$d = \frac{\sum X_i \cdot Y_i}{\sum X_i^2}$$

Wobei:

$$X_i = \ln(x_i + c) \qquad Y_i = \ln H^{*6}(x) = H^{*7}(x)$$

• **Ermittlung des Koeffizienten** c[10]

Aus der Berechnungsgrundlage für d lässt sich feststellen, dass um der vermuteten Stelle von c gilt:

$$c = \sqrt[d]{H^{*6}(x_i)} - x_i$$

Was den Koeffizienten c letztendlich fixiert.

• **Berechnung von** b

Final über:

$$b = \frac{H^{*0}(x) - a}{1 - H^{*0}(x)} \cdot (x + c)^d$$

[6] Reicht die Datenlage nicht aus, ein nutzfähiges a zu ermitteln, dann kann aus dem konkreten Anwendungsfall der Koeffizient festgelegt werden. Siehe Beispiel II - Alterung einer UVC-LED. Die untere Grenze dieser LED kann mit $a = 0$, keine Leistungsabgabe, dann legitim angenommen werden.

[7] Der Koeffizient a bestimmt den Wertebereich der Hillfunktion. So gilt für absteigende y-Werte $1 > H(x) > c$ und für aufsteigende y-Werte $c > H(x) > 1$. Daher kann a im konkreten praktischen Fall oftmals ohne Berechnung abgeschätzt werden.

[8] hier als Vermutung aus der Datenlage

[9] Diese Art der Berechnung von d ist anzustreben, da mit der Kontrolle über die Inhomogenität eine Abschätzung der Regressionsqualität möglich ist.

[10] Der Koeffizient c bestimmt den Abstand zur Ordinate. Daher kann c oftmals für den konkreten praktischen Fall ohne Berechnung abgeschätzt werden.

4 Anhang

4.1 Beispiele

4.1.1 Beispiel I

Gegeben sind Messwertpunkte $P_i\left(x_i; H^{*0}(x)\right)$. Es wird vermutet, dass sich diese Datenpaare durch die Hill-Funktion beschreiben lassen.

• **Ermittlung gebrauchter Derivate** $H^{*2}(x_i)$ **und** $H^{*4}(x_i)$

$$H^{*2}(x) = \frac{1}{1 - H^{*0}(x)} \qquad H^{*4}(x) = H^{*2}(x) \cdot (1 - a)$$

$\Rightarrow$

i	x_i	$H^{*0}(x_i)$	$H^{*2}(x_i)$	$H^{*4}(x_i)$
1	-2,9	+0,985	+66,667	+390,002
2	-1,8	-0,588	+0,630	+3,686
3	-0,7	-2,417	+0,293	+1,714
4	+0,4	-3,456	+0,224	+1,310
5	+1,5	-4,010	+0,200	+1,170
6	+2,5	-4,299	+0,189	+1,106
7	+3,5	-4,481	+0,182	+1,065
8	+5,5	-4,685	+0,176	+1,030
9	+7,5	-4,790	+0,173	+1,012
10	+9,0	-4,838	+0,171	+1,000

• **Ermittlung von** a

$$a \approx \frac{H^{*2}(|x| >> |c|) - 1}{H^{*2}(|x| >> |c|)} = \frac{0,171 - 1}{0,171} = -4,85$$

• **Abschätzung von** b

$$c_{\text{vermutet}} = 3$$

$\Rightarrow$

$$b_{\text{vermutet}} \approx H^{*4}(x = \pm 1 \pm c) = H^{*4}(-4; -2; +2; +4) = \varnothing; +3,90; +1,15; +1,05$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} b_1 &= b(-4) = \varnothing \\ b_2 &= b(-2) = +3,90 \\ b_3 &= b(+2) = +1,15 \\ b_4 &= b(+4) = +1,05 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$H^{*6}(-2) \stackrel{?}{=} 1$$
$$H^{*6}(+2) \stackrel{?}{=} 1$$
$$H^{*6}(+4) \stackrel{?}{=} 1$$

• **Verifizierung der Abschätzung über** $b = H^{*4}(x_i) \cdot H^{*6}(x_i)$ **und** $H^{*6}(x_i) = 1$

$$H^{*6}(x_i) = \frac{b(\bullet)}{\frac{1-a}{1-H^{*0}(x_i)} - 1}$$

$\Rightarrow$

$b_2 = +3,90$				
i	x_i	$H^{*4}(x_i)$	$H^{*6}(x_i)$	$H^{*4}(x_i) \cdot H^{*6}(x_i)$
1	-2,9	+390,002	+0,010	b_2 = +3,900
2	-1,8	+3,686	+1,453	+5,356
3	-0,7	+1,714	+5,477	+9,388
4	+0,4	+1,310	+12,467	+16,332
5	+1,5	+1,170	+23,261	+27,215
6	+2,5	+1,106	+37,506	+41,482
7	+3,5	+1,065	+57,929	+61,694
8	+5,5	+1,030	+134,373	+138,404
9	+7,5	+1,012	+376,350	+380,866
10	+9,0	+1,000	+1897,350	+1897,350

$b_3 = +1,15$				
i	x_i	$H^{*4}(x_i)$	$H^{*6}(x_i)$	$H^{*4}(x_i) \cdot H^{*6}(x_i)$
1	-2,9	+390,002	+0,003	b_3 = +1,170
2	-1,8	+3,686	+0,428	+1,578
3	-0,7	+1,714	+1,615	+2,768
4	+0,4	+1,310	+3,676	+4,816
5	+1,5	+1,170	+6,859	+8,025
6	+2,5	+1,106	+11,060	+12,232
7	+3,5	+1,065	+17,082	+18,192
8	+5,5	+1,030	+39,623	+40,812
9	+7,5	+1,012	+110,975	+112,307
10	+9,0	+1,000	+559,475	+559,475

$b_4 = +1,05$				
i	x_i	$H^{*4}(x_i)$	$H^{*6}(x_i)$	$H^{*4}(x_i) \cdot H^{*6}(x_i)$
1	-2,9	+390,002	+0,003	b_4 = 1,050
2	-1,8	+3,686	+0,391	+1,441
3	-0,7	+1,714	+1,475	+2,528
4	+0,4	+1,310	+3,356	+4,396
5	+1,5	+1,170	+6,262	+7,326
6	+2,5	+1,106	+10,098	+11,168
7	+3,5	+1,065	+15,596	+16,610
8	+5,5	+1,030	+36,177	+37,262
9	+7,5	+1,012	+101,325	+102,541
10	+9,0	+1,000	+510,825	+510,825

Erfüllt ist nur:

$$H^{*6}(-2) = 1$$

$\Rightarrow$

$$b \approx +3,90$$

• **Ermittlung von** d

$$Y_i = H^{*7}(x_i) = \ln H^{*6}(x_i) \qquad X_i = \ln(x_i + c)$$

$\Rightarrow$

i	x_i	$\ln(x_i + c)$	$H^{*6}(x_i)$	$H^{*7}(x_i)$	d
1	-2,9	-2,303	+0,010	-4,605	+1,999
2	-1,8	+0,182	+1,453	+0,374	+2,055
3	-0,7	+0,833	+5,477	+1,701	+2,042
4	+0,4	+1,224	+12,467	+2,523	+2,061
5	+1,5	+1,504	+23,261	+3,147	+2,092
6	+2,5	+1,705	+37,506	+3,624	+2,126
7	+3,5	+1,872	+57,929	+4,059	+2,168
8	+5,5	+2,140	+134,73	+4,901	+2,290
9	+7,5	+2,351	+376,50	+5,931	+2,523
10	+9,0	+2,485	+1897,50	+7,548	+3,037
Σ	-	-	-	-	+22,393

Über einen Messpunkt in Nähe von $-c_{\text{vermutet}}$ kann der Koeffizient d abgeschätzt werden, da dort gilt:

$$d(x_i \to -c)_{\text{vermutet}} = \frac{H^{*7}(x_i)}{\ln(x_i + c)} \approx 2$$

$\Rightarrow$

$$d_{\text{vermutet}} \approx 2$$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, um d zu berechnen.

i	X_i	X_i^2	Y_i	$X_i \cdot Y_i$
1	-2,303	+5,304	-4,605	+10,605
2	+0,182	+0,033	+0,374	+0,068
3	+0,833	+0,694	+1,701	+1,417
4	+1,224	+1,498	+2,523	+3,088
5	+1,504	+2,262	+3,147	+4,733
6	+1,705	+2,907	+3,624	+6,179
7	+1,872	+3,504	+4,059	+7,598
8	+2,140	+4,580	+4,901	+10,488
9	+2,351	+5,527	+5,931	+13,944
10	+2,485	+6,175	+7,548	+18,757
Σ	+11,993	+32,484	+29,203	+76,877

$$\varnothing d = \frac{22,393}{10} = 2,239$$
$$d_{\text{HKA}} = \frac{\sum Y_i}{\sum X_i} = \frac{29,203}{11,993} = 2,435$$
$$d_{\text{MKQ}} = \frac{\sum X_i \cdot Y_i}{\sum X_i^2} = \frac{76,877}{32,484} = 2,367$$
$$Y_{\text{linReg}} = 0,147 + 2,312 \cdot X$$

$\Rightarrow$[11]

$$d \approx 2,3$$

- **Ermittlung von** c

i	x_i	$x_i + c = \sqrt[d]{H^{*6}(x_i)}$	$c = \sqrt[d]{H^{*6}(x_i)} - x_i$
1	-2,9	+0,135	+3,035
2	-1,8	+1,176	+2,976
3	-0,7	+2,097	+2,797
4	+0,4	+2,995	+2,595
5	+1,5	+3,928	+2,428
6	+2,5	+4,835	+2,335
7	+3,5	+5,841	+2,341
8	+5,5	+8,431	+2,931
9	+7,5	+13,179	+5,679
10	+9,0	+26,625	+17,625

$\Rightarrow$

$$c \approx 3$$

- **Berechnung von** b

Mit:

$$a = -4,85 \qquad c = 3 \qquad d = 2,33$$

i	x_i	$H^{*0}(x_i)$	b_{10}	b_9
1	-2,9	+0,985	1,820	1,820
2	-1,8	-0,588	4,100	4,100
3	-0,7	-2,417	4,958	4,958
4	+0,4	-3,456	5,416	5,416
5	+1,5	-4,010	5,577	5,577
6	+2,5	-4,299	5,521	5,521
7	+3,5	-4,481	5,275	5,275
8	+5,5	-4,685	4,249	4,249
9	+7,5	-4,790	2,482	2,482
10	+9,0	-4,838	0,672	0,672
$\sum$	-	-	40,070	39,398

[11] Berechnungsgrundlagen aus [Dip] entnommen.

$\Rightarrow$

$$b_{10} = 40,070/10 \approx 4$$

Interpretiert man Datenpunkt $i = 10$ als Ausreißer, dann gilt:

$$b_9 = 39,398/9 \approx 4,38$$

$\Rightarrow$

$$b = 4,38$$

• **Berechnung der $H(x)$-Werte**

Die ermittelten Koeffizienten ergeben berechenbare $H(x)$-Werte.

$$a = -4,85 \qquad b = +4,38 \qquad c = +3,00 \qquad d = +2,30$$

$\Rightarrow$

$$H(x) = 1 - \frac{5,85}{1 + \frac{4,38}{(x+3)^{2,3}}}$$

$\Rightarrow$

i	x_i	$H^{*0}(x_i)$	$H(x_i)$	$H^{*0}(x_i)/H(x_i)$
1	-2,9	+0,985	+0,993	+0,992
2	-1,8	-0,588	-0,508	+1,157
3	-0,7	-2,417	-2,556	+0,946
4	+0,4	-3,456	-3,634	+0,951
5	+1,5	-4,010	-4,142	+0,968
6	+2,5	-4,299	-4,383	+0,981
7	+3,5	-4,481	-4,523	+0,991
8	+5,5	-4,685	-4,670	+1,003
9	+7,5	-4,790	-4,737	+1,011
10	+9,0	-4,838	-4,774	+1,013
$\sum$	-	-	-	+10,013

$\Rightarrow$

$$\varnothing H^{*0}(x_i)/H(x_i) = \frac{10,013}{10} \approx 1$$

4.1.2 Beispiel II mit $a \neq 0$

Genutzt wird ein praktisches Beispiel aus [F.] für die Berechnung der Hill-Funktion. Die dort genutzten Koeffizienten werden angegeben mit:

$$a = 0,1 \qquad b = 21 \qquad c = 0,01 \qquad d = 0,45$$

Genutzt wird nur die blaue Alterungskennlinie aus Abbildung 3. Die Messwerte werden rekonstruiert aus der Pixellage der Messpunkte. So gilt für die dort 15 angegebenen Datenpunkte:

i	$X-PIX$	$Y-PIX$	$X-PIX$	$Y-PIX$	$X-h$	$Y-\%$
1	183	102	0	807	0	100,0
2	333	124	150	785	1	97,27
3	396	145	213	764	2	94,67
4	479	169	296	740	5	91,70
5	542	193	359	716	10	88,72
6	606	221	423	688	20	85,25
7	688	265	505	644	50	79,80
8	751	307	568	602	100	74,60
9	814	353	631	556	200	68,90
10	898	415	715	494	500	61,21
11	961	464	778	445	1.000	55,14
12	1.023	516	840	393	2.000	46,79
13	1.107	593	924	316	5.000	39,16
14	1.169	650	986	259	10.000	32,09
15	1.233	703	1.050	206	20.000	25,53

Mit:

$$\text{Nullpunkt-Bild:} \qquad X = 183\text{PIX}, \qquad Y = 909\text{PIX}$$

X-Achse-Bild / Koordinaten:

h	**h^{Exp}**	**Bild-PIX**	**Koord-PIX**	**Δ**
0	-	183	-	-
-	-	-	-	-
1	10^0	333	150	-
-	-	-	-	209
10	10^1	542	359	-
-	-	-	-	210
100	10^2	752	569	-
-	-	-	-	208
1.000	10^3	960	777	-
-	-	-	-	210
10.000	10^4	1.170	987	-

X-Achse-Regressionsgerade:

$$\text{Exp} = 0,00478 \cdot \text{PIX} - 0,717$$

$\Rightarrow$

$$T = 10^{\text{Exp}}$$

Gilt erst ab Stunde 1 - Abbild gestaucht im Bereich 0 bis 1h

Da $H^{*0}(x_i) < 1$ hier gilt (absteigende Y-%-Werte, bei aufsteigenden gilt entsprechend $H^{*0}(x_i) > 1$), wird $H^{*0}(x_i) = Y - \%/100\%$ gesetzt.

i	x_i	$H^{*0}(x_i)$	$H^{*2}(x_i)$	$H^{*4}(x_i)$
1	0	1,000	-	-
2	1	0,9727	36,630	27,289
3	2	0,9467	18,762	13,978
4	5	0,9170	12,048	8,976
5	10	0,8872	8,865	6,605
6	20	0,8525	6,780	5,051
7	50	0,7980	4,950	3,688
8	100	0,7460	3,937	2,933
9	200	0,6890	3,215	2,396
10	500	0,6121	2,578	1,921
11	1.000	0,5514	2,229	1,661
12	2.000	0,4679	1,879	1,400
13	5.000	0,3916	1,644	1,225
14	10.000	0,3209	1,473	1,097
15	20.000	0,2553	1,343	1,000

• **Ermittlung von** a

$$a = (1,343 - 1)/1,343 = 0,255$$

Die Datenlage scheint ungünstig, da praktisch im Laufe der Alterung die Leistungsabgabe auf null absinken kann. Das entspräche ein $a = 0$. Es wird mit dem ermittelten Wert weiter gerechnet.

• **Abschätzung von** b **mit** $a = 0,255$

$$c_{\text{vermutet}} = 0$$

$\Rightarrow$

$$b_1 = b(-1) = \varnothing$$
$$b_2 = b(+1) = 27,289$$

i	x_i	$H^{*4}(x_i)$	$H^{*6}(x_i)$	$H^{*4}(x_i) \cdot H^{*6}(x_i)$
1	0	-	-	-
2	1	27,289	1,038	28,327
3	2	13,978	2,103	29,392
4	5	8,976	3,421	30,710
5	10	6,605	4,869	32,158
6	20	5,051	6,737	34,026
7	50	3,688	10,153	37,441

8	100	2,933	14,117	41,117
9	200	2,396	19,555	46,844
10	500	1,921	29,643	56,932
11	1.000	1,661	41,302	68,591
12	2.000	1,400	68,203	95,492
13	5.000	1,225	121,542	148,831
14	10.000	1,097	193,243	211,987
15	20.000	1,000	67740	67768

Damit ist b abgeschätzt:

$$b = 28,327 \approx 28,3$$

• **Ermittlung von d mit $a = 0,255$**

i	x_i	$\ln(x_i + c)$	$H^{*6}(x_i)$	$H^{*7}(x_i)$	d
1	0	-	-	-	-
2	1	0,000	1,038	0,037	-
3	2	0,693	2,103	0,743	1,073
4	5	1,609	3,421	1,230	0,764
5	10	2,303	4,869	1,583	0,687
6	20	2,996	6,737	1,908	0,637
7	50	3,912	10,153	2,318	0,592
8	100	4,605	14,117	2,647	0,575
9	200	5,298	19,555	2,973	0,561
10	500	6,215	29,643	3,389	0,545
11	1.000	6,908	41,302	3,721	0,539
12	2.000	7,601	68,203	4,222	0,556
13	5.000	8,517	121,542	4,800	0,564
14	10.000	9,210	193,243	5,264	0,572
15	20.000	9,903	67740	11,123	-
$\sum$	-	-	-	-	7,090

Ablesen nicht möglich, Abschätzung über:

$$d \approx 7,090/12 \approx 0,59$$

i	X_i	X_i^2	Y_i	$X_i \cdot Y_i$
1	-	-	-	-
2	0,000	0,000	0,037	0,000
3	0,693	0,480	0,743	0,515
4	1,609	2,589	1,230	1,979
5	2,303	5,304	1,583	3,646
6	2,996	8,976	1,908	5,716
7	3,912	15,304	2,318	9,068

8	4,605	21,206	2,647	12,189
9	5,298	28,068	2,973	15,751
10	6,215	38,626	3,389	21,063
11	6,908	47,720	3,721	25,705
12	7,601	57,775	4,222	32,091
13	8,517	72,539	4,800	40,882
14	9,210	84,824	5,264	48,481
15	9,903	-	11,123	-
$\sum$	59,867	383,411	34,835	217,086

$\Rightarrow$

$$d_{\text{HKA}} = \frac{\sum Y_i}{\sum X_i} = \frac{34,835}{59,867} = 0,582$$
$$d_{\text{MKQ}} = \frac{\sum X_i \cdot Y_i}{\sum X_i^2} = \frac{217,086}{383,411} = 0,566$$
$$d_{\text{linReg}} = 0,513 \cdot x + 0,340$$

Inhomogenität zeigt zu erwartende Abweichung an.[12]

Gewählt:

$$d = 0,51$$

• **Ermittlung von** c **mit** $a = 0,255$

i	x_i	$H^{*6}(x_i)^{1/d}$	c
1	0	-	-
2	1	1,076	0,076
3	2	4,271	2,271
4	5	11,048	6,048
5	10	22,012	12,012
6	20	41,505	21,505
7	50	92,471	42,471
8	100	176,032	76,032
9	200	332,650	132,650
10	500	749,632	249,632
11	1.000	1.433	433
12	2.000	3.816	1.816
13	5.000	11.796	6.796
14	10.000	30.378	20.378
15	20.000	-	-

$\Rightarrow$

$$c = 0,076 \approx 0 \qquad (\text{da } x_i + c \approx x_i)$$

• **Ermittlung von** b **mit** $a = 0,255$

Mit:

$$a = 0 \qquad c = 0 \qquad d = 0,44$$

[12] Berechnungsgrundlagen aus [Dip] entnommen.

i	x_i	$H^{*0}(x_i)$	b
1	0	1,000	-
2	1	0,9727	26,289
3	2	0,9467	18,481
4	5	0,9170	18,124
5	10	0,8872	18,136
6	20	0,8525	18,667
7	50	0,7980	19,766
8	100	0,7460	20,242
9	200	0,6890	20,809
10	500	0,6121	21,905
11	1.000	0,5514	22,729
12	2.000	0,4679	19,307
13	5.000	0,3916	17,288
14	10.000	0,3209	10,640
15	20.000	0,2553	0,0629
$\sum$	-	-	252,383

$\Rightarrow$

$$b = 252,83/13 \approx 19,4$$

• **Berechnung der $H(x)$-Werte**

Die ermittelten Koeffizienten ergeben berechenbare $H(x)$-Werte.

$$a = 0,255 \qquad b = 19,4 \qquad c = 0 \qquad d = 0,51$$

$\Rightarrow$

i	x_i	$H^{*0}(x_i)$	$H(x_i)$	$H^{*0}(x_i)/H(x_i)$
1	0	1,0000	-	-
2	1	0,9727	0,9635	1,010
3	2	0,9467	0,9491	0,998
4	5	0,9170	0,9219	0,995
5	10	0,8872	0,8935	0,993
6	20	0,8525	0,8570	0,995
7	50	0,7980	0,7952	1,004
8	100	0,7460	0,7388	1,010
9	200	0,6890	0,6762	1,019
10	500	0,6121	0,5896	1,038
11	1.000	0,5514	0,5262	1,048
12	2.000	0,4679	0,4686	0,999
13	5.000	0,3916	0,4049	0,967
14	10.000	0,3209	0,3670	0,874
15	20.000	0,2553	0,3373	0,757
$\sum$	-	-	-	13,707

$\Rightarrow$

$$\varnothing H^{*0}(x_i)/H(x_i) = \frac{13,707}{14} \approx 0,979$$

• **Berechnung der $H(x)$-Werte** aus [F.]

Die dort angegebenen Koeffizienten ergeben berechenbare $H(x)$-Werte.

$$a = 0.1 \qquad b = 21 \qquad c = 0.01 \qquad d = 0,45$$

$\Rightarrow$

i	x_i	$H^{*0}(x_i)$	$H(x_i)$	$H^{*0}(x_i)/H(x_i)$
1	0	1,0000	0,9946	1,005
2	1	0,9727	0,9589	1,014
3	2	0,9467	0,9449	1,002
4	5	0,9170	0,9194	0,997
5	10	0,8872	0,8935	0,993
6	20	0,8525	0,8605	0,991
7	50	0,7980	0,8048	0,992
8	100	0,7460	0,7530	0,991
9	200	0,6890	0,6934	0,994
10	500	0,6121	0,6055	1,011
11	1.000	0,5514	0,5356	1,029
12	2.000	0,4679	0,4664	1,003
13	5.000	0,3916	0,3813	1,027
14	10.000	0,3209	0,3247	0,988
15	20.000	0,2553	0,2763	0,924
$\sum$	-	-	-	14,961

$\Rightarrow$

$$\varnothing H^{*0}(x_i)/H(x_i) = \frac{14,961}{15} \approx 0,997 \approx 1$$

4.1.3 Beispiel II mit $a = 0$

Genutzt wird ein praktisches Beispiel aus cite{002} für die Berechnung der Hill-Funktion. Die dort genutzten Koeffizienten werden angegeben mit:

$$a = 0,1 \qquad b = 21 \qquad c = 0,01 \qquad d = 0,45$$

Genutzt wird nur die blaue Alterungskennlinie aus Abbildung 3. Die Messwerte werden rekonstruiert aus der Pixellage der Messpunkte. So gilt für die dort 15 angegebenen Datenpunkte:

i	$X - PIX$	$Y - PIX$	$X - PIX$	$Y - PIX$	$X - h$	$Y - \%$
1	183	102	0	807	0	100,0
2	333	124	150	785	1	97,27
3	396	145	213	764	2	94,67
4	479	169	296	740	5	91,70
5	542	193	359	716	10	88,72
6	606	221	423	688	20	85,25
7	688	265	505	644	50	79,80
8	751	307	568	602	100	74,60
9	814	353	631	556	200	68,90
10	898	415	715	494	500	61,21
11	961	464	778	445	1.000	55,14
12	1.023	516	840	393	2.000	46,79
13	1.107	593	924	316	5.000	39,16
14	1.169	650	986	259	10.000	32,09
15	1.233	703	1.050	206	20.000	25,53

Mit:

$$\text{Nullpunkt-Bild:} \qquad X = 183\text{PIX}, \qquad Y = 909\text{PIX}$$

X-Achse-Bild / Koordinaten:

h	**h^{Exp}**	**Bild-PIX**	**Koord-PIX**	**Δ**
0	-	183	-	-
-	-	-	-	-
1	10^0	333	150	-
-	-	-	-	209
10	10^1	542	359	-
-	-	-	-	210
100	10^2	752	569	-
-	-	-	-	208
1.000	10^3	960	777	-
-	-	-	-	210
10.000	10^4	1.170	987	-

X-Achse-Regressionsgerade:

$$\text{Exp} = 0,00478 \cdot \text{PIX} - 0,717$$

$\Rightarrow$

$$T = 10^{\text{Exp}}$$

Gilt erst ab Stunde 1 - Abbild gestaucht im Bereich 0 bis 1h

Da $H^{*0}(x_i) < 1$ hier gilt (absteigende Y-%-Werte, bei aufsteigenden gilt entsprechend $H^{*0}(x_i) > 1$), wird $H^{*0}(x_i) = Y - \%/100\%$ gesetzt.

i	x_i	$H^{*0}(x_i)$	$H^{*2}(x_i)$	$H^{*4}(x_i)$
1	0	1,000	-	-
2	1	0,9727	36,630	27,289
3	2	0,9467	18,762	13,978
4	5	0,9170	12,048	8,976
5	10	0,8872	8,865	6,605
6	20	0,8525	6,780	5,051
7	50	0,7980	4,950	3,688
8	100	0,7460	3,937	2,933
9	200	0,6890	3,215	2,396
10	500	0,6121	2,578	1,921
11	1.000	0,5514	2,229	1,661
12	2.000	0,4679	1,879	1,400
13	5.000	0,3916	1,644	1,225
14	10.000	0,3209	1,473	1,097
15	20.000	0,2553	1,343	1,000

• **Ermittlung von** a

$$a = (1,343 - 1)/1,343 = 0,255$$

Die Datenlage scheint ungünstig, da praktisch im Laufe der Alterung die Leistungsabgabe auf null absinken kann. Das entspräche ein a = 0. Daher wird hier gewählt:

$$a = 0$$

• **Abschätzung von** b **mit** $a = 0$

$$c_{\text{vermutet}} = 0$$

$\Rightarrow$

$$b_1 = b(-1) = \varnothing$$
$$b_2 = b(+1) = 36,630$$

i	x_i	$H^{*4}(x_i)$	$H^{*6}(x_i)$	$H^{*4}(x_i) \cdot H^{*6}(x_i)$
1	0	-	-	-
2	1	36,630	1,028	37,656
3	2	18,762	2,062	38,687
4	5	12,048	3,315	39,939
5	10	8,865	4,657	41,284
6	20	6,780	6,338	42,971
7	50	4,950	9,272	45,896

8	100	3,937	12,472	49,102
9	200	3,215	16,534	53,157
10	500	2,578	23,213	59,843
11	1.000	2,229	29,801	66,426
12	2.000	1,879	41,656	78,271
13	5.000	1,644	56,909	93,558
14	10.000	1,473	77,518	114,184
15	20.000	1,343	106,848	143,497

Damit ist b abgeschätzt:

$$b = 36,63 \approx 36,6$$

• **Ermittlung von** d **mit** $a = 0$

i	x_i	$\ln(x_i + c)$	$H^{*6}(x_i)$	$H^{*7}(x_i)$	d
1	0	-	-	-	-
2	1	0,000	1,028	0,028	-
3	2	0,693	2,062	0,724	1,045
4	5	1,609	3,315	1,198	0,745
5	10	2,303	4,657	1,538	0,668
6	20	2,996	6,338	1,847	0,616
7	50	3,912	9,272	2,227	0,569
8	100	4,605	12,472	2,523	0,548
9	200	5,298	16,534	2,805	0,529
10	500	6,215	23,213	3,144	0,506
11	1.000	6,908	29,801	3,394	0,491
12	2.000	7,601	41,656	3,729	0,491
13	5.000	8,517	56,909	4,041	0,474
14	10.000	9,210	77,518	4,350	0,472
15	20.000	9,903	106,848	4,671	0,472
$\sum$	-	-	-	-	7,135

Ablesen nicht möglich, Abschätzung über:

$$d \approx 7,135/13 \approx 0,55$$

i	X_i	X_i^2	Y_i	$X_i \cdot Y_i$
1	-	-	-	-
2	0,000	0,000	0,028	0,000
3	0,693	0,480	0,724	0,502
4	1,609	2,589	1,198	1,928
5	2,303	5,304	1,538	3,542
6	2,996	8,976	1,847	5,534
7	3,912	15,304	2,227	8,712

8	4,605	21,206	2,523	11,618
9	5,298	28,068	2,805	14,861
10	6,215	38,626	3,144	19,540
11	6,908	47,720	3,394	23,446
12	7,601	57,775	3,729	28,344
13	8,517	72,539	4,041	34,417
14	9,210	84,824	4,350	40,064
15	9,903	98,069	4,671	46,257
$\sum$	69,770	481,480	36,219	238,765

$\Rightarrow$

$$d_{\text{HKA}} = \frac{\sum Y_i}{\sum X_i} = \frac{36,219}{69,770} = 0,519$$
$$d_{\text{MKQ}} = \frac{\sum X_i \cdot Y_i}{\sum X_i^2} = \frac{238,765}{481,480} = 0,496$$
$$d_{\text{linReg}} = 0,436 \cdot x + 0,417$$

Inhomogenität zeigt zu erwartende Abweichung an.[13]

Gewählt:

$$d = 0,44$$

• **Ermittlung von** c **mit** $a = 0$

i	x_i	$H^{*6}(x_i)^{1/d}$	c
1	0	-	-
2	1	1,065	0,065
3	2	5,258	3,258
4	5	15,623	10,623
5	10	34,069	24,069
6	20	69,078	49,078
7	50	165,306	115,306
8	100	326,298	226,298
9	200	622,938	422,938
10	500	1.356	856
11	1.000	2.406	1.406
12	2.000	5.186	3.186
13	5.000	10.608	5.608
14	10.000	21.552	11.552
15	20.000	44.992	24.992

$\Rightarrow$

$$c = 0,065 \approx 0 \qquad (\text{da } x_i + c \approx x_i)$$

• **Ermittlung von** b **mit** $a = 0$

Mit:

$$a = 0 \qquad c = 0 \qquad d = 0,44$$

[13] Berechnungsgrundlagen aus [Dip] entnommen.

i	x_i	$H^{*0}(x_i)$	b
1	0	1,000	-
2	1	0,9727	35,630
3	2	0,9467	24,096
4	5	0,9170	22,430
5	10	0,8872	21,667
6	20	0,8525	21,595
7	50	0,7980	22,090
8	100	0,7460	22,280
9	200	0,6890	22,799
10	500	0,6121	24,302
11	1.000	0,5514	25,681
12	2.000	0,4679	24,924
13	5.000	0,3916	27,302
14	10.000	0,3209	27,192
15	20.000	0,2553	26,762
$\sum$	-	-	348,750

$\Rightarrow$

$$b = 348,750/14 \approx 24,9$$

• **Berechnung der $H(x)$-Werte**

Die ermittelten Koeffizienten ergeben berechenbare $H(x)$-Werte.

$$a = 0 \qquad b = 24,9 \qquad c = 0 \qquad d = 0,44$$

$\Rightarrow$

i	x_i	$H^{*0}(x_i)$	$H(x_i)$	$H^{*0}(x_i)/H(x_i)$
1	0	1,0000	-	-
2	1	0,9727	0,9614	1,012
3	2	0,9467	0,9483	0,998
4	5	0,9170	0,9246	0,992
5	10	0,8872	0,9004	0,985
6	20	0,8525	0,8695	0,980
7	50	0,7980	0,8166	0,977
8	100	0,7460	0,7665	0,973
9	200	0,6890	0,7076	0,974
10	500	0,6121	0,6178	0,991
11	1.000	0,5514	0,5438	1,014
12	2.000	0,4679	0,4677	1,000
13	5.000	0,3916	0,3699	1,059
14	10.000	0,3209	0,3020	1,063
15	20.000	0,2553	0,2418	1,056
$\sum$	-	-	-	13,100

$\Rightarrow$

$$\varnothing H^{*0}(x_i)/H(x_i) = \frac{13,100}{14} \approx 0,936$$

• **Berechnung der $H(x)$-Werte** aus [F.]

Die dort angegebenen Koeffizienten ergeben berechenbare $H(x)$-Werte.

$$a = 0.1 \qquad b = 21 \qquad c = 0.01 \qquad d = 0,45$$

$\Rightarrow$

i	x_i	$H^{*0}(x_i)$	$H(x_i)$	$H^{*0}(x_i)/H(x_i)$
1	0	1,0000	0,9946	1,005
2	1	0,9727	0,9589	1,014
3	2	0,9467	0,9449	1,002
4	5	0,9170	0,9194	0,997
5	10	0,8872	0,8935	0,993
6	20	0,8525	0,8605	0,991
7	50	0,7980	0,8048	0,992
8	100	0,7460	0,7530	0,991
9	200	0,6890	0,6934	0,994
10	500	0,6121	0,6055	1,011
11	1.000	0,5514	0,5356	1,029
12	2.000	0,4679	0,4664	1,003
13	5.000	0,3916	0,3813	1,027
14	10.000	0,3209	0,3247	0,988
15	20.000	0,2553	0,2763	0,924
$\sum$	-	-	-	14,961

$\Rightarrow$

$$\varnothing H^{*0}(x_i)/H(x_i) = \frac{14,961}{15} \approx 0,997 \approx 1$$

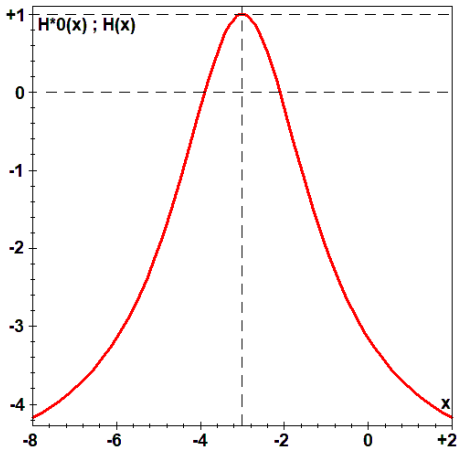
4.2 Grafische Darstellungen

4.2.1 Derivate

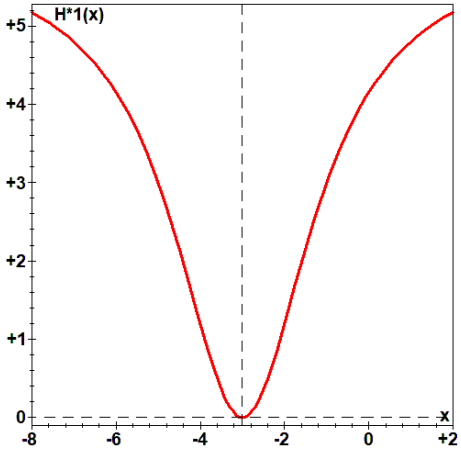
Mit den Beispielskoeffizienten:

$$a = -5 \qquad b = +4 \qquad c = +3 \qquad d = +2$$

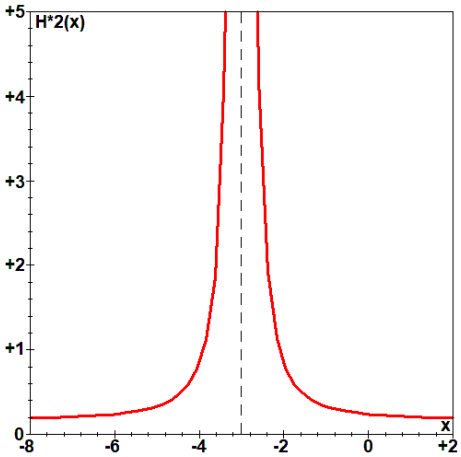
Somit sind $H^{*0}(x)$ und $H(x)$ in der Darstellung kontinuierlich gleich.



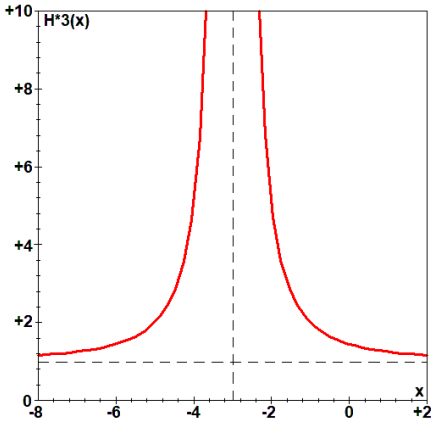
Grafische Darstellung der Hill-Funktion $H(x)$ und dessen Derivat $H^{*0}(x)$.



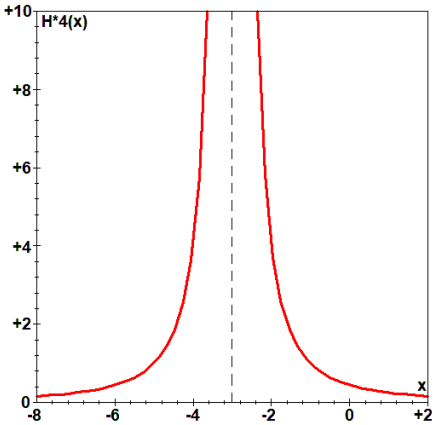
Grafische Darstellung des Hill-Funktion-Derivats $H^{*1}(x)$.



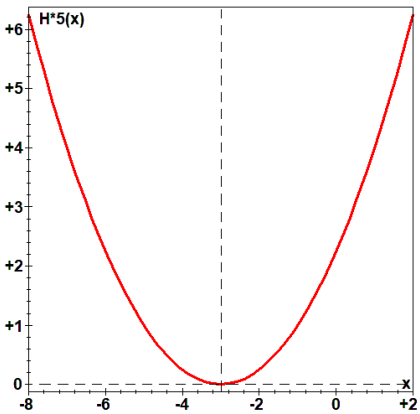
Grafische Darstellung des Hill-Funktion-Derivats $H^{*2}(x)$.



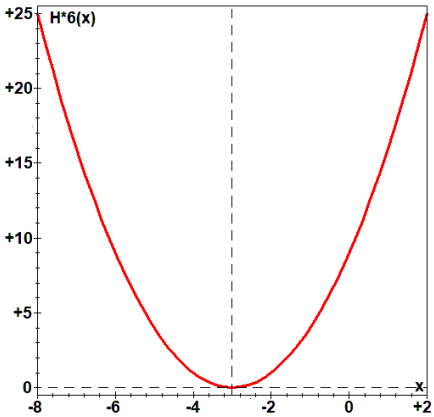
Grafische Darstellung des Hill-Funktion-Derivats $H^{*3}(x)$.



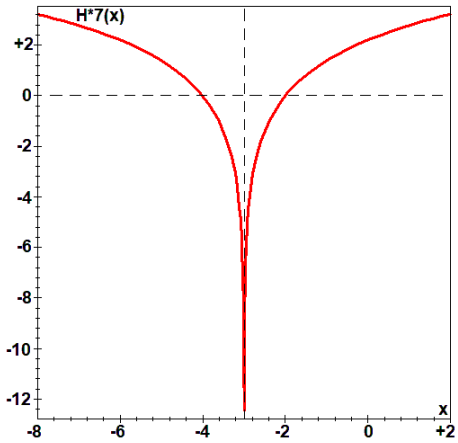
Grafische Darstellung des Hill-Funktion-Derivats $H^{*4}(x)$.



Grafische Darstellung des Hill-Funktion-Derivats $H^{*5}(x)$.

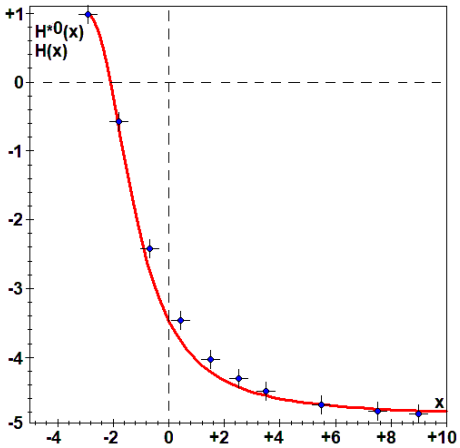


Grafische Darstellung des Hill-Funktion-Derivats $H^{*6}(x)$.

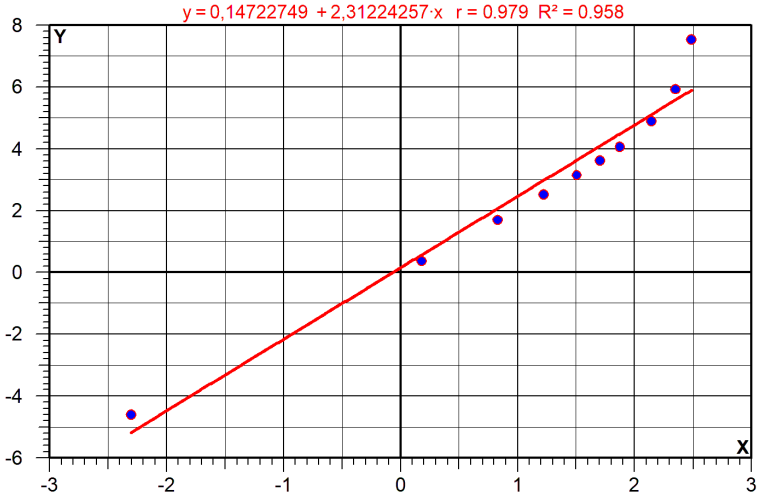


Grafische Darstellung des Hill-Funktion-Derivats $H^{*7}(x)$.

4.2.2 Beispiel I

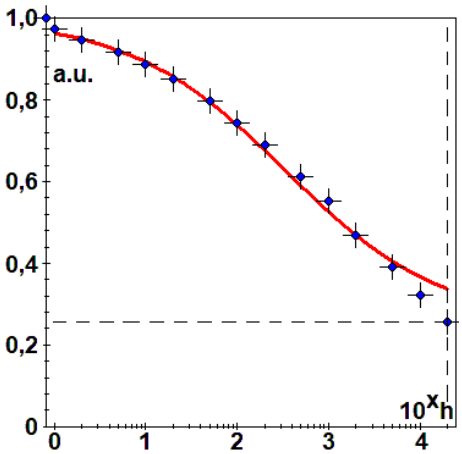


Darstellung der Datenpunkte $H^{*0}(x)$ aus Beispiel I
und das Ergebnis der Regression $H(x)$.

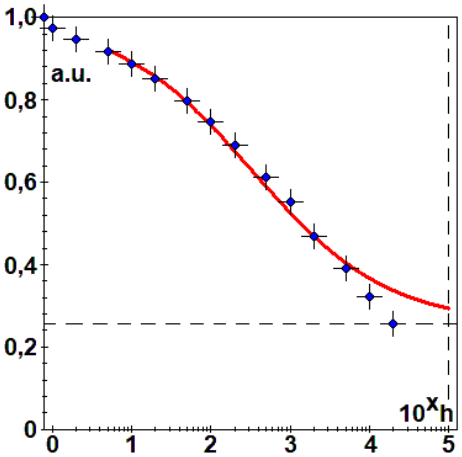


Grafische Darstellung der durchgeführten Linearen Regression
für die Ermittlung des Koeffizienten d im vorliegenden Beispiel.

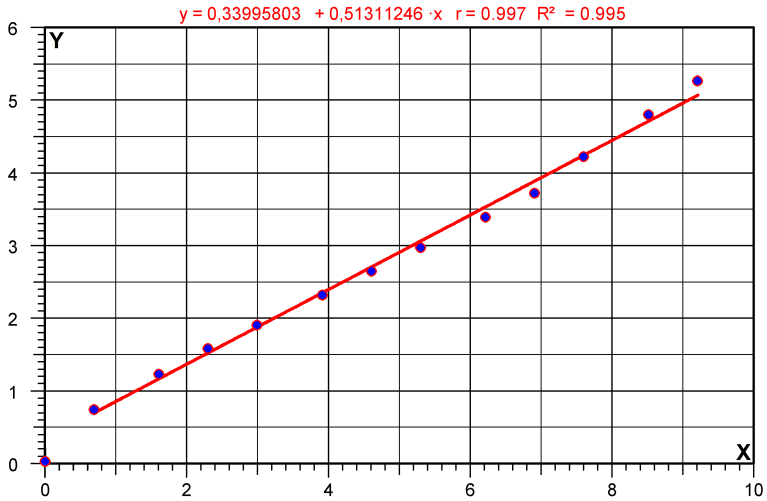
4.2.3 Beispiel II mit $a \neq 0$



Darstellung der Datenpunkte $H^{*0}(x)$ aus Beispiel II
mit $a \neq 0$und das Ergebnis der Regression $H(x)$ bis 10^4h.

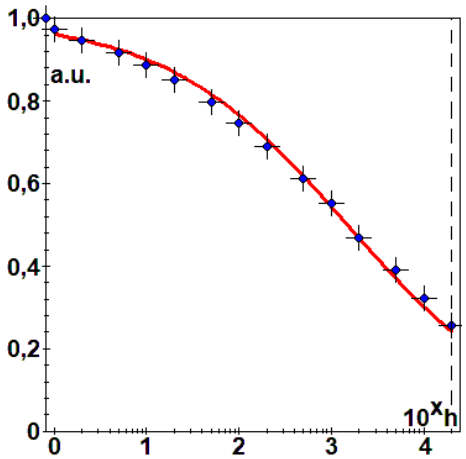


Darstellung der Datenpunkte $H^{*0}(x)$ aus Beispiel II
mit $a \neq 0$ und das Ergebnis der Regression $H(x)$ bis 10^5h.

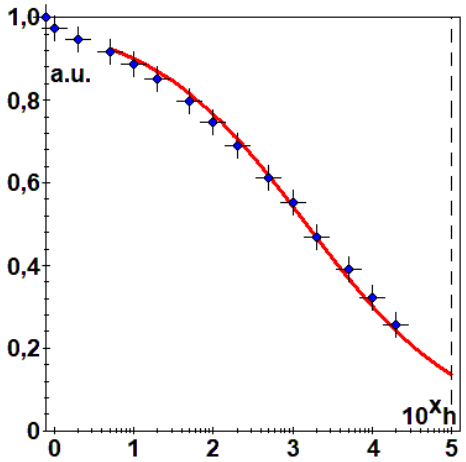


Grafische Darstellung der durchgeführten Linearen Regression
für die Ermittlung des Koeffizienten d im vorliegenden Beispiel.

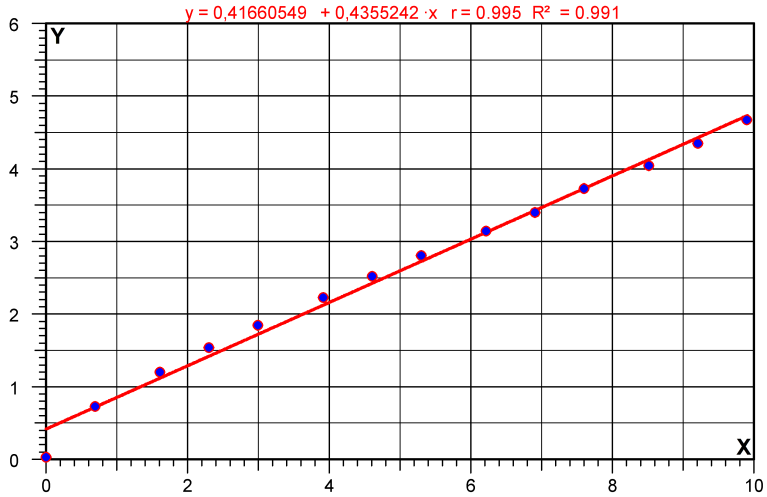
4.2.4 Beispiel II mit $a = 0$



Darstellung der Datenpunkte $H^{*0}(x)$ aus Beispiel II
mit $a = 0$ und das Ergebnis der Regression $H(x)$ bis 10^4h.

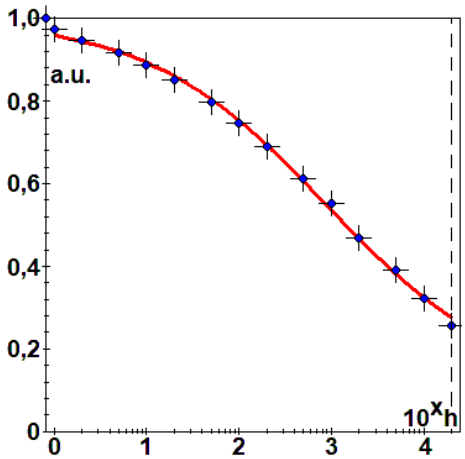


Darstellung der Datenpunkte $H^{*0}(x)$ aus Beispiel II
mit $a = 0$ und das Ergebnis der Regression $H(x)$ bis 10^5h.

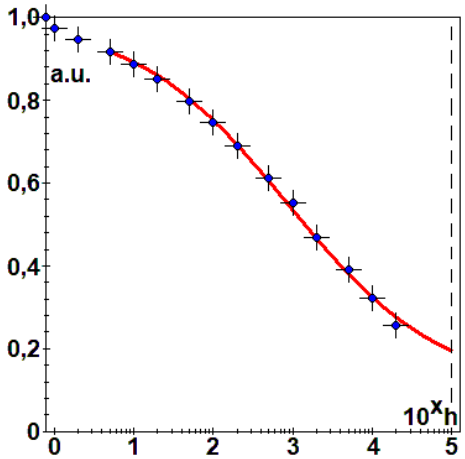


Grafische Darstellung der durchgeführten Linearen Regression
für die Ermittlung des Koeffizienten d im vorliegenden Beispiel.

4.2.5 Beispiel II mit Werten aus [F.]



Darstellung der Datenpunkte $H^{*0}(x)$ aus Beispiel II
mit den dort angegebenen Koeffizienten a bis d und
das Ergebnis der durchgeführten Regression $H(x)$ bis 10^4h.



Darstellung der Datenpunkte $H^{*0}(x)$ aus Beispiel II
mit den dort angegebenen Koeffizienten a bis d und
das Ergebnis der durchgeführten Regression $H(x)$ bis 10^5h.

LaTeX 2_ε

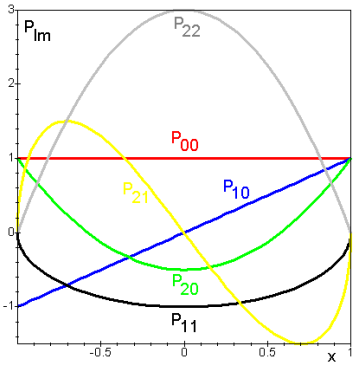
$$\oiint$$

4 Approximationen

4.1 Konstanten

4.1.1 Approximation von π und $\ln 2$ über die Legendrepolynome

Legendrepolynome



Allgemeine, Zugeordnete, Approximation

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 5. Februar. 2018 – Letzte Revision: 12. April 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Übersicht **3**

1.1 Legendre-Polynome . . . 3

1.2 Gewöhnliche Legendre-Polynome . . . 4

1.3 Zugeordnete Legendre-Polynome . . . 5

1.4 Zugeordnete Legendre-Funktionen 2. Art . . . 7

2 Anwendung in der Approximation **9**

2.1 Darstellung von π . . . 9

2.2 Darstellung von $\ln 2$ . . . 10

3 Anhang **11**

3.1 Polynome der Form $P_n^2(x)$ . . . 11

3.2 Polynome der Form $P_n'(x)^2$ . . . 12

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Übersicht

1.1 Legendre-Polynome

Gegeben ist die Differentialgleichung (Legendre-Gleichung) folgender Form: [001]

$$\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\left(l\left(l+1\right)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0$$

Nichtsinguläre Lösungen ergeben sich nur für die Randbedingung:

$$x\in[-1;+1]$$

Sowie:

$$l\in N_0 \qquad m\in N_0 \qquad \text{mit} \qquad l\geq m\geq 0$$

Lösung obiger Legendre-Gleichung sind die Legendre-Polynome.

1.2 Gewöhnliche Legendre-Polynome

Die Gewöhnlichen Legendre-Polynome sind berechenbar über[1]:

$$y = P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l} \left(x^2 - 1\right)^l$$

Die ersten Polynome.

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \\
P_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \\
P_4(x) &= \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8} \\
P_5(x) &= \frac{63}{8}x^5 - \frac{35}{4}x^3 + \frac{15}{8}x \\
P_6(x) &= \frac{231}{16}x^6 - \frac{315}{16}x^4 + \frac{105}{16}x^2 - \frac{5}{16} \\
P_7(x) &= \frac{429}{16}x^7 - \frac{693}{16}x^5 + \frac{315}{16}x^3 - \frac{35}{16}x
\end{aligned}$$

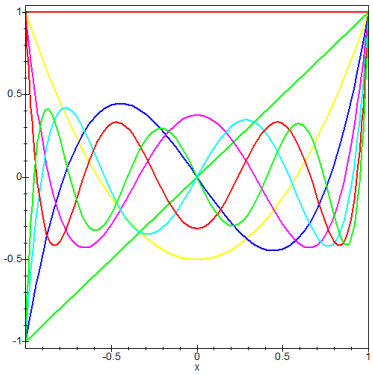
Wobei in der Fachliteratur der Nenner ausgeklammert wird.

$$\begin{aligned}
1 \cdot P_0(x) &= 1 \\
1 \cdot P_1(x) &= x \\
2 \cdot P_2(x) &= 3x^2 - 1 \\
2 \cdot P_3(x) &= 5x^3 - 3x \\
8 \cdot P_4(x) &= 35x^4 - 30x^2 + 3 \\
8 \cdot P_5(x) &= 63x^5 - 70x^3 + 15x \\
16 \cdot P_6(x) &= 231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5 \\
16 \cdot P_7(x) &= 429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x
\end{aligned}$$

Eine besondere Eigenschaften sei genannt.

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{+1} P'_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad n = \text{even} \\ 1 & \text{wenn} \quad n = \text{odd} \end{cases}$$

Weitere im Abschnitt Approximation



Die oben aufgelisteten Polynome grafisch dargestellt.

[1] Es gibt eine Vielzahl von weiteren Berechnungsvorschriften.

1.3 Zugeordnete Legendre-Polynome

Die Zugeordneten Legendre-Polynome sind definiert durch:

$$y = P_{lm}(x) = (-1)^m \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

$\Rightarrow$

$$y = P_{lm}(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} \left(x^2 - 1\right)^l$$

Der Sonderfall mit $m = 0$:

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + l(l+1) y = 0$$

$\Rightarrow$

$$y = P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l} \left(x^2 - 1\right)^l$$

$\Rightarrow$

$$y = P_{l0}(x) = \frac{1}{2^l l!} \cdot \frac{d^l}{dx^l} \left(x^2 - 1\right)^l$$

$\Rightarrow$

$$P_{l0}(x) = P_l(x)$$

Legendre-Polynome sind orthogonal:

$$\int_{-1}^{+1} P_{lm}(x) P_{km}(x) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1} \cdot \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{lk}$$

$$\int_{-1}^{+1} P_{lm}(x) P_{\mathrm{ln}}(x) \frac{1}{1 - x^2} \mathrm{d}x = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{mn}$$

$\Rightarrow$

$$\int_{-1}^{+1} P_{l0}(x) P_{k0}(x) \, \mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1} \delta_{lk}$$

$$\int_{-1}^{+1} P_{l0}(x) P_{l0}(x) \frac{1}{1 - x^2} \mathrm{d}x = 1$$

Die ersten zugeordneten Legendre-Polynome lassen sich rekursiv berechnen:

$$(l - m) P_l^m(x) = x(2l - 1) P_{l-1}^m(x) - (l + m - 1) P_{l-2}^m(x)$$

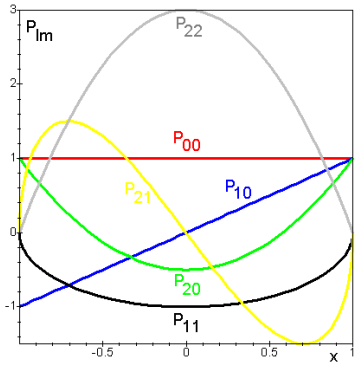
$\Rightarrow$

$$l P_l^0(x) = x(2l - 1) P_{l-1}^0(x) - (l - 1) P_{l-2}^0(x)$$

Die ersten 6 Polynome:

$$\begin{aligned}
P_{00}(x) &= 1 \\
P_{10}(x) &= x \\
P_{11}(x) &= -\sqrt{1 - x^2} \\
P_{20}(x) &= \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right) \\
P_{21}(x) &= -3x\sqrt{1 - x^2} \\
P_{22}(x) &= 3\left(1 - x^2\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$



Zugeordnete Legendre-Polynome grafisch dargestellt.

Das vorgeschriebene Intervall für x induziert die Nutzung einer trigonometrischen Funktion, dann:

$$x = \cos\vartheta$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
P_{00}(x) &= 1 \\
P_{10}(x) &= \cos\vartheta \\
P_{11}(x) &= -\sin\vartheta \\
P_{20}(x) &= \frac{1}{2}\left(3\cos^2\vartheta - 1\right) \\
P_{21}(x) &= -3\sin\vartheta\cos\vartheta \\
P_{22}(x) &= 3\sin^2\vartheta
\end{aligned}$$

Für $x = \cos\vartheta$ sind andere zusätzliche Orthogonalitätsbeweise beschrieben.

$$\int_0^\pi \left|P_{lm}\cos\vartheta\right|^2 \sin\vartheta \cdot d\vartheta = 1$$

Ein vollständiges Orthogonalsystem auf der Einheitskugel bilden die Kugelflächenfunktionen definiert aus $P_{lm}\cos\vartheta$:

$$Y_{lm}(\vartheta;\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\cdot\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\cdot e^{jm\varphi}\cdot P_{lm}\cos\vartheta$$

Die zugeordnete Legendre-Gleichung jetzt:

$$y'' + \cot\vartheta\cdot y' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right]y = 0$$

$\Rightarrow$

$$y'' + \cot\vartheta\cdot y' + l(l+1)\,y = 0$$

1.4 Zugeordnete Legendre-Funktionen 2. Art

Ähnlich wie bei der Legendreschen Gleichung stellen die zugeordneten Legendre-Polynome P_{lm} nur eine Gruppe von Lösungsfunktionen der verallgemeinerten Legendreschen Gleichung dar. Die zugeordneten Legendre-Funktionen 2. Art $Q_{lm}(x)$ stellen ebenso Lösungen dar. Auch für sie gilt $Q_{l0} = Q_l$ mit den Legendre-Funktionen 2. Art $Q_l(x)$.

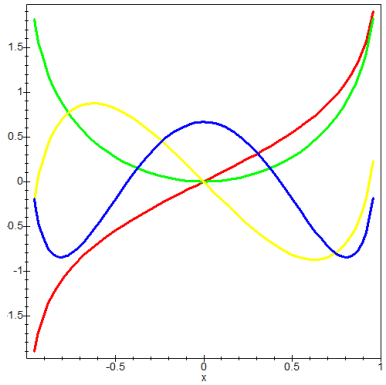
Folgend die ersten Funktionen aufgelistet.

$$
\begin{aligned}
Q_0(x) &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \\
Q_1(x) &= \frac{1}{2}x\ln\frac{1+x}{1-x} \\
Q_2(x) &= \frac{3x^2-1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{3x}{2} \\
Q_3(x) &= \frac{5x^3-3x}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} - \frac{5x^2}{2} + \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
2\cdot Q_0(x) &= \ln\frac{1+x}{1-x} \\
4\cdot Q_1(x) &= 2x\ln\frac{1+x}{1-x} \\
8\cdot Q_2(x) &= 2\left(3x^2-1\right)\ln\frac{1+x}{1-x} - 12x \\
12\cdot Q_3(x) &= 3\left(5x^3-3x\right)\ln\frac{1+x}{1-x} - 30x^2 + 8
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$



Grafische Darstellung von $Q_{n=0;1;2;3}(x)$.

2 Anwendung in der Approximation

2.1 Darstellung von π

Gegeben ist folgendes Integral:

$$(-1)^n \cdot \int_{-1}^{+1} P^2_{n=0;1;2;\ldots;\infty}(x)\,\mathrm{d}x = +\frac{2}{1}; -\frac{2}{3}; +\frac{2}{5}; -\frac{2}{7}; \ldots$$

Dessen Lösungen eine Folge darstellt:

$$(-1)^n \cdot \int_{-1}^{+1} P^2_{n=0;1;2;\ldots;\infty}(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n \cdot \frac{2}{2n+1}$$

Wobei gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \cdot (-1)^n = \frac{\pi}{4}$$

Daher:

$$4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \int_{-1}^{+1} P^2_n(x)\,\mathrm{d}x \right) = \pi$$

2.2 Darstellung von $\ln 2$

Gegeben ist folgendes Integral:

$$(-1)^n \cdot \int_{-1}^{+1} P'_{n=1;2;3;\ldots;\infty}(x)^2 \mathrm{d}x = -2; +6; -12; +20; \ldots$$

Dessen Lösungen eine Folge darstellt:

$$(-1)^n \cdot \int_{-1}^{+1} P'_{n=1;2;3;\ldots;\infty}(x)^2 \mathrm{d}x = (-1)^2 \cdot n \cdot (n+1)$$

Wobei gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} \cdot (-1)^n = \frac{1}{2} - \ln 2$$

Daher:

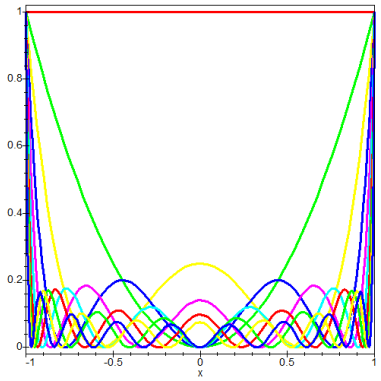
$$\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \cdot \left(\int_{-1}^{+1} P'_n(x)^2 \mathrm{d}x \right)^{-1} \right) = \ln 2$$

3 Anhang

3.1 Polynome der Form $P_n^2(x)$

$$
\begin{aligned}
2 \cdot P_0^2(x) &= \left\{ \; +2 \right. \\
2 \cdot P_1^2(x) &= \left\{ \; +2x^2 \right. \\
4 \cdot P_2^2(x) &= \left\{ \; +9x^4 - 6x^2 + 1 \right. \\
4 \cdot P_3^2(x) &= \left\{ \; +25x^6 - 30x^4 + 9x^2 \right. \\
64 \cdot P_4^2(x) &= \left\{ \begin{array}{l} +1.225x^8 - 2.100x^6 + 1.110x^4 \\ -180x^2 + 9 \end{array} \right. \\
64 \cdot P_5^2(x) &= \left\{ \begin{array}{l} +3.969x^{10} - 8.820x^8 + 6.790x^6 \\ -2.100x^4 + 225x^2 \end{array} \right. \\
256 \cdot P_6^2(x) &= \left\{ \begin{array}{l} +53.361x^{12} - 145.530x^{10} + 147.735x^8 \\ -68.460x^6 + 14.175x^4 - 1.050x^2 + 25 \end{array} \right. \\
256 \cdot P_7^2(x) &= \left\{ \begin{array}{l} +184.041x^{14} - 594.594x^{12} + 750.519x^{10} \\ -466.620x^8 + 147.735x^6 - 22.050x^4 + 1.225x^2 \end{array} \right. \\
16384 \cdot P_8^2(x) &= \left\{ \begin{array}{l} +41.409.225x^{16} - 154.594.440x^{14} + 233.477.244x^{12} \\ -182.702.520x^{10} + 78.745.590x^8 - 18.304.440x^6 \\ +2.072.700x^4 - 88.200x^2 + 1.225 \end{array} \right. \\
16384 \cdot P_9^2(x) &= \left\{ \begin{array}{l} +147.744.025x^{18} - 625.739.400x^{16} + 1.100.565.180x^{14} \\ -1.039.878.840x^{12} + 570.143.574x^{10} - 182.702.520x^8 \\ +32.695.740x^6 - 2.910.600x^4 + 99.225x^2 \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

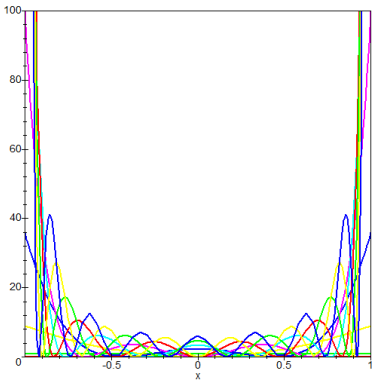
Die grafische Darstellung dazu.



3.2 Polynome der Form $P'_n(x)^2$

$$
\begin{aligned}
1 \cdot P'_1(x)^2 &= \{+1 \\
1 \cdot P'_2(x)^2 &= \{+9x^2 \\
4 \cdot P'_3(x)^2 &= \{+225x^4 - 90x^2 + 9 \\
4 \cdot P'_4(x)^2 &= \{+1.225x^6 - 1.050x^4 + 225x^2 \\
64 \cdot P'_5(x)^2 &= \begin{cases} +99.225x^8 - 132.300x^6 + 53.550x^4 \\ -6.300 * x^2 + 225 \end{cases} \\
64 \cdot P'_6(x)^2 &= \begin{cases} +480.249x^{10} - 873.180x^8 + 542.430x^6 \\ -132.300x^4 + 11.025x^2 \end{cases} \\
256 \cdot P'_7(x)^2 &= \begin{cases} +9.018.009x^{12} - 20.810.790x^{10} + 17.681.895x^8 \\ -6.759.060x^6 + 1.135.575x^4 - 66.150x^2 + 1.225 \end{cases} \\
256 \cdot P'_8(x)^2 &= \begin{cases} +41.409.225x^{14} - 115.945.830x^{12} + 125.756.631x^{10} \\ -66.486.420x^8 + 17.681.895x^6 - 2.182.950x^4 + 99.225x^2 \end{cases} \\
16.384 \cdot P'_9(x)^2 &= \begin{cases} +11.967.266.025x^{16} - 39.421.582.200x^{14} + 52.175.623.500x^{12} \\ -35.497.261.800x^{10} + 13.179.716.550x^8 - 2.610.808.200x^6 \\ +248.856.300x^4 - 8.731.800x^2 + 99.225 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Die grafische Darstellung dazu.

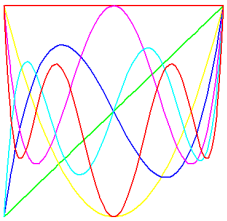


LaTeX 2_ε

$$\oiint$$

4.1.2 Approximation von π und $\ln 2$ über die Zernikepolynome

Zernike-Polynome



Kleine Übersicht, Approximation

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 5. Dezember 2018 – Letzte Revision: 12. April 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Übersicht **3**
1.1 Darstellungsmöglichkeiten . . . 3
1.1.1 Allgemein . . . 3
1.1.2 Mittels Γ, ${}_2F_1$ und $P_n^{\alpha;\beta}$ . . . 4
1.1.3 Produkt . . . 5
1.1.4 Erweitert . . . 6
1.2 Eigenschaften der Radialpolynome . . . 8
1.3 Beschreibung von Wellenfronten . . . 10
1.4 Physikalische Zusammenhänge . . . 11

2 Anwendung in der Approximation **12**
2.1 Darstellung von π . . . 12
2.2 Darstellung von $\ln 2$ . . . 13
2.3 Verallgemeinerung I . . . 14
2.4 Verallgemeinerung II . . . 15

3 Anhang **17**
3.1 Zernikekoeffizienten . . . 17
3.2 Integralwerte I . . . 19
3.3 Integralwerte II . . . 20

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Übersicht

1.1 Darstellungsmöglichkeiten

1.1.1 Allgemein

Nach Frederik „Frits“ Zernike (1888 - 1966) benannte Orthogonalpolynome. Nutzung vor allem in der geometrischen Optik. [001]

Die Polynome können unterschieden werden in gerade und ungerade Zernike-Polynome.

Gerade Polynome

$$Z_n^{(m)}(\rho, \phi) = R_n^{(m)}(\rho) \cdot \cos(m \cdot \phi)$$

Ungerade Polynome

$$Z_n^{(-m)}(\rho, \phi) = R_n^{(m)}(\rho) \cdot \sin(m \cdot \phi)$$

Wobei für m und n gilt:

$$(n \in N) \geq (m \in N) \geq 0$$

ϕ wird als azimuthaler Winkel und ρ als der normierte radiale Abstand bezeichnet. Für diese gelten Randbedingungen:

$$0 \leq \phi \leq 2\pi \qquad 0 \leq \rho \leq 1$$

Die Hüllkurve der Trigonometrischen Funktionen, die Radialpolynome $R_n^{(m)}(\rho)$ sind berechenbar über:

$$R_n^{(m)}(\rho) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} \frac{(-1)^k \cdot (n-k)!}{k! \cdot \left(\frac{n+m}{2} - k\right)! \cdot \left(\frac{n-m}{2} - k\right)!} \cdot \rho^{n-2k} & \text{wenn} \quad \frac{n-m}{2} \in N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Radialpolynom ist nur definiert, wenn der Wert $n - m$ ein gerader ist.

1.1.2 Mittels Γ, ${}_2F_1$ und $P_n^{\alpha;\beta}$

Es existieren weitere Schreibweisen.

Hier für das Radialpolynom:

$$R_n^{(m)}(\rho) = \frac{\mathbf{\Gamma}(n+1) \cdot {}_2\mathbf{F}_1\left(-\frac{m+n}{2}; \frac{m-n}{2}; -n; \frac{1}{\rho^2}\right)}{\mathbf{\Gamma}\left(\frac{2+n-m}{2}\right) \cdot \mathbf{\Gamma}\left(\frac{2+m+m}{2}\right)} \cdot \rho^n$$

Wobei $\mathbf{\Gamma}(z)$ die Gammafunktion und ${}_2\mathbf{F}_1(a; b; c; z)$ eine hypergeometrische Funktion darstellt.

Unter gegebenen Randbedingungen kann eine weitere Darstellung angegeben werden mit Hilfe von Jacobi-Polynomen $\mathbf{P}_n^{\alpha;\beta}(\chi)$.

$$R_n^{(m)}(\rho) = (-1)^{\frac{n-m}{2}} \cdot \rho^m \cdot \mathbf{P}_{\frac{n-m}{2}}^{(m;0)}\left(1 - 2\rho^2\right)$$

1.1.3 Produkt

Die Zernike-Polynome können als Produkt von Radialpolynom R und der trigonometrische Funktion G dargestellt werden.

$$Z(\rho, \phi) = R(\rho) \cdot G(\phi)$$

Zu erkennen ist, dass eine Rotation des Zernike-Polynoms um $\phi + \alpha$ nicht die „Form“ des Polynoms $R(\rho)$ ändert.

1.1.4 Erweitert

Gegeben sei das Symbol ε mit:

$$\varepsilon_{m;n} = \begin{cases} \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{wenn} \quad m = 0 \ ; \ n \neq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{\varepsilon^2_{m;n}} = \begin{cases} 2 & \text{wenn} \quad m = 0 \ ; \ n \neq 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Weiterhin die Relation:

$$2 \cdot l + m + n = 4$$

$\Rightarrow$

$$l = 2 - \frac{m+n}{2}$$

So kann ein Erweitertes Zernike-Polynom $\Phi(\rho;\phi)$ beschrieben werden.

$$\Phi\left(\rho;\phi\right) = \frac{1}{\varepsilon^2_{m;n}} \cdot A_{l;m;n} \cdot R^{(m)}_n\left(\rho\right) \cdot \cos\left(m \cdot \phi\right) \qquad \Phi\left(\rho;\phi\right) = \frac{1}{\varepsilon^2_{m;n}} \cdot A_{l;m;n} \cdot R^{(m)}_n\left(\rho\right) \cdot \sin\left(m \cdot \phi\right)$$

$\Rightarrow$

j	l	n	m	$\frac{1}{\varepsilon^2_{m;n}}$	$\Phi(\rho;\phi)$
1	2	0	0	1	1
2	1	1	1	1	$\sqrt{2} \cdot \rho \cdot \cos\phi$
3	1	1	1	1	$\sqrt{2} \cdot \rho \cdot \sin\phi$
4	1	2	0	2	$\sqrt{3} \cdot \left(2 \cdot \rho^2 - 1\right)$
5	0	2	2	1	$\sqrt{6} \cdot \rho^2 \cdot \sin 2\phi$
6	0	2	2	1	$\sqrt{6} \cdot \rho^2 \cdot \cos 2\phi$
7	0	3	1	1	$\sqrt{8} \cdot \left(3 \cdot \rho^3 - 2 \cdot \rho\right) \cdot \sin\phi$
8	0	3	1	1	$\sqrt{8} \cdot \left(3 \cdot \rho^3 - 2 \cdot \rho\right) \cdot \cos\phi$
9	-1	3	3	1	$\sqrt{8} \cdot \rho^3 \cdot \sin 3\phi$
10	-1	3	3	1	$\sqrt{8} \cdot \rho^3 \cdot \cos 3\phi$
11	0	4	0	2	$\sqrt{5} \cdot \left(6 \cdot \rho^4 - 6 \cdot \rho^2 + 1\right)$
12	-1	4	2	1	$\sqrt{10} \cdot \left(4 \cdot \rho^4 - 3 \cdot \rho^3\right) \cdot \cos 2\phi$
13	-1	4	2	1	$\sqrt{10} \cdot \left(4 \cdot \rho^4 - 3 \cdot \rho^3\right) \cdot \sin 2\phi$
14	-2	4	4	1	$\sqrt{10} \cdot \rho^4 \cdot \cos 4\phi$
15	-2	4	4	1	$\sqrt{10} \cdot \rho^4 \cdot \sin 4\phi$

Der Ausdruck $A_{l;m;n}$ lässt sich für Werte von $j \leq 15$ vereinfacht berechnen durch:

$$A_{l;m;n} = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{n+1} & \text{wenn} \quad \frac{1}{\epsilon^2_{m;n}} = 2 \\ \sqrt{n+1} & \text{wenn} \quad \frac{1}{\epsilon^2_{m;n}} = 1 \quad \text{und} \quad n \in \{0;1\} \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt{n+1} & \text{wenn} \quad \frac{1}{\epsilon^2_{m;n}} = 1 \quad \text{und} \quad n \in \{2;3;4\} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

j	n	$\frac{1}{\varepsilon^2_{m;n}}$	$A_{l;m;n}$	$\frac{1}{\varepsilon^2_{m;n}} \cdot A_{l;m;n}$
1	0	1	$\sqrt{1}$	$\sqrt{1}$
2	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
3	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
4	2	2	$\sqrt{3} \cdot 0,5$	$\sqrt{3}$
5	2	1	$\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{6}$
6	2	1	$\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{6}$
7	3	1	$\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{8}$
8	3	1	$\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{8}$
9	3	1	$\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{8}$
10	3	1	$\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{8}$
11	4	2	$\sqrt{5} \cdot 0,5$	$\sqrt{5}$
12	4	1	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{10}$
13	4	1	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{10}$
14	4	1	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{10}$
15	4	1	$\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$	$\sqrt{10}$

Aus dieser Art der Zernike-Polynome werden die in der Optik benutzten abgeleitet, lediglich andere Koeffizienten von A werden genutzt.

1.2 Eigenschaften der Radialpolynome

Die ersten Radialpolynome tabellarisch aufgelistet.

n	m	$n-m$	$\frac{n-m}{2} \in N$	$R_n^{(m)}(\rho)$
0	0	+0	$\surd$	$R_0^{(0)}(\rho) = 1$
0	1	-1	$\oslash$	$R_0^{(1)}(\rho) = 0$
0	2	-2	$\oslash$	$R_0^{(2)}(\rho) = 0$
0	3	-3	$\oslash$	$R_0^{(3)}(\rho) = 0$
0	4	-4	$\oslash$	$R_0^{(4)}(\rho) = 0$
1	0	+1	$\oslash$	$R_1^{(0)}(\rho) = 0$
1	1	+0	$\surd$	$R_1^{(1)}(\rho) = \rho$
1	2	-1	$\oslash$	$R_1^{(2)}(\rho) = 0$
1	3	-2	$\oslash$	$R_1^{(3)}(\rho) = 0$
1	4	-3	$\oslash$	$R_1^{(4)}(\rho) = 0$
2	0	+2	$\surd$	$R_2^{(0)}(\rho) = 2\rho^2 - 1$
2	1	+1	$\oslash$	$R_2^{(1)}(\rho) = 0$
2	2	+0	$\surd$	$R_2^{(2)}(\rho) = \rho^2$
2	3	-1	$\oslash$	$R_2^{(3)}(\rho) = 0$
2	4	-2	$\oslash$	$R_2^{(3)}(\rho) = 0$
3	0	+3	$\oslash$	$R_3^{(0)}(\rho) = 0$
3	1	+2	$\surd$	$R_3^{(1)}(\rho) = 3\rho^3 - 2\rho$
3	2	+1	$\oslash$	$R_3^{(2)}(\rho) = 0$
3	3	+0	$\surd$	$R_3^{(3)}(\rho) = \rho^3$
3	4	-1	$\oslash$	$R_3^{(4)}(\rho) = 0$
4	0	+4	$\surd$	$R_4^{(0)}(\rho) = 6\rho^4 - 6\rho^2 + 1$
4	1	+3	$\oslash$	$R_4^{(1)}(\rho) = 0$
4	2	+2	$\surd$	$R_4^{(2)}(\rho) = 4\rho^4 - 3\rho^2$
4	3	+1	$\oslash$	$R_4^{(3)}(\rho) = 0$
4	4	+0	$\surd$	$R_4^{(4)}(\rho) = \rho^4$

Eine grundlegende Eigenschaft des Radialpolynoms:

$$R_n^{(m)}(1) = 1$$

Es besteht die Möglichkeit das Radialpolynom aufzusplitten:

$$R_{2n-m}^{(m)}(\rho) = Q_n^{(m)}(\rho) \cdot \rho^m$$

$\Rightarrow$

$$Q_n^{(m)}(\rho) = \sum_{s=0}^{n-m} (-1)^s \cdot \frac{(2n-m-s)!}{s! \cdot (n-s)! \cdot (n-m-s)!} \cdot \rho^{2(n-m-s)}$$

Über Q(ρ) können Wellenfronten dargestellt werden.

Ein Sonderfall von Q(ρ) für $m = 0$.

$$Q_n^{(0)}(\rho) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \cdot \frac{(2n-s)!}{s! \cdot (n-s)! \cdot (n-s)!} \cdot \rho^{2(n-s)}$$

$\Rightarrow$

$$R_{2n}^{(0)}(\rho) = Q_n^{(0)} \cdot (\rho)$$

$\Rightarrow$

n	$Q_n^{(0)}(\rho) = R_{2n}^{(0)}(\rho)$
0	1
1	$2\rho^2 - 1$
2	$6\rho^4 - 6\rho^2 + 1$
3	$20\rho^6 - 30\rho^4 + 12\rho^2 - 1$
4	$70\rho^8 - 140\rho^6 + 90\rho^4 - 20\rho^2 + 1$

Eine weitere Eigenschaft des Radialpolynoms:

$$N_n^{(m)} = \frac{1}{n+1} \cdot \int_0^1 R_n^{(m)}(\rho) \cdot d\rho$$

$\Rightarrow$

$$N_0^{(0)} = +1 \qquad N_1^{(1)} = +1 \qquad N_2^{(2)} = +1 \qquad N_3^{(3)} = +1 \qquad N_4^{(4)} = +1$$

$$N_2^{(0)} = -1 \qquad N_3^{(1)} = -1 \qquad N_4^{(2)} = -1$$

$$N_4^{(0)} = +1$$

Dadurch besteht eine Möglichkeit, die Orthogonalität und Normalität von R(ρ) nachzuweisen.

$$\int_0^1 R_{n_1}^{(m)}(\rho) \cdot R_{n_2}^{(m)}(\rho) \cdot \rho \cdot d\rho = \frac{1}{2 \cdot (n+1)} \cdot \delta_{n_1;n_2}$$

Die Zernike-Polynome sind Orthogonalpolynome.

1.3 Beschreibung von Wellenfronten

Es war oben gezeigt:

$$Q_n^{(m)}(\rho) = \sum_{s=0}^{n-m} (-1)^s \cdot \frac{(2 \cdot n - m - s)!}{s! \cdot (n-s)! \cdot (n-m-s)!} \cdot \rho^{2 \cdot (n-m-s)}$$

$\rightarrow$

$$Q_n^{(0)}(\rho) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \cdot \frac{(2 \cdot n - s)!}{s! \cdot (n-s)! \cdot (n-s)!} \cdot \rho^{2 \cdot (n-s)}$$

Beide Werte werden eingesetzt in:

$$\sum W = \Delta W + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cdot Q_n^{(0)}(\rho) + \sum_{m=1}^{n} Q_n^{(m)}(\rho) \cdot \rho^m \cdot (B_{n;m} \cdot \cos(m \cdot \phi) + C_{n;m} \cdot \sin(m \cdot \phi)) \right]$$

Unter der Annahme dass $\Delta W = 0$ gilt, ist die Wellenfront definiert.

$$\Delta W_{n;m} = \sum_{j=1}^{\infty} \left[A_n \cdot Q_n^{(0)}(\rho) + \sum_{m=1}^{n} Q_n^{(m)}(\rho) \cdot \rho^m \cdot (B_{n;m} \cdot \cos(m \cdot \phi) + C_{n;m} \cdot \sin(m \cdot \phi)) \right]$$

Die polynomialen Koeffizienten A_n ; $B_{n;m}$; $C_{n;m}$ werden individuell vergeben und können je nach Anwender sich unterscheiden. Werden beide hier 1 gesetzt und die einzelne Welle ist erfragt, gilt:

$$\Delta W_{n;m} = Q_n^{(0)}(\rho) + \sum_{m=1}^{n} Q_n^{(m)}(\rho) \cdot \rho^m \cdot (\cos(m \cdot \phi) + \sin(m \cdot \phi))$$

$\Rightarrow$

n	ΔW
0	$\Delta W_{0;m} = Q_0^{(0)}(\rho)$
1	$\Delta W_{1;m} = Q_1^{(0)}(\rho) + Q_1^{(1)}(\rho) \cdot \rho \cdot (\cos\phi + \sin\phi)$
2	$\Delta W_{2:m} = Q_2^{(0)}(\rho) + Q_2^{(1)}(\rho) \cdot \rho \cdot (\cos\phi + \sin\phi) + Q_2^{(2)}(\rho) \cdot \rho^2 \cdot (\cos(2 \cdot \phi) + \sin(2 \cdot \phi))$

$\Rightarrow$

n	ΔW
0	$\Delta W_{0;m} = 1$
1	$\Delta W_{1;m} = 2 \cdot \rho^2 + \rho \cdot (\cos\phi + \sin\phi) - 1$
2	$\Delta W_{2:m} = 6 \cdot \rho^4 - 6 \cdot \rho^2 + \left(3 \cdot \rho^2 - 2\right) \cdot \rho \cdot (\cos\phi + \sin\phi) + \rho^2 \cdot (\cos(2 \cdot \phi) + \sin(2 \cdot \phi)) + 1$

Ähnlich der Fouriersynthese baut sich für ein $n \rightarrow \infty$ die Funktion der Wellenfront auf.

Abweichungen davon bewirken Wellenfrontfehler in der Optik.

1.4 Physikalische Zusammenhänge

Die Europäischen Einheiten der Optik:

Sphärischer Brechwert	S
Zylindrischer Brechwert	C
Zylinderachse	α

Amerikanische Einheiten der Optik „Power-Vektor-Darstellung - PWD“:

Sphärisches Äquivalent	$S\text{Ä} = S + \frac{1}{2} \cdot C$
Korrigierter Jackson-Kreuzzylinder - Horizontal	$J_0 = -\frac{1}{2} \cdot C \cdot \cos(2 \cdot \alpha)$
Korrigierter Jackson-Kreuzzylinder - Schräg	$J_{45} = -\frac{1}{2} \cdot C \cdot \sin(2 \cdot \alpha)$

$\Rightarrow$

$$C = -2 \cdot \sqrt{J_0^2 + J_{45}^2} \qquad \alpha = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \frac{J_{45}}{J_0} \qquad S = S\text{Ä} - \frac{1}{2} \cdot C$$

Es existiert ein Zusammenhang zwischen der „PWD“ und den Zernike-Polynomen unter Beachtung einiger, hier nicht näher genannter Randbedingungen.

$$S\text{Ä}\,[\text{dpt}] = -4 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{c_0^{(2)}}{\rho^2}\,[\mu\text{m}] \quad \Rightarrow \quad -4 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{A_{l;m;n}}{\rho^2} = -12 \cdot \frac{\left(2 \cdot \rho^2 - 1\right)}{\rho^2}$$

$$J_0\,[\text{dpt}] = -2 \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{c_2^{(+2)}}{\rho^2}\,[\mu\text{m}] \quad \Rightarrow \quad -2 \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{A_{l;m;n}}{\rho^2} = -12 \cdot \cos(2 \cdot \phi)$$

$$J_{45}\,[\text{dpt}] = -2 \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{c_2^{(-2)}}{\rho^2}\,[\mu\text{m}] \quad \Rightarrow \quad -2 \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{A_{l;m;n}}{\rho^2} = -12 \cdot \sin(2 \cdot \phi)$$

2 Anwendung in der Approximation

2.1 Darstellung von π

Folgende Radialpolynome werden zur weiteren Verwendung separiert.

$$\mathbf{R} = R_{n=0\ldots\infty}^{(m)=\begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad n = \text{even} \\ 1 & \text{wenn} \quad n = \text{odd} \end{cases}} = R_0^{(0)}; R_1^{(1)}; R_2^{(0)}; R_3^{(1)}; R_4^{(0)}; R_5^{(1)}; R_6^{(0)}; \ldots$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{R} = \begin{cases} 1 \\ 1 \cdot \rho \\ 2 \cdot \rho^2 - 1 \\ 3 \cdot \rho^3 - 2 \cdot \rho \\ 6 \cdot \rho^4 - 6 \cdot \rho^2 + 1 \\ 10 \cdot \rho^5 - 12 \cdot \rho^3 + 3 \cdot \rho \\ 20 \cdot \rho^6 - 30 \cdot \rho^4 + 12 \cdot \rho^2 - 1 \\ \ldots \end{cases}$$

Das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^{1} R_{n=0\ldots\infty}^{(m)} \cdot \mathrm{d}\rho = \begin{cases} +2/1 \\ 0 \\ -2/3 \\ 0 \\ +2/5 \\ 0 \\ -2/7 \\ \ldots \end{cases}$$

besitzt von Null verschiedene Werte nur für $m = 0$, so dass sich die Berechnungsgrundlage für $\mathbf{R}$ weiter vereinfacht.

$$R_n^{(0)}(\rho) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^k \cdot (n-k)!}{k! \cdot \left(\frac{n}{2}-k\right)! \cdot \left(\frac{n}{2}-k\right)!} \cdot \rho^{n-2k} & \text{wenn} \quad \frac{n}{2} \in N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit:

$$\int_{-1}^{1} R_{n=0;2;4;6;\ldots;\infty}^{(0)} \cdot \mathrm{d}\rho = \frac{2}{n+1} \cdot (-1)^{\frac{n}{2}}$$

$\Rightarrow$

$$2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^{1} R_{n=0;2;4;6;\ldots;\infty}^{(0)} \cdot \mathrm{d}\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{2k+1} \cdot (-1)^k = \pi$$

2.2 Darstellung von $\ln 2$

Folgende Radialpolynome werden zur weiteren Verwendung separiert.

$$\mathbf{R} = R_{n=0\ldots\infty}^{(m)=\begin{cases} 0 & \text{wenn} \quad n = \text{even} \\ 1 & \text{wenn} \quad n = \text{odd} \end{cases}} = R_0^{(0)}; R_1^{(1)}; R_2^{(0)}; R_3^{(1)}; R_4^{(0)}; R_5^{(1)}; R_6^{(0)}; \ldots$$

$\Rightarrow$

$$\mathbf{R} = \begin{cases} 1 \\ 1 \cdot \rho \\ 2 \cdot \rho^2 - 1 \\ 3 \cdot \rho^3 - 2 \cdot \rho \\ 6 \cdot \rho^4 - 6 \cdot \rho^2 + 1 \\ 10 \cdot \rho^5 - 12 \cdot \rho^3 + 3 \cdot \rho \\ 20 \cdot \rho^6 - 30 \cdot \rho^4 + 12 \cdot \rho^2 - 1 \\ \ldots \end{cases}$$

Das bestimmte Integral

$$\int_0^1 R_{n=0\ldots\infty}^{(m)} \cdot \mathrm{d}\rho = \begin{cases} +1/1 \\ +1/2 \\ -1/3 \\ -1/4 \\ +1/5 \\ +1/6 \\ -1/7 \\ \ldots \end{cases}$$

besitzt zwei alternierende (Teil)Folgen der Art:

$$\int_0^1 R_{n=0;2;4;\ldots;\infty}^{(m)} \cdot \mathrm{d}\rho = \begin{cases} +1/1 \\ -1/3 \\ +1/5 \\ -1/7 \\ \ldots \end{cases} \qquad \int_0^1 R_{n=1;3;5;\ldots;\infty}^{(m)} \cdot \mathrm{d}\rho = \begin{cases} +1/2 \\ -1/4 \\ +1/6 \\ \ldots \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\int_0^1 R_{n=0;2;4;\ldots;\infty}^{(m)} \cdot \mathrm{d}\rho = \frac{1}{n+1} \cdot (-1)^{\frac{n}{2}} \qquad \int_0^1 R_{n=1;3;5;\ldots;\infty}^{(m)} \cdot \mathrm{d}\rho = \frac{1}{n+1} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

$\Rightarrow$

$$4 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 R_{n=0;2;4;\ldots;\infty}^{(m)} \cdot \mathrm{d}\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{2k+1} \cdot (-1)^k = \pi$$

$$2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 R_{n=1;3;5;\ldots;\infty}^{(m)} \cdot \mathrm{d}\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \cdot (-1)^k = \ln 2$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 R_{n=0;2;4;\ldots;\infty}^{(m)} \cdot \mathrm{d}\rho + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 R_{n=1;3;5;\ldots;\infty}^{(m)} \cdot \mathrm{d}\rho = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k+3}{(k+1) \cdot (2k+1)} \cdot (-1)^k$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k+3}{(k+1) \cdot (2k+1)} \cdot (-1)^k = \int_1^{\infty} \frac{\arctan k}{k^2} \cdot \mathrm{d}k = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4}\pi \approx 1,131971754$$

2.3 Verallgemeinerung I

Ohne Beweis liegt offensichtlich für das Integral

$$\int_{-1}^{+1} R^{m}_{n=m;m+2;m+4;\ldots;\infty} \cdot \mathrm{d}\rho$$

eine Lösung vor.

$$\frac{2}{2k+m+1} \cdot (-1)^{k+m-2} \qquad \text{mit} \qquad k = \frac{n-m}{2}$$

Dann ist:

$$2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{2k+m+1} \cdot (-1)^{k+m-2} = (-1)^{m} \cdot \left(\mathbf{\Psi}\left(\frac{1}{4} \cdot (m+3)\right) - \mathbf{\Psi}\left(\frac{1}{4} \cdot (m+1)\right)\right)$$

Wobei $\mathbf{\Psi}$ die Psi- oder Digamma-Funktion darstellt.

Die ersten Werte aufgelistet:

m		
0	π	+3,14159
1	$-2 \cdot \ln 2$	-1,38629
2	$4 - \pi$	+0,85841
3	$2 \cdot \ln 2 - 2$	-0,61371
4	$\pi - 8/3$	+0,47493
5	$1 - 2 \cdot \ln 2$	-0,38629
6	$52/15 - \pi$	+0,32507
7	$2 \cdot \ln 2 - 5/3$	-0,28037
8	$\pi - 304/105$	+0,24635
9	$7/6 - 2 \cdot \ln 2$	-0,21963

Wobei der Grenzwert für $m \to \infty$ bei 0 liegt.

2.4 Verallgemeinerung II

Ohne Beweis liegt offensichtlich für das Integral

$$\int_{0}^{+1} R^{m}_{n=m;m+2;m+4;\ldots;\infty} \cdot \mathrm{d}\rho$$

eine Lösung vor.

$$\frac{1}{2k+m+1} \cdot (-1)^{k} \qquad \text{mit} \qquad k = \frac{n-m}{2}$$

Dann ist:

$$4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+m+1} \cdot (-1)^{k} = \frac{4}{m+1} \cdot \mathbf{F}\left(\frac{1}{2}(m+1); \frac{1}{2}(m+3); -1\right)$$

Wobei **F** die verallgemeinerte hypergeometrische Funktion darstellt.

Die ersten Werte aufgelistet:

m		
0	π	+3,14159
1	$2 \cdot \ln 2$	+1,38629
2	$4 - \pi$	+0,85841
3	$2 - 2 \cdot \ln 2$	+0,61371
4	$\pi - 8/3$	+0,47493
5	$2 \cdot \ln 2 - 1$	+0,38629
6	$52/15 - \pi$	+0,32507
7	$5/3 - 2 \cdot \ln 2$	+0,28037
8	$\pi - 304/105$	+0,24635
9	$2 \cdot \ln 2 - 7/6$	+0,21963

Wobei der Grenzwert für $m \to \infty$ bei 0 liegt.

3 Anhang

3.1 Zernikekoeffizienten

Angeben sind folgend die Koeffizienten der Zernikepolynome in Abhängigkeit von m und n.

a_9 a_8 . . . a_1 a_0	m = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n = 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 +1	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -
1	- - - - - - - - - -	0 0 0 0 0 0 0 0 +1 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -
2	0 0 0 0 0 0 0 +2 0 -1	- - - - - - - - - -	0 0 0 0 0 0 0 +1 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -
3	- - - - - - - - - -	0 0 0 0 0 0 +3 0 -2 0	- - - - - - - - - -	0 0 0 0 0 0 +1 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -
4	0 0 0 0 0 +6 0 -6 0 +1	- - - - - - - - - -	0 0 0 0 0 +4 0 -3 0 0	- - - - - - - - - -	0 0 0 0 0 +1 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -
5	- - - - - - - - - -	0 0 0 0 +10 0 -12 0 +3 0	- - - - - - - - - -	0 0 0 0 +5 0 -4 0 0 0	- - - - - - - - - -	0 0 0 0 +1 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	- - - - - - - - - -

Fortsetzung folgt

Fortsetzung

a_9 a_8 . . . a_1 a_0	m = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6	0 0 0 +20 0 -30 0 +12 0 -1	- - - - - - - - - -	0 0 0 +15 0 -20 0 +6 0 0	- - - - - - - - - -	0 0 0 +6 0 -5 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	0 0 0 +1 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -
7	- - - - - - - - - -	0 0 +35 0 -60 0 +30 0 -4 0	- - - - - - - - - -	0 0 +21 0 -30 0 +10 0 0 0	- - - - - - - - - -	0 0 +7 0 -6 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	0 0 +1 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
8	0 +70 0 -140 0 +90 0 -20 0 +1	- - - - - - - - - -	0 +56 0 -105 0 +60 0 -10 0 0	- - - - - - - - - -	0 +28 0 -42 0 +15 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	0 +8 0 -7 0 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	0 +1 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
9	- - - - - - - - - -	+126 0 -280 0 +210 0 -60 0 +5 0	- - - - - - - - - -	+84 0 -168 0 +105 0 -20 0 0 0	- - - - - - - - - -	+36 0 -56 0 +21 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	+9 0 -8 0 0 0 0 0 0 0	- - - - - - - - - -	+1 0 0 0 0 0 0 0 0 0

$\Leftarrow$

$$R_n^{(m)} = a_9 \cdot x^9 + a_8 \cdot x^8 + a_7 \cdot x^7 + a_6 \cdot x^6 + a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0$$

3.2 Integralwerte I

Lösungen des Integrals $\int\limits_{-1}^{+1} R_n^{(m)} \cdot \mathrm{d}\rho$

	m = 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n = 0	+2/1	0/1	0/1	-	-	-	-	-	-	-
n = 1	-	0/1	0/1	0/1	-	-	-	-	-	-
n = 2	-2/3	-	+2/3	0/1	0/1	-	-	-	-	-
n = 3	-	0/1	-	0/1	0/1	0/1	-	-	-	-
n = 4	+2/5	-	-2/5	-	+2/5	0/1	0/1	-	-	-
n = 5	-	0/1	-	0/1	-	0/1	0/1	0/1	-	-
n = 6	-2/7	-	+2/7	-	-2/7	-	+2/7	0/1	0/1	-
n = 7	-	0/1	-	0/1	-	0/1	-	0/1	0/1	0/1
n = 8	+2/9	-	-2/9	-	+2/9	-	-2/9	-	+2/9	0/1
n = 9	-	0/1	-	0/1	-	0/1	-	0/1	-	0/1

3.3 Integralwerte II

Lösungen des Integrals $\int\limits_{0}^{+1} R_n^{(m)} \cdot \mathrm{d}\rho$

- Für $n = 0; 2; 4; \ldots; 2k$ gilt:

$$\int\limits_{-1}^{0} R_n^{(m)} \cdot \mathrm{d}\rho = + \int\limits_{0}^{+1} R_n^{(m)} \cdot \mathrm{d}\rho$$

- Für $n = 1; 3; 5; \ldots; 2k + 1$ gilt:

$$\int\limits_{-1}^{0} R_n^{(m)} \cdot \mathrm{d}\rho = - \int\limits_{0}^{+1} R_n^{(m)} \cdot \mathrm{d}\rho$$

	m = 0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
n = 0	+1/1	0/1	0/1	-	-	-	-	-	-	-
n = 1	-	+1/2	0/1	0/1	-	-	-	-	-	-
n = 2	-1/3	-	+1/3	0/1	0/1	-	-	-	-	-
n = 3	-	-1/4	-	+1/4	0/1	0/1	-	-	-	-
n = 4	+1/5	-	-1/5	-	+1/5	0/1	0/1	-	-	-
n = 5	-	+1/6	-	-1/6	-	+1/6	0/1	0/1	-	-
n = 6	-1/7	-	+1/7	-	-1/7	-	+1/7	0/1	0/1	-
n = 7	-	-1/8	-	+1/8	-	-1/8	-	+1/8	0/1	0/1
n = 8	+1/9	-	-1/9	-	+1/9	-	-1/9	-	+1/9	0/1
n = 9	-	+1/10	-	-1/10	-	+1/10	-	-1/10	-	+1/10

LaTeX 2_ε

$$\oiint$$

4.1.3 Approximation der Ω-Konstante über eine spezielle bilogarithmische Funktion

Schnittpunkt zweier Einzelfunktionen einer zerlegten speziellen bilogarithmischen Funktion

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 28. Januar 2015 – Letzte Revision: 20. Dezember 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**
1.1 Der Sonderfall $p = q = 1$ . . . 3
1.2 Der allgemeine Fall $p \neq 1$ oder $q \neq 1$ . . . 4

2 Koordinatentransformation und Schnittpunkt **5**

3 Ermittlung des Schnittpunktes **7**
3.1 Für den Sonderfall $q = 1$ – die Ω- Konstante . . . 7
3.2 Für den allgemeinen Fall $p \neq 1$ und $q \neq 1$ . . . 8
3.3 Für den Sonderfall $p = 1$ – die Ω- Konstante . . . 9

4 Umschreibung der LambertW- Funktion in einer linearen Interpolation. **10**
4.1 Vorbetrachtungen . . . 10
4.2 Modell I . . . 11
4.3 Modell II . . . 12
4.4 Zusammenführung der Modelle . . . 13

5 Darstellung als handhabbare Berechnungsgrundlage **14**

6 Ein kleines Beispiel **16**

7 Zusammenfassung und Vergleich der gezeigten Methoden **18**
7.1 Zusammenfassung . . . 18
7.2 Vergleich . . . 19
7.3 Grafiken . . . 20

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Einleitung

Gegeben ist eine spezielle, bilogarithmische Funktion $y = h(x)$, welche die Koeffizienten bzw. Freiheitsgrade $p > 0$ und $q > 0$ besitzt. Vorliegend, die parametrische Beschreibung der interessierenden Funktion. [001]

1.1 Der Sonderfall $p = q = 1$

$$x = e^{-t} \qquad y = -\ln t$$

Wobei durch Koordinatentransformation $t \to y, x \to t$ bzw. $t \to x, y \to t$ beide Darstellungen in einander überführt werden können.

$$t = e^{-y} \qquad t = -\ln x$$

$\Rightarrow$

$$-\ln t = y \qquad e^{-t} = x$$

Die Parameterdarstellung insgesamt kann in das kartesische Koordinatensystem transformiert werden.

$$t = -\ln x \qquad y = \ln t$$

$\Rightarrow$

$$y = -\ln(-\ln x)$$

1.2 Der allgemeine Fall $p \neq 1$ oder $q \neq 1$

Gegeben ist die parametrische Beschreibung einer speziellen Funktion.

$$x = p \cdot e^{-q \cdot t} \qquad y = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{t}{p}$$

Wobei durch Koordinatentransformation $t \to y, x \to t$ bzw. $t \to x, y \to t$ beide Darstellungen in einander überführt werden können.

$$t = p \cdot e^{-q \cdot y} \qquad t = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{x}{p}$$

$\Rightarrow$

$$-\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{t}{p} = y \qquad p \cdot e^{-q \cdot t} = x$$

Die Parameterdarstellung insgesamt kann in das kartesische Koordinatensystem transformiert werden.

$$t = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{x}{p} \qquad y = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{t}{p}$$

$\Rightarrow$

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln \left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln \frac{x}{p} \right)$$

Letzterer Ausdruck ist die vorliegende Arbeitsgleichung. Die parametrische Beschreibung ist von Interesse.

$$x = p \cdot e^{-q \cdot t} \qquad y = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{t}{p}$$

2 Koordinatentransformation und Schnittpunkt

Im letzten Abschnitt ist die parametrische Darstellung der bilogarithmischen Funktion gezeigt worden.

$$x = p \cdot e^{-q \cdot t} \qquad y = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{t}{p}$$

Es wird eine Koordinatentransformation durchgeführt.

$$x \to y \qquad t \to x$$

$\Rightarrow$

$$y = p \cdot e^{-q \cdot x} \qquad y = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{x}{p}$$

$\Rightarrow$

$$f(x) = p \cdot e^{-q \cdot x} \qquad g(x) = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{x}{p}$$

Gesucht ist der Schnittpunkt $f(x) = g(x)$ zwischen beiden Funktionen. Die Lösung ist nicht mit algebraischen Mitteln darstellbar, da die Exponentialfunktion sowie die Logarithmusfunktion transzendent sind.

Jedoch ist über die Arbeitsgleichung zu zeigen, dass es eine Lösung geben muss. In die Arbeitsgleichung wird $g(x)$ eingesetzt.

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln \left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln \frac{x}{p} \right)$$

$\Rightarrow$

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln \left(\frac{1}{p} \cdot g(x) \right)$$

Umstellen und $f(x)$ einsetzten.

$$e^{-q \cdot y} = \frac{1}{p} \cdot g(x)$$

$\Rightarrow$

$$f(x) = g(x)$$

Gleichzeitig ist damit gezeigt, dass für einen Schnittpunkt $P_S(x_S; y_S)$ gelten muss.

$$x_S = y_S$$

Nicht gezeigt ist, ob es mehrere Schnittpunkte geben kann mit anderen Eigenschaften.

Wenn für den Schnittpunkt $x_S = y_S$ gilt, so kann die Forderung $f(x) = g(x)$ umschrieben werden in:

$$f(x) = x \qquad g(x) = x$$

Der dort zu findende Schnittpunkt ist identisch mit P_S. Vorteil ist, dass nur noch eine Transzendente auftritt.

$$p \cdot e^{-q \cdot x} = x \qquad -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{x}{p} = x$$

$\Rightarrow$

$$p \cdot e^{-q \cdot x} - x = 0 \qquad \frac{1}{q} \cdot \ln \frac{x}{p} + x = 0$$

Die Lösung beider Ausdrücke ist identisch. Beide Ausdrücke sind weiterhin ineinander überführbar.

$$-\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{x}{p} - x = 0$$

$\Rightarrow$

$$-\ln \frac{x}{p} - q \cdot x = 0$$

$\Rightarrow$

$$e^{-\ln \frac{x}{p} - q \cdot x} = 1$$

$\Rightarrow$

$$e^{-\ln \frac{x}{p}} \cdot e^{-q \cdot x} = 1$$

$\Rightarrow$

$$\frac{p}{x} \cdot e^{-q \cdot x} = 1$$

$\Rightarrow$

$$g(x) = x$$

Daher:

$$f(x) \to g^{-1}(x) \qquad g(x) \to f^{-1}(x)$$

3 Ermittlung des Schnittpunktes

3.1 Für den Sonderfall $q = 1$ – die Ω- Konstante

Aus der letzten Umstellung ist eine Lösung für $q = 1$ abzulesen.

$$\frac{p}{x} \cdot e^{-x} = 1$$

$\Rightarrow$

$$x \cdot e^{x} = p$$

Die Lösung dieses Ausdrucks ist:

$$x_S^{(q=1)} = y_S^{(q=1)} = W\left(p\right)$$

Wobei $W\left(\bullet\right)$ die Lambertsche W- Funktion darstellt. Diese kann taylorisiert werden durch:

$$W\left(\bullet\right) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot \bullet^i$$

Damit ist die Lösung für diesen Sonderfall darstellbar.

$$x_S^{(q=1)} = y_S^{(q=1)} = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot p^i$$

Für ein $p = 1$ ergibt sich die Omega- Konstante:

$$x_S = y_S = W\left(1\right) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{-i^i}{i \cdot i!} = \Omega$$

$\Rightarrow$

$$\Omega = 0,5671432904097838729999686622103555497538157871865\ldots$$

3.2 Für den allgemeinen Fall $p \neq 1$ und $q \neq 1$

Die Ermittlung des Schnittpunktes für den allgemeinen Fall erfolgt über die originäre Berechnungsgrundlage der LambertW- Funktion. Ist eine Funktion gegeben der Form:

$$e^{-c \cdot x} = a \cdot (x - b)$$

Mit $a, b, c \in \Re$, dann ist die Lösung dieser Funktion gegeben mit:

$$x = b + \frac{1}{c} \cdot W\left(\frac{c \cdot e^{-c \cdot r}}{a}\right)$$

Im vorliegenden Fall:

$$c \to q \qquad b \to 0 \qquad a \to \frac{1}{p}$$

$\Rightarrow$

$$x_S^{(q>0;p>0)} = y_S^{(q>0;p>0)} = \frac{1}{q} \cdot W(q \cdot p)$$

Wobei $W(\bullet)$ die Lambertsche W- Funktion darstellt. Diese kann taylorisiert werden durch:

$$W(\bullet) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot \bullet^i$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{q} \cdot W(q \cdot p) = -\frac{1}{q} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot (q \cdot p)^i$$

3.3 Für den Sonderfall $p = 1$ – die Ω- Konstante

Der Sonderfall $p = 1$ ist einfach aus dem allgemeinen Fall ableitbar.

$$x_S^{(q>0;p>0)} = y_S^{(q>0;p>0)} = \frac{1}{q} \cdot W\left(q \cdot p\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_S^{(p=1)} = y_S^{(p=1)} = \frac{1}{q} \cdot W\left(q\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_S^{(q=1)} = y_S^{(q=1)} = -\frac{1}{q} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot q^i$$

Für ein $q = 1$ ergibt sich wieder die Omega- Konstante.

4 Umschreibung der LambertW- Funktion in einer linearen Interpolation.

4.1 Vorbetrachtungen

Die Darstellung der LambertW- Funktion ist gegeben mit:

$$W(\bullet) = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot \bullet^i$$

Nachteil dieser Summendarstellung ist deren Konvergenzverhalten. So reichen keine wenige erste Glieder aus, um $W(\bullet)$ für kleine $(\bullet)$ berechnen zu können. Betrachtet man die Differenz Δ zwischen zwei Summendarstellungen mit dem Abstand $\Delta n = 1$, dann folgt:

$$\Delta W(\bullet) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot \bullet^i - \left(-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot \bullet^i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot \bullet^i - \sum_{i=1}^{n} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot \bullet^i = -\sum_{i=n}^{n} \frac{-i^i}{i \cdot i!} \cdot \bullet^i$$

$\Rightarrow$

$$\Delta W(\bullet) = \frac{n^n}{n \cdot n!} \cdot \bullet^n$$

Im vorliegenden Fall ist $(\bullet)$ begrenzt auf $(\bullet) \in \Re^+$ und es wird ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit geschrieben:

$$(\bullet) = p = q = 1$$

$\Rightarrow$

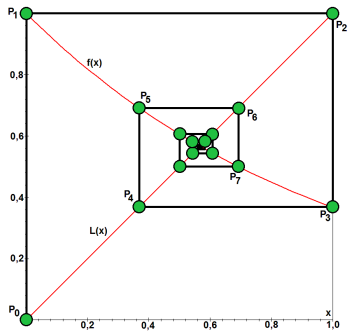
$$\Delta W(1) = \frac{n^{n-1}}{n!}$$

Der Grenzwert für diesen Ausdruck ist definiert durch

$$\lim_{n \to \infty} \Delta W(1) = \infty$$

was ungünstig für die Berechnung ist. Andere, ebenfalls im Nenner fakultätsnutzende Funktionen wie die Exponential-, Sinus- und Cosinusfunktion besitzen einen Grenzwert gegen Null. Dadurch können schon wenige erste Glieder der Summe den Funktionswert genau darstellen.

4.2 Modell I



$$\begin{array}{ccccccc} P_0\left(x_0;y_0\right) & \rightarrow & P_1\left(x_1;y_1\right) & \rightarrow & P_2\left(x_2;y_2\right) & \rightarrow & P_3\left(x_3;y_3\right) \\ P_4\left(x_4;y_4\right) & \rightarrow & P_5\left(x_5;y_5\right) & \rightarrow & P_6\left(x_6;y_6\right) & \rightarrow & P_7\left(x_7;y_7\right) \end{array}$$

Mit:

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_1 = x_0 \qquad y_1 = f\left(x_1\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_2 = L^{-1}\left(y_2\right) \qquad y_2 = y_1$$

$\Rightarrow$

$$x_3 = x_2 \qquad y_3 = f\left(x_3\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_4 = L^{-1}\left(y_4\right) \qquad y_4 = y_3$$

$\Rightarrow$

$$x_5 = x_4 \qquad y_5 = f\left(x_5\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_6 = L^{-1}\left(y_6\right) \qquad y_6 = y_5$$

$\Rightarrow$

$$x_7 = x_6 \qquad y_7 = f\left(x_7\right)$$

Die Berechnungsgrundlage für P_7 wäre dann:

$$x_7 = L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(f\left(0\right)\right)\right)\right)\right)\right) \qquad y_7 = f\left(L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(f\left(0\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

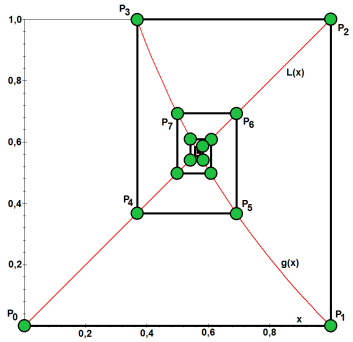
Damit ist der Schnittpunkt ermittelbar:

$$P_S\left(x_S;y_S\right)$$

Mit:

$$x_S = L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(\ldots f\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right) \qquad y_S = f\left(L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(\ldots f\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

4.3 Modell II



$$\begin{array}{ccccccc} P_0\left(x_0;y_0\right) & \rightarrow & P_1\left(x_1;y_1\right) & \rightarrow & P_2\left(x_2;y_2\right) & \rightarrow & P_3\left(x_3;y_3\right) \\ P_4\left(x_4;y_4\right) & \rightarrow & P_5\left(x_5;y_5\right) & \rightarrow & P_6\left(x_6;y_6\right) & \rightarrow & P_7\left(x_7;y_7\right) \end{array}$$

Mit:

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_1 = g^{-1}\left(y_1\right) \qquad y_1 = y_0$$

$\Rightarrow$

$$x_2 = x_1 \qquad y_2 = L\left(x_2\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_3 = g^{-1}\left(y_3\right) \qquad y_3 = y_2$$

$\Rightarrow$

$$x_4 = x_3 \qquad y_4 = L\left(x_4\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_5 = g^{-1}\left(y_5\right) \qquad y_5 = y_4$$

$\Rightarrow$

$$x_6 = x_5 \qquad y_6 = L\left(x_6\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_7 = g^{-1}\left(y_7\right) \qquad y_7 = y_6$$

Die Berechnungsgrundlage für P_7 wäre dann:

$$x_7 = g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(0\right)\right)\right)\right)\right)\right)\right) \qquad y_7 = L\left(g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(0\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

Damit ist der Schnittpunkt ermittelbar:

$$P_S\left(x_S;y_S\right)$$

Mit:

$$x_S = g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(L\left(\ldots g^{-1}\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right)\right) \qquad y_S = L\left(g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(L\left(\ldots g^{-1}\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right)$$

4.4 Zusammenführung der Modelle

Für den Schnittpunkt existieren zwei identische Berechnungsgrundlagen.

$$x_S = L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(\ldots f\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right) \qquad y_S = f\left(L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(f\left(L^{-1}\left(\ldots f\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

Sowie:

$$x_S = g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(L\left(\ldots g^{-1}\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right)\right) \qquad y_S = L\left(g^{-1}\left(L\left(g^{-1}\left(L\left(\ldots g^{-1}\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right)$$

Da in den vorangegangenen Absätzen gezeigt wurde, dass $f\left(x\right)$ und $g\left(x\right)$ ineinander überführbar sind der Form

$$f\left(x\right) \rightarrow g^{-1}\left(x\right) \qquad g\left(x\right) \rightarrow f^{-1}\left(x\right)$$

kann eine Darstellungsform für P_S gezeigt werden.

$$x_S = L\left(f\left(L\left(f\left(L\left(\ldots f\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right) \qquad y_S = f\left(L\left(f\left(L\left(f\left(L\left(\ldots f\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

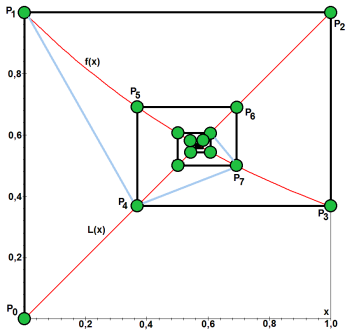
Wobei der Startwert, hier $P_0\left(0;0\right)$ in weiten Bereichen, im Rahmen der Randbedingungen gewählt werden kann, zum Beispiel ist P_1 auch ein geeigneter Kandidat.

5 Darstellung als handhabbare Berechnungsgrundlage

Nun ist gezeigte Möglichkeit der Berechnung des Schnittpunktes sehr unhandlich. Nächster Schritt ist die Überführung in eine Grundlage, mit der man ein spezielles Beispiel berechnen kann. Außerdem schauen die gewonnenen Gleichungen für x_S und y_S mehr nach einer Iteration aus, statt nach einer Interpolation. Daher soll weiter im eigentlichen Thema fortgeführt werden.

Als erstes wird die ganze Sache verkürzt. Das Um- und Einkreisen des Schnittpunktes erfolgt vorerst mittels rechtwinkligen Richtungsänderungen. Lässt man jedoch zwei (Zwischen)Punkte jeweils aus, ändert sich nichts am Modell, außer dass man sich dem Schnittpunkt jetzt spiralförmig annähert.

Folgendes Bild zeigt eine Möglichkeiten blau eingezeichnet mit Startpunkt P_1.



Betrachtet man auf dem Pfad „blau“ die y- Werte der angelaufenen Punkte $P_1, P_4, P_7, P_{10}, P_{13}, \cdots$, dann muss die Summe aller y der Schnittpunktswert x_S sein, wenn man die y- Werte der absoluten Länge nach aufsteigend halbiert.[1]

$$x_S = \frac{1}{32} \cdot y_1 + \frac{1}{16} \cdot y_4 + \frac{1}{8} \cdot y_7 + \frac{1}{4} \cdot y_{10} + \frac{1}{2} \cdot y_{13} + \ldots$$

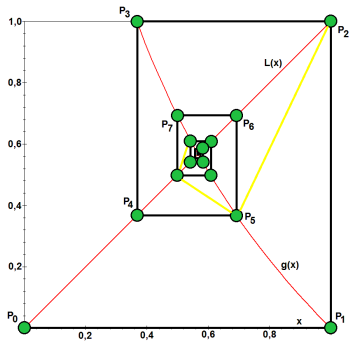
$\Rightarrow$

$$x_S = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{2^{5-i+1}} \cdot y_{3 \cdot i-2} \quad \xrightarrow{n=4} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^{n-i+2}} \cdot y_{3 \cdot i-2}$$

$\Rightarrow$

$$x_S = \frac{1}{2} \cdot y_{3 \cdot n+1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{n-i+2}} \cdot y_{3 \cdot i-2}$$

Ein weiteres Bild zeigt eine andere Möglichkeiten gelb eingezeichnet mit Startpunkt P_2.



Betrachtet man auf dem Pfad „gelb“ die x- Werte der angelaufenen Punkte $P_2, P_5, P_8, P_{11}, P_{14}, \cdots$, dann muss die Summe aller x der Schnittpunktswert y_S sein, wenn man die x- Werte der absoluten Länge nach aufsteigend halbiert.

$$y_S = \frac{1}{32} \cdot x_2 + \frac{1}{16} \cdot x_5 + \frac{1}{8} \cdot x_8 + \frac{1}{4} \cdot x_{11} + \frac{1}{2} \cdot x_{14} + \ldots$$

[1] Ergibt sich aus $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$ und $y = x$ und $f(x) = g(x)$

$\Rightarrow$

$$y_S = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{2^{5-i+1}} \cdot x_{3\cdot i-1} \quad \xrightarrow{n=4} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2^{n-i+2}} \cdot x_{3\cdot i-1}$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{1}{2} \cdot x_{3\cdot n+2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{n-i+2}} \cdot x_{3\cdot i-1}$$

Zu beachten ist, dass beide farbigen Pfade in keinem Fall den Pfad „schwarz“ kreuzen. Außer natürlich in den angelaufenen Punkten.

Benötigt wird nun nur noch eine Möglichkeit, die restlichen x_i und y_i zu berechnen.

Zuerst die Startwerte.

$$x_2 = p \qquad y_1 = p$$

Die Restwerte:

$$x_{3\cdot(n-j)+2} = \left| -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(\frac{1}{p} \cdot \sum_{i=1}^{n-j} \frac{1}{2^{(n-j)-i+1}} \cdot x_{3\cdot i-1}\right)\right|_{j=0\cdots n-1}$$

und

$$y_{3\cdot(n-j)+1} = \left| p \cdot e^{-q\cdot \sum_{i=1}^{n-j} \frac{1}{2^{(n-j)-i+1}} \cdot y_{3\cdot i-2}} \right|_{j=0\cdots n-1}$$

Für den bequemen Mathematiker folgend die ersten Glieder. Zuerst für x

$$x_5 = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(\frac{1}{p} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x_2\right)\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_8 = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(\frac{1}{p} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot x_2 + \frac{1}{2} \cdot x_5\right)\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_{11} = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(\frac{1}{p} \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot x_2 + \frac{1}{4} \cdot x_5 + \frac{1}{2} \cdot x_8\right)\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_{14} = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(\frac{1}{p} \cdot \left(\frac{1}{16} \cdot x_2 + \frac{1}{8} \cdot x_5 + \frac{1}{4} \cdot x_8 + \frac{1}{2} \cdot x_{11}\right)\right)$$

Zum Schluss für y. Damit steht der Berechnung des Schnittpunktes zwischen $f(x)$ und $g(x)$ nichts mehr im Wege.

$$y_4 = p \cdot e^{-q\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot y_1\right)}$$

$\Rightarrow$

$$y_7 = p \cdot e^{-q\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot y_1 + \frac{1}{2}\cdot y_4\right)}$$

$\Rightarrow$

$$y_{10} = p \cdot e^{-q\cdot\left(\frac{1}{8}\cdot y_1 + \frac{1}{4}\cdot y_4 + \frac{1}{2}\cdot y_7\right)}$$

$\Rightarrow$

$$y_{13} = p \cdot e^{-q\cdot\left(\frac{1}{16}\cdot y_1 + \frac{1}{8}\cdot y_4 + \frac{1}{4}\cdot y_7 + \frac{1}{2}\cdot y_{10}\right)}$$

6 Ein kleines Beispiel

Zur Erinnerung, der Schnittpunkt P_S folgender Funktionen ist gesucht.

$$f(x) = p \cdot e^{-q \cdot x} \qquad g(x) = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{x}{p}$$

Gewählt für die Koeffizienten:

$$p = 1 \qquad q = 2$$

Der Schnittpunkt ist definiert als $P_S(x_S; y_S)$ mit:

$$x_S = \frac{1}{32} \cdot y_1 + \frac{1}{16} \cdot y_4 + \frac{1}{8} \cdot y_7 + \frac{1}{4} \cdot y_{10} + \frac{1}{2} \cdot y_{13}$$

Die Anzahl 5 an Gliedern soll hier genügen. Start- und Restwerte:

$$y_1 = p = 1$$

$\Rightarrow$

$$y_4 = 1 \cdot e^{-2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1\right)} = 0,367879...$$

$\Rightarrow$

$$y_7 = 1 \cdot e^{-2 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,367879\right)} = 0,419841...$$

$\Rightarrow$

$$y_{10} = 1 \cdot e^{-2 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 0,367879 + \frac{1}{2} \cdot 0,419841\right)} = 0,425802...$$

$\Rightarrow$

$$y_{13} = 1 \cdot e^{-2 \cdot \left(\frac{1}{16} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 0,367879 + \frac{1}{4} \cdot 0,419841 + \frac{1}{2} \cdot 0,425802\right)} = 0,426265...$$

Für x_S lässt sich dann errechnen:

$$x_S = \frac{1}{32} \cdot 1 + \frac{1}{16} \cdot 0,367879 + \frac{1}{8} \cdot 0,419841 + \frac{1}{4} \cdot 0,425802 + \frac{1}{2} \cdot 0,426265$$

$\Rightarrow$

$$x_S = 0,426305...$$

Schnell sieht man, wie sich Stützstellenwerte und Gesamtergebnis annähern. Bei einer Zweistellengenauigkeit würden zwei Interpolationsdurchläufe schon hinreichend sein. Benutzt man statt $f(x)$ die Funktion $g(x)$, dann sieht das Gesamtbild so aus:

$$y_S = \frac{1}{32} \cdot x_2 + \frac{1}{16} \cdot x_5 + \frac{1}{8} \cdot x_8 + \frac{1}{4} \cdot x_{11} + \frac{1}{2} \cdot x_{14}$$

Weiterhin:

$$x_2 = p = 1$$

$\Rightarrow$

$$x_5 = -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1}{1} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1\right)\right) = 0,346573...$$

$\Rightarrow$

$$x_8 = -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1}{1} \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,346573\right)\right) = 0,429852...$$

$\Rightarrow$

$$x_{11} = -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1}{1} \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 0,346573 + \frac{1}{2} \cdot 0,429852\right)\right) = 0,425990...$$

$\Rightarrow$

$$x_{14} = -\frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1}{1} \cdot \left(\frac{1}{16} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 0,346573 + \frac{1}{4} \cdot 0,429852 + \frac{1}{2} \cdot 0,425990\right)\right) = 0,426329...$$

Für y_S lässt sich dann errechnen:

$$y_S = \frac{1}{32} \cdot 1 + \frac{1}{16} \cdot 0,346573 + \frac{1}{8} \cdot 0,429852 + \frac{1}{4} \cdot 0,425990 + \frac{1}{2} \cdot 0,426329$$

$\Rightarrow$

$$y_S = 0,426304...$$

Der berechnete Schnittpunkt P_S liegt demnach in der Nähe von:

$$P_S\left(0,426305...;0,426304...\right)$$

Für eine globale Probe das $x_S = 0,426305...$ und $y_S = 0,426304...$ die Funktionen $f\left(x\right)$ und $g\left(x\right)$ erfüllen, soll hier genügen:

$$-\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{x}{1}\overset{?}{=}1\cdot e^{-2\cdot x}$$

$\Rightarrow$

$$\ln 0,426\overset{?}{=}-2\cdot e^{-2\cdot 0,426}$$

$\Rightarrow$

$$-0,853\overset{!}{=}-0,853$$

7 Zusammenfassung und Vergleich der gezeigten Methoden

7.1 Zusammenfassung

Auf den letzten Seiten sind drei Möglichkeiten aufgezeigt worden, vorliegende Problemstellung der Schnittpunktermittlung erfolgreich durchzuführen.

- **Ermittlung über die Iterationsvorschrift – „Iter“**

$$x_S = L\left(f\left(L\left(f\left(L\left(\ldots f\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right) \qquad y_S = f\left(L\left(f\left(L\left(f\left(L\left(\ldots f\left(0\right)\ldots\right)\right)\right)\right)\right)\right)$$

- **Ermittlung über die Nullstelle – „Null“**

$$p \cdot e^{-q \cdot x} - x = 0 \qquad \frac{1}{q} \cdot \ln \frac{x}{p} + x = 0$$

- **Ermittlung über eine lineare Interpolation – „InterX/InterY“**

Mit der Voraussetzung $x_S = y_S$ ergeben sich zwei Untermethoden zur Schnittpunktermittlung.

Ermittlung über die Exponentialfunktion – InterpX:

$$x_S = \frac{1}{2} \cdot y_{3 \cdot n+1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{n-i+2}} \cdot y_{3 \cdot i-2}$$

Mit:

$$y_1 = p$$

Sowie:

$$y_{3 \cdot (n-j)+1} = \left| p \cdot e^{-q \cdot \sum\limits_{i=1}^{n-j} \frac{1}{2^{(n-j)-i+1}} \cdot y_{3 \cdot i-2}} \right|_{j=0 \cdots n-1}$$

Der Wert y_S wird dann ermittelt über $f\left(x\right)$ oder $g\left(x\right)$ und dient somit gleich einer Probe, da gelten muss $x_S = y_S$.

Ermittlung über die Logarithmusfunktion – InterpY:

$$y_S = \frac{1}{2} \cdot x_{3 \cdot n+2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{n-i+2}} \cdot x_{3 \cdot i-1}$$

Mit:

$$x_2 = p$$

Sowie:

$$x_{3 \cdot (n-j)+2} = \left| -\frac{1}{q} \cdot \ln \left(\frac{1}{p} \cdot \sum_{i=1}^{n-j} \frac{1}{2^{(n-j)-i+1}} \cdot x_{3 \cdot i-1} \right) \right|_{j=0 \cdots n-1}$$

Der Wert x_S wird dann ermittelt über $f^{-1}\left(x\right)$ oder $g^{-1}\left(x\right)$ und dient somit gleich einer Probe, da gelten muss $x_S = y_S$.

7.2 Vergleich

Es sollen zwei Probedurchläufe gestartet werden. Dazu wird über ein geeignetes grafisches Verfahren der Schnittpunkt $P_S\left(x_S; y_S\right)$ ermittelt und danach numerisch gegengerechnet. Die Ergebnisse werden mit $P_S^{p=1;q=1}\left(x_S^{p=1;q=1}; y_S^{p=1;q=1}\right) = (0,5671; 0,5671)$ normiert.

$q = 1$										
$p =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Iter	*0,161*	*0,298*	*0,418*	*0,524*	*0,620*	*0,708*	*0,789*	*0,864*	*0,934*	*1,000*
Null	**NaN**	**NaN**	**NaN**	**NaN**	*0,620*	*0,708*	*0,789*	*0,864*	*0,934*	*1,000*
InterpX	*0,161*	*0,298*	*0,417*	*0,524*	*0,620*	*0,708*	*0,789*	*0,864*	*0,934*	*1,000*
InterpY	**NaN**	**NaN**	Nan	0,079	0,584	*0,707*	*0,789*	*0,864*	*0,934*	*1,000*
Grafisch	0,168	0,300	0,416	0,522	0,628	0,709	0,791	0,867	0,938	1,000
$p =$	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
Iter	*1,000*	*1,504*	3,520	6,306	8,460	10,41	12,26	14,06	15,85	17,62
Null	*1,000*	**NaN**	*1,851*	**NaN**	*2,340*	*2,525*	*2,687*	*2,831*	*2,960*	**NaN**
InterpX	*1,000*	*1,504*	*1,851*	*2,120*	*2,340*	*2,525*	*2,688*	*2,830*	*2,960*	*3,080*
InterpY	*1,000*	*1,504*	*1,851*	*2,120*	*2,340*	*2,525*	*2,688*	*2,830*	*2,960*	*3,080*
Grafisch	1,000	1,504	1,858	2,123	2,345	2,519	2,699	2,840	2,973	3,090

NaN = Not a number, *Kursiv* eingezeichnet sind numerisch ermittelte Werte, welche mit der grafischen Methode übereinstimmen. Rot eingezeichnet sind Werte, welchen einen weiteren, jedoch nicht betrachteten Schnittpunkt der Grafen $f(x)$ und $g(x)$ folgen.

$p = 1$										
$q =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Iter	*1,609*	*1,489*	*1,391*	*1,310*	*1,240*	*1,180*	*1,127*	*1,080*	*1,038*	*1,000*
Null	*1,609*	*1,489*	*1,391*	*1,310*	*1,240*	*1,180*	*1,127*	*1,080*	*1,038*	*1,000*
InterpX	*1,609*	*1,489*	*1,391*	*1,310*	*1,240*	*1,180*	*1,127*	*1,080*	*1,038*	*1,000*
InterpY	**NaN**	**NaN**	**NaN**	0,196	1,167	*1,179*	*1,127*	*1,080*	*1,038*	*1,000*
Grafisch	1,616	1,500	1,398	1,319	1,248	1,184	1,133	1,088	1,044	1,000
$q =$	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
Iter	*1,000*	*0,752*	1,173	1,576	1,692	1,734	1,751	1,758	1,761	1,762
Null	*1,000*	*0,752*	1,172	1,576	1,692	1,734	1,751	1,758	1,761	1,762
InterpX	*1,000*	*0,752*	*0,617*	*0,530*	*0,468*	*0,421*	*0,384*	*0,354*	*0,329*	*0,308*
InterpY	*1,000*	*0,752*	*0,617*	*0,530*	*0,468*	*0,421*	*0,384*	*0,354*	*0,329*	*0,308*
Grafisch	1,000	0,752	0,611	0,530	0,469	0,423	0,386	0,354	0,327	0,310

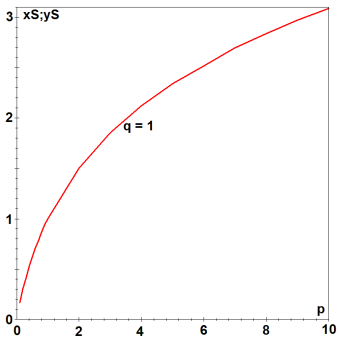
NaN = Not a number, *Kursiv* eingezeichnet sind numerisch ermittelte Werte, welche mit der grafischen Methode übereinstimmen. Rot eingezeichnet sind Werte, welchen einen weiteren, jedoch nicht betrachteten Schnittpunkt der Grafen $f(x)$ und $g(x)$ folgen.

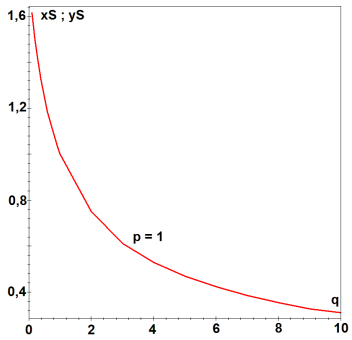
Folgende Randbedingungen sind genutzt worden zur Berechnung der Tabellenwerte.

- **Iter:**
$$n_{\text{Iter}} = 200$$
- **Null:**
$$\Delta = 1 \cdot 10^{-20}$$
- **InterpX:**
$$n_{\text{InterpX}} = 20$$
- **InterpY:**
$$n_{\text{InterpY}} = 20$$

7.3 Grafiken

Zum Schluss zwei Grafiken über die erwarteten Werte für x_S und y_S.





Bei Bedarf ist auf der Website www.Zenithpoint.de ein Classic-Maple-Worksheet© zu finden, mit den hier benutzten Berechnungsroutinen.

Letztendlich zeigt InterpX eine ausreichende Stabilität über weite Bereiche der numerischen Berechnung. InterpY ist ebenfalls geeignet zur Berechnung des Schnittpunktes unter Beachtung der Randzonen von p und q.

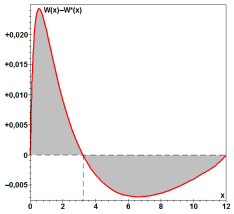
LaTeX 2_ε

$$\oiint$$

4.2 Variablen

4.2.1 Die Teilapproximation der positiven oberen Lambert-W-Funktion

Die Teilapproximation der



positiven oberen Lambert W-Funktion

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 25. Oktober 2024 - Letzte Revision: 29. Oktober 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Grundfunktion $W^*(x)$ **3**

2 Koeffizienten a und b **5**
2.1 Definition 5
2.2 Berechnung 6

3 Anhang **9**
3.1 Zusammenfassung 9
3.2 Grafische Darstellungen 10

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Grundfunktion $W^*(x)$

Gegeben ist die Funktion [001]

$$W(x)$$

die Lambert W-Funktion, speziell hier im ersten Quadranten. Daher:

$$x \geq 0$$

Gesucht ist ein einfacher analytischer Ausdruck, welcher die Werte der Lambert W-Funktion im genannten Intervall hinreichend approximiert. Da für große x-Werte bereits Lösungen existieren, wird vorliegen folgende Einschränkung festgelegt.

$$0 \leq x \leq 12$$

Aus dem Wesen der Lambert W-Funktion ist zu vermuten, dass die Funktion $W^*(x)$ mit den enthaltenden Koeffizienten a und b

$$W^*(x) = a \cdot \ln(b \cdot x + 1)$$

die Lambert W-Funktion genügend genau nachbilden kann. Im Folgendem soll a und b definiert werden.

2 Koeffizienten a und b

2.1 Definition

Gesucht ist das Flächenintegral.

$$\int W(m) = \int_0^m W(x) \cdot \mathrm{d}x \qquad \text{für} \qquad 0 < m \leq 12$$

Ebenfalls das Flächenintegral der Ersatzfunktion, für das es eine analytische Lösung gibt.

$$\int W^*(m) = a \cdot \int_0^m \ln(b \cdot x + 1) \cdot \mathrm{d}x$$

$\Rightarrow$

$$\int W^*(m) = \frac{a}{b} \cdot (b \cdot m \cdot \ln(b \cdot m + 1) + \ln(b \cdot m + 1) - b \cdot m)$$

Die Minimalfläche F_{MIN} beider Integrale wird benötigt,

$$F_{MIN} = \int W(m) - \int W^*(m) \to 0$$

$\Rightarrow$

$$0 = \int W(m) - \frac{a}{b} \cdot (b \cdot m \cdot \ln(b \cdot m + 1) + \ln(b \cdot m + 1) - b \cdot m)$$

Damit ist a definiert.

$$a = \frac{b}{b \cdot m \cdot \ln(b \cdot m + 1) + \ln(b \cdot m + 1) - b \cdot m} \cdot \int W(m)$$

Der Wert für b kann ermittelt werden mit der Forderung, dass F_{MIN} abgeschlossen ist, also gilt.

$$W(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad W^*(0) = 0$$

Diese Forderung „links am Rande“ des betrachteten Intervalls ist „von Hause aus“ immer erfüllt. Bleibt der rechte Intervallrand. Für die Forderung

$$W(m) = W^*(m)$$

$\Rightarrow$

$$W(m) = a \cdot \ln(b \cdot m + 1)$$

gilt also

$$W(m) = \frac{b \cdot \ln(b \cdot m + 1)}{b \cdot m \cdot \ln(b \cdot m + 1) + \ln(b \cdot m + 1) - b \cdot m} \cdot \int W(m)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{b \cdot \ln(b \cdot m + 1)}{b \cdot m \cdot \ln(b \cdot m + 1) + \ln(b \cdot m + 1) - b \cdot m} = \frac{W(m)}{\int W(m)}$$

Damit ist b definiert, da obige Gleichung Lösungen liefert.

2.2 Berechnung

Das Berechnen der konkreten Werte von a und b ist trivial. Zuerst der Term

$$\frac{W(m)}{\int W(m)}$$

$\Rightarrow$

m	$W(m)$	$\frac{1}{\int W(m)}$	$\frac{W(m)}{\int W(m)}$
1	0,567	3,027	1,717
2	0,853	0,952	0,811
3	1,050	0,498	0,523
4	1,202	0,319	0,383
5	1,327	0,227	0,301
6	1,432	0,173	0,248
7	1,524	0,138	0,210
8	1,605	0,113	0,182
9	1,679	0,095	0,160
10	1,746	0,082	0,143
11	1,807	0,072	0,129
12	1,863	0,063	0,118

Damit ist im linken Term der Wert b ermittelbar.

m	b
1	1,737
2	1,618
3	1,541
4	1,485
5	1,440
6	1,403
7	1,372
8	1,345
9	1,322
10	1,300
11	1,282
12	1,264

Für $b = 1,403$ wird festgelegt:

$$b_{m=6} \approx \sqrt{2}$$

Für a folgt dann:

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \ln\left(\sqrt{2} \cdot 6 + 1\right) + \ln\left(\sqrt{2} \cdot 6 + 1\right) - \sqrt{2} \cdot 6} \cdot 5,783188774 = 0,636$$

$\Rightarrow$

$$a_{m=6} \approx \frac{2}{\pi}$$

Was letztendlich zu $W^*(x)$ führt:

$$W^*(x)_{m=6} = \frac{2}{\pi} \cdot \ln\left(\sqrt{2} \cdot x + 1\right)$$

Informativ folgend, die Werte von a in Abhängigkeit von m und b.

m	b	a
1	1,737	0,563
2	1,618	0,591
3	1,541	0,608
4	1,485	0,621
5	1,440	0,631
6	1,403	0,636
7	1,372	0,646
8	1,345	0,652
9	1,322	0,657
10	1,300	0,661
11	1,282	0,665
12	1,264	0,670

Für $m = 12$ ergibt sich dann ein $W^*(x)$ von:

$$W^*(x)_{m=12} = e^{-\frac{2}{5}} \cdot \ln\left(\sqrt[3]{2} \cdot x + 1\right)$$

Die Wahl von m entscheidet über den Approximationsfehler im Intervall $0 \leq x \leq m$.

3 Anhang

3.1 Zusammenfassung

• Approximation

Gegeben ist die Lambert W-Funktion $W(x)$, die durch eine Ersatzfunktion $W^*(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq 12$ approximiert wird. Zur Optimierung des Ergebnisses kann das maximal zur Verfügung stehende Intervall eingeschränkt werden mit Hilfe der oberen Intervallschranke $0 < m \leq 12$.

Damit ergibt sich die Approximationsfunktion

$$W^*(x)_m = a(m) \cdot \ln(b(m) \cdot x + 1)$$

mit den von m abhängigen Koeffizienten a und b. Nutzbare Werte sind im Abschnitt „Berechnung“ aufgeführt. Für $m = 6$ und $m = 12$ sind zwei spezielle $W^*(x)$ aufgezeigt.

$$W^*(x)_{m=6} = \frac{2}{\pi} \cdot \ln\left(\sqrt{2} \cdot x + 1\right) \qquad W^*(x)_{m=12} = e^{-\frac{2}{5}} \cdot \ln\left(\sqrt[3]{2} \cdot x + 1\right)$$

• Derivate

Aus den Berechnungsgrundlagen für a und b folgt:

$$a = \frac{b}{b \cdot m \cdot \ln(b \cdot m + 1) + \ln(b \cdot m + 1) - b \cdot m} \cdot \int W(m)$$

$$W(m) = \ln(b \cdot m + 1) \cdot \frac{b}{b \cdot m \cdot \ln(b \cdot m + 1) + \ln(b \cdot m + 1) - b \cdot m} \cdot \int W(m)$$

$\Rightarrow$

$$a \cdot \ln(b \cdot m + 1) = W(m)$$

Mit der Definition von m gilt dann auch die Allgemeingültigkeit für x.

Ein spezieller Punkt ist bekannt:

$$W(e^1) = 1 \qquad W^*(e^1)_{m=6} = 1,004451\ldots \qquad W^*(e^1)_{m=12} = 1,057623\ldots$$

Für $x = 1$ lässt sich über die Lambert W-Funktion die Omegakonstante ermitteln:

$$W(1) = 0,56714329\ldots \quad W^*(1)_{m=6} = 0,56109985\ldots \quad W^*(1)_{m=12} = 0,54653196\ldots$$

Die erste Ableitung:

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x \cdot (1 + W(x))} \quad \text{mit} \quad x \neq 0 \qquad W^{*\prime}(x) = \frac{a \cdot b}{b \cdot x + 1}$$

Die zweite Ableitung:

$$W''(x) = -\frac{W^2(x)}{x^2 \cdot (1 + W(x))^3} \cdot (W(x) + 2) \quad \text{mit} \quad x \neq 0 \qquad W^{*\prime\prime}(x) = -\frac{a \cdot b^2}{(b \cdot x + 1)^2}$$

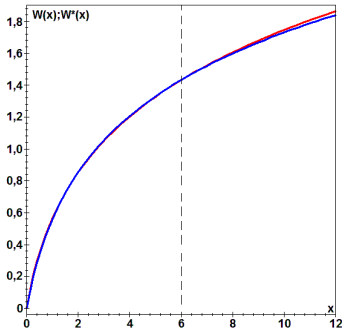
Ein spezielles Integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{W(x)}{x\sqrt{x}} \cdot \mathrm{d}x = \sqrt{8\pi} \approx 5,01326$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{W^*(x)_{m=6}}{x\sqrt{x}} \cdot \mathrm{d}x \approx 4,75683 \qquad \int_0^{+\infty} \frac{W^*(x)_{m=12}}{x\sqrt{x}} \cdot \mathrm{d}x \approx 4,72752$$

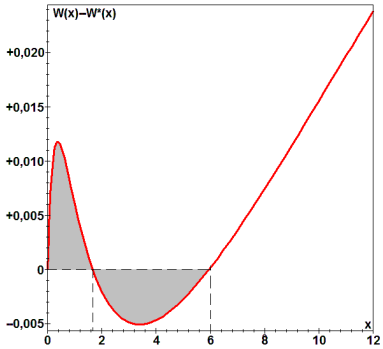
3.2 Grafische Darstellungen

• Funktion $W(x)$ und $W^*(x)_{m=6}$



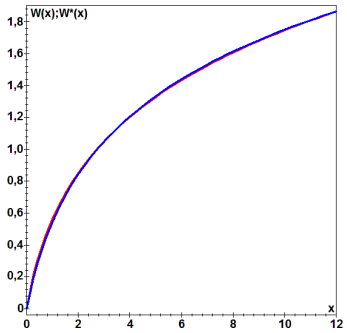
Darstellung von $W(x)$ und $W^*(x)_{m=6}$ für das Intervall $0 \leq x \leq 12$.

• Differenz $W(x) - W^*(x)_{m=6}$



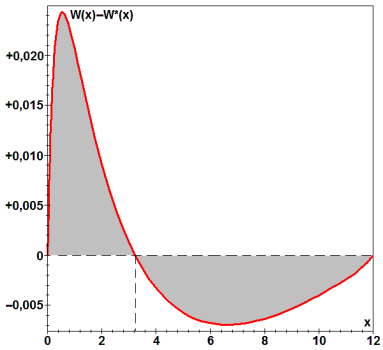
Die Differenz $W(x) - W^*(x)_{m=6}$ für das Intervall $0 \leq x \leq 12$.
Grau eingezeichnet die Minimalfläche F_{MIN} für $m = 6$.

• Funktion $W(x)$ und $W^*(x)_{m=12}$



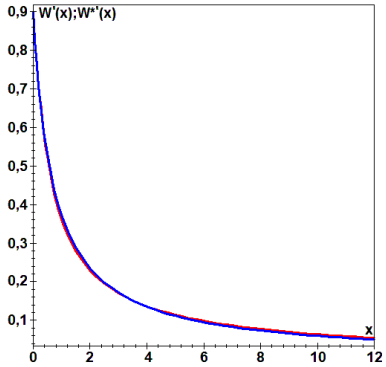
Darstellung von $W(x)$ und $W^*(x)_{m=12}$ für das Intervall $0 \leq x \leq 12$.

• Differenz $W(x) - W^*(x)_{m=12}$



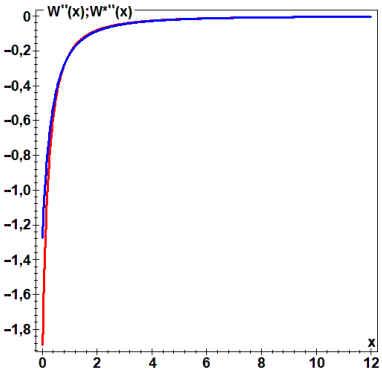
Die Differenz $W(x) - W^*(x)_{m=12}$ für das Intervall $0 \leq x \leq 12$.
Grau eingezeichnet die Minimalfläche F_{MIN} für $m = 12$.

- Erste Ableitung



Darstellung von $W'(x)$ und $W^{*\prime}(x)_{m=6}$ für das Intervall $0 \leq x \leq 12$.

- Zweite Ableitung



Darstellung von $W''(x)$ und $W^{*\prime\prime}(x)_{m=6}$ für das Intervall $0 \leq x \leq 12$.

LaTeX 2_ε

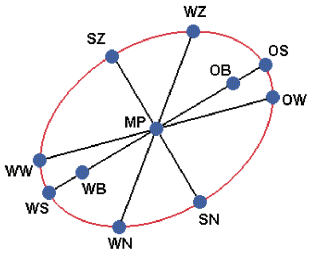
$$\oiint$$

5 Spezielle Betrachtungen

5.1 Elliptische

5.1.1 Elliptische Regression - MKQ - Punkte

Elliptische Regression - Punkte



Elliptic Regression - Points

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

Erstellt: 22. Juni 2014 - Letzte Revision: 7. Mai 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Begriffsbestimmung **3**

2 Elliptische Regression - Punkte einer gekippten Ellipse - MKQ **5**
2.1 MP = Mittelpunkt 5
2.2 WB = Westlicher Brennpunkt 6
2.3 OB = Östlicher Brennpunkt 7
2.4 SZ = Scheinbarer Zenit 8
2.5 SN = Scheinbarer Nadir 9
2.6 WZ = Wahrer Zenit 10
2.7 WN = Wahrer Nadir 11
2.8 OS = Östlicher scheinbarer Scheitelpunkt 12
2.9 WS = Westlicher scheinbarer Scheitelpunkt 13
2.10 OW = Östlicher wahrer Scheitelpunkt 14
2.11 WW = Westlicher wahrer Scheitelpunkt 15

3 Elliptische Regression - Punkte einer gekippten Ellipse - HKA **17**
3.1 WZ = Wahrer Zenit 17
3.2 WN = Wahrer Nadir 18
3.3 OW = Östlicher wahrer Scheitelpunkt 19
3.4 WW = Westlicher wahrer Scheitelpunkt 20

4 Anhang **21**

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

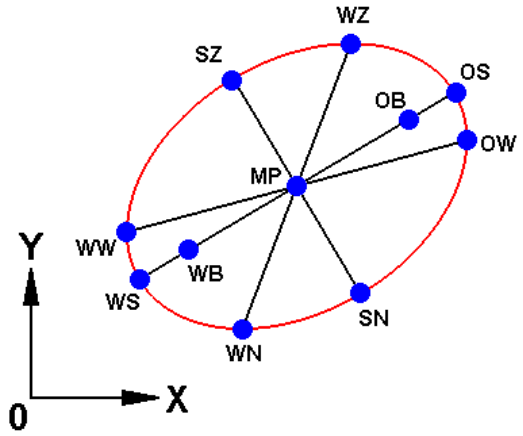
[Dipa] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten - HKA. www.Zenithpoint.de.

[Dipb] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten - MKQ. www.Zenithpoint.de.

---

1 Begriffsbestimmung

Begriffe



[001]

- **Bezeichnungen**

MP	=	Mittelpunkt
OB	=	Östlicher Brennpunkt
WB	=	Westlicher Brennpunkt
SZ	=	Scheinbarer Zenit
SN	=	Scheinbarer Nadir
WZ	=	Wahrer Zenit
WN	=	Wahrer Nadir
OS	=	Östlicher scheinbarer Scheitelpunkt
WS	=	Westlicher scheinbarer Scheitelpunkt
OW	=	Östlicher wahrer Scheitelpunkt
WW	=	Westlicher wahrer Scheitelpunkt

- **Beispiel**[1]

$$a = 0,5928 \qquad b = 37,5079 \qquad c = -1,6869 \qquad d = 1621,1455$$

$\Rightarrow$

$$A = 126935,44 \qquad B = 34486,8$$

$\Rightarrow$

$$e = 262,22 \qquad f = 383,9$$

$\Rightarrow$

$$\varphi = 0,535 \equiv 30,66^\circ$$

$\Rightarrow$

$$\varepsilon_L = 280,4$$

[1] Zu den Berechnungsgrundlagen von A; B und φ siehe [Dipb] und [Dipa]

2 Elliptische Regression - MKQ

2.1 MP = Mittelpunkt

MP

- **Punktdefinitionen**

Die Hauptachse y_H der Ellipse ist definiert durch:[2]

$$y_H = a \cdot x + b$$

Die Nebenachse y_N der Ellipse ist definiert durch:

$$y_N = c \cdot x + d$$

Da Haupt- und Nebenachse senkrecht aufeinander stehen, gilt die Nebenbedingung:

$$c \cdot a = -1$$

Damit ist der Mittelpunkt definiert.

$$x_{MP} = \frac{d-b}{a-c}$$

$\Rightarrow$

$$x_{MP} = \frac{a}{a^2+1} \cdot (d-b)$$

$\Rightarrow$

$$x_{MP} = (d-b) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$

Sowie:

$$y_{MP} = a \cdot \frac{d-b}{a-c} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_{MP} = \frac{1}{a^2+1} \cdot \left(a^2 \cdot d + b\right)$$

$\Rightarrow$

$$y_{MP} = \left(a^2 \cdot d + b\right) \cdot \cos^2\varphi$$

- **Beispiel**

Mit den in [3] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{MP} = 694,666 \qquad y_{MP} = 449,306$$

$\Rightarrow$

$$\sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{1}{a-c}$$

[2] Siehe vorher dazu [Dipb] und [Dipa].
[3] Siehe vorher dazu [Dipb] und [Dipa].

WB

2.2 WB = Westlicher Brennpunkt

- **Punktdefinitionen**

Die lineare Exzentrizität ε_L bezeichnet den Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkt. Mit dieser Aussage ist ε_L definiert.

$$\varepsilon_L = \sqrt{(x_{WB} - x_{MP})^2 + (y_{WB} - y_{MP})^2}$$

Da der Brenn- und Mittelpunkt auf der Hauptachse liegen ist eine Nebenbedingung gegeben.

$$y_{WB} = a \cdot x_{WB} + b$$

Nun kann nach x_{WB} umgestellt und y_{WB} berechnet werden. Es ergibt sich damit:

$$x_{WB} = x_{MP} - \varepsilon_L \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{WB} = x_{MP} - \varepsilon_L \cdot \cos\varphi$$

Sowie:

$$y_{WB} = y_{MP} - \varepsilon_L \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WB} = y_{MP} - \varepsilon_L \cdot \sin\varphi$$

- **Beispiel**

Mit den in [4] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{WB} = 453,447 \qquad y_{WB} = 306,347$$

[4] Siehe vorher dazu [Dipb] und [Dipa].

2.3 OB = Östlicher Brennpunkt

OB

- **Punktdefinitionen**

Die lineare Exzentrizität ε_L bezeichnet den Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkt. Mit dieser Aussage ist ε_L definiert.

$$\varepsilon_L = \sqrt{(x_{OB} - x_{MP})^2 + (y_{OB} - y_{MP})^2}$$

Da der Brenn- und Mittelpunkt auf der Hauptachse liegen ist eine Nebenbedingung gegeben.

$$y_{OB} = a \cdot x_{OB} + b$$

Nun kann nach x_{OB} umgestellt werden und y_{OB} berechnet. Es ergibt sich damit:

$$x_{OB} = x_{MP} + \varepsilon_L \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{OB} = x_{MP} + \varepsilon_L \cdot \cos\varphi$$

Sowie:

$$y_{OB} = y_{MP} + \varepsilon_L \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{OB} = y_{MP} + \varepsilon_L \cdot \sin\varphi$$

- **Beispiel**

Mit den in [5] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{OB} = 935,885 \qquad y_{OB} = 592,265$$

[5] Siehe vorher dazu [Dipb] und [Dipa].

SZ

2.4 SZ = Scheinbarer Zenit

- **Punktdefinitionen**

Die Berechnungsgrundlage des oberen Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) + \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Die Nebenachse y_N der Ellipse ist definiert durch:

$$y_N = c \cdot x + d$$

Da Haupt- und Nebenachse senkrecht aufeinander stehen, gilt die Nebenbedingung:

$$c \cdot a = -1$$

$\Rightarrow$

$$y_N = -\frac{1}{a} \cdot x + d$$

Nun kann nach x_{SZ} umgestellt werden und y_{SZ} berechnet. Es ergibt sich damit:

$$y_{SZ} = y_{MP} + e \cdot f \cdot \sqrt{\frac{A}{(B \cdot a + A)^2 + e^2 \cdot f^2 \cdot a^2}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{SZ} = y_{MP} + e \cdot \cos\varphi$$

Sowie:

$$x_{SZ} = x_{MP} - a \cdot e \cdot f \cdot \sqrt{\frac{A}{(B \cdot a + A)^2 + e^2 \cdot f^2 \cdot a^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{SZ} = x_{MP} - e \cdot \sin\varphi$$

- **Beispiel**

Mit den in [6] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{SZ} = 560,975 \qquad y_{SZ} = 674,887$$

$\Rightarrow$

$$\sin\varphi = a \cdot f \cdot \sqrt{\frac{A}{(B \cdot a + A)^2 + e^2 \cdot f^2 \cdot a^2}} \qquad \cos\varphi = f \cdot \sqrt{\frac{A}{(B \cdot a + A)^2 + e^2 \cdot f^2 \cdot a^2}}$$

$\Rightarrow$

$$\sin\varphi = a \cdot \sqrt{\frac{A}{f^2 + e^2 \cdot a^2}} \qquad \cos\varphi = \sqrt{\frac{A}{f^2 + e^2 \cdot a^2}}$$

[6] Siehe vorher dazu [Dipb] und [Dipa].

2.5 SN = Scheinbarer Nadir

SN

- **Punktdefinitionen**

Die Berechnungsgrundlage des unteren Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) - \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Die Nebenachse y_N der Ellipse ist definiert durch:

$$y_N = c \cdot x + d$$

Da Haupt- und Nebenachse senkrecht aufeinander stehen, gilt die Nebenbedingung:

$$c \cdot a = -1$$

$\Rightarrow$

$$y_N = -\frac{1}{a} \cdot x + d$$

Nun kann nach x_{SN} umgestellt werden und y_{SN} berechnet. Es ergibt sich damit:

$$y_{SN} = y_{MP} - e \cdot \sqrt{\frac{A}{f^2 + e^2 \cdot a^2}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{SN} = y_{MP} - e \cdot \cos\varphi$$

Sowie:

$$x_{SN} = x_{MP} + a \cdot e \cdot \sqrt{\frac{A}{f^2 + e^2 \cdot a^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{SN} = x_{MP} + e \cdot \sin\varphi$$

- **Beispiel**

Mit den in [7] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{SN} = 828,357 \qquad y_{SN} = 223,726$$

[7] Siehe vorher dazu [Dipb] und [Dipa].

WZ

2.6 WZ = Wahrer Zenit

- **Punktdefinitionen**

Die Berechnungsgrundlage des oberen und unteren Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Die erste Ableitung Null gesetzt ergibt den wahren Zenit.

$$x_{WZ} = x_{MP} + B \cdot \sqrt{\frac{A}{B^2 + f^2 \cdot e^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{WZ} = x_{MP} + \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi}}$$

Den Wert für x_{WZ} in die Berechnungsgrundlage des Bogens einsetzen ergibt y_{WZ}.

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

Als Relation wurde zusätzlich definiert:

$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} = \frac{A}{B} + a + c = \frac{y_{WZ} - y_{MP}}{x_{WZ} - x_{MP}}$$

- **Beispiel**

Mit den in [8] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{WZ} = 810,134 \qquad y_{WZ} = 747,975$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} = 2,587$$

[8] Siehe vorher dazu [Dipb] und [Dipa].

2.7 WN = Wahrer Nadir

WN

- **Punktdefinitionen**

Die Berechnungsgrundlage des oberen und unteren Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Die erste Ableitung Null gesetzt ergibt den wahren Nadir.

$$x_{WN} = x_{MP} - B \cdot \sqrt{\frac{A}{B^2 + f^2 \cdot e^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{WN} = x_{MP} - \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}}$$

Den Wert für x_{WN} in die Berechnungsgrundlage des Bogens einsetzen ergibt y_{WN}.

$$y_{WN} = y_{MP} - \sqrt{\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WN} = y_{MP} - \sqrt{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}$$

Als Relation wurde zusätzlich definiert:

$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} = \frac{A}{B} + a + c = \frac{y_{WN} - y_{MP}}{x_{WN} - x_{MP}}$$

- **Beispiel**

Mit den in [9] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{WN} = 579,198 \qquad y_{WN} = 150,637$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} = 2,587$$

[9] Siehe vorher dazu [Dipb] und [Dipa].

OS

2.8 OS = Östlicher scheinbarer Scheitelpunkt

- **Punktdefinitionen**

Die Berechnungsgrundlage des oberen Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) + \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Die Hauptachse y_H der Ellipse definiert die Mittelpunkte:

$$y_{MP} = a \cdot x_{MP} + b$$

Beide Funktionen werden gleichgesetzt. Ergebnis ist x_{OS}.

$$x_{OS} = x_{MP} + e \cdot f \cdot \sqrt{\frac{A}{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{OS} = x_{MP} + f \cdot \cos\varphi$$

Über y_H ist y_{OS} bekannt.

$$y_{OS} = a \cdot x_{OS} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_{OS} = y_{MP} + f \cdot \sin\varphi$$

- **Beispiel**

Mit den in [10] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{OS} = 1024,902 \qquad y_{OS} = 645,070$$

[10] Siehe vorher dazu [Dipb] und [Dipa].

2.9 WS = Westlicher scheinbarer Scheitelpunkt

WS

- **Punktdefinitionen**

Die Berechnungsgrundlage des unteren Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) - \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Die Hauptachse y_H der Ellipse definiert die Mittelpunkte:

$$y_{MP} = a \cdot x_{MP} + b$$

Beide Funktionen werden gleichgesetzt. Ergebnis ist x_{WS}.

$$x_{WS} = x_{MP} - e \cdot f \cdot \sqrt{\frac{A}{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{WS} = x_{MP} - f \cdot \cos\varphi$$

Über y_H ist y_{WS} bekannt.

$$y_{WS} = a \cdot x_{WS} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_{WS} = y_{MP} - f \cdot \sin\varphi$$

- **Beispiel**

Mit den in [11] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{WS} = 364,430 \qquad y_{WS} = 253,542$$

[11] Siehe vorher dazu [Dipb] und [Dipa].

OW

2.10 OW = Östlicher wahrer Scheitelpunkt

- **Punktdefinitionen**

Die Berechnungsgrundlage des oberen und unteren Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Betreffender Scheitelpunkt ist definiert durch:

$$+\sqrt{A - (x - x_{MP})^2} = -\sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

$\Rightarrow$

$$x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{A}$$

$\Rightarrow$

$$x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

Durch Einsetzen in den Bogen ergibt sich y_{OW}.

$$y_{OW} = y_{MP} + \frac{B}{\sqrt{A}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{OW} = y_{MP} + \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi}}$$

Als Relation wurde zusätzlich definiert:

$$A = (x_{OW} - x_{MP})^2$$

$\Rightarrow$

$$B = (y_{OW} - y_{MP}) \cdot (x_{OW} - x_{MP})$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B}{A} = \frac{y_{OW} - y_{MP}}{x_{OW} - x_{MP}}$$

- **Beispiel**

Mit den in [12] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{OW} = 1050,946 \qquad y_{OW} = 546,103$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B}{A} = 0,2717$$

[12] Siehe vorher dazu [Dipb] und [Dipa].

2.11 WW = Westlicher wahrer Scheitelpunkt

WW

- **Punktdefinitionen**

Die Berechnungsgrundlage des oberen und unteren Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Betreffender Scheitelpunkt ist definiert durch:

$$+\sqrt{A - (x - x_{MP})^2} = -\sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

$\Rightarrow$

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{A}$$

$\Rightarrow$

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

Durch Einsetzen in den Bogen ergibt sich y_{WW}.

$$y_{WW} = y_{MP} - \frac{B}{\sqrt{A}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WW} = y_{MP} - \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi}}$$

Als Relation wurde zusätzlich definiert:

$$A = (x_{WW} - x_{MP})^2$$

$\Rightarrow$

$$B = (y_{WW} - y_{MP}) \cdot (x_{WW} - x_{MP})$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B}{A} = \frac{y_{WW} - y_{MP}}{x_{WW} - x_{MP}}$$

- **Beispiel**

Mit den in [13] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{WW} = 338,386 \qquad y_{WW} = 352,091$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B}{A} = 0,2717$$

[13] Siehe vorher dazu [Dipb] und [Dipa].

3 Elliptische Regression - HKA

3.1 WZ = Wahrer Zenit

WZ

- **Punktdefinitionen**

Die Berechnungsgrundlage des oberen und unteren Ellipsenbogens:

$$y = y_{MP} - \frac{C}{V_{XX}} \cdot (x - x_{MP}) \pm \frac{\sqrt{V_{YY} \cdot V_{XX}}}{n \cdot V_{XX}} \sqrt{V_{XX} - (x - x_{MP})^2}$$

Mit:[14]

$$A = V_{XX} \qquad B = C \qquad \frac{e^2 \cdot f^2}{A} = \frac{V_{YY}}{n^2}$$

Die erste Ableitung Null gesetzt ergibt den wahren Zenit.

$$x_{WZ} = x_{MP} + C \cdot n \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{C^2 \cdot n^2 + V_{YY} \cdot V_{XX}}}$$

Den Wert für x_{WZ} in die Berechnungsgrundlage des Bogens einsetzen ergibt y_{WZ}.

$$y_{WZ} = y_{MP} + \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{C^2}{V_{XX}} \cdot n^2 + V_{YY}}$$

Als Relation wurde zusätzlich definiert:

$$\frac{C}{V_{XX}} + \frac{V_{YY}}{C} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{y_{WZ} - y_{MP}}{x_{WZ} - x_{MP}}$$

- **Beispiel**

Mit den in [15] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{WZ} = 810,134 \qquad y_{WZ} = 747,975$$

$\Rightarrow$

$$\frac{C}{V_{XX}} + \frac{V_{YY}}{C} \cdot \frac{1}{n^2} = 2,587$$

[14] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[15] Siehe vorher dazu [Dipb] und [Dipa].

WN

3.2 WN = Wahrer Nadir

- **Punktdefinitionen**

Die Berechnungsgrundlage des oberen und unteren Ellipsenbogens:

$$y = y_{MP} - \frac{C}{V_{XX}} \cdot (x - x_{MP}) \pm \frac{\sqrt{V_{YY} \cdot V_{XX}}}{n \cdot V_{XX}} \sqrt{V_{XX} - (x - x_{MP})^2}$$

Mit:[16]

$$A = V_{XX} \qquad B = C \qquad \frac{e^2 \cdot f^2}{A} = \frac{V_{YY}}{n^2}$$

Die erste Ableitung Null gesetzt ergibt den wahren Nadir.

$$x_{WN} = x_{MP} - C \cdot n \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{C^2 \cdot n^2 + V_{YY} \cdot V_{XX}}}$$

Den Wert für x_{WN} in die Berechnungsgrundlage des Bogens einsetzen ergibt y_{WN}.

$$y_{WN} = y_{MP} - \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{C^2}{V_{XX}} \cdot n^2 + V_{YY}}$$

Als Relation wurde zusätzlich definiert:

$$\frac{C}{V_{XX}} + \frac{V_{YY}}{C} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{y_{WN} - y_{MP}}{x_{WN} - x_{MP}}$$

- **Beispiel**

Mit den in [17] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{WN} = 579,198 \qquad y_{WN} = 150,637$$

$\Rightarrow$

$$\frac{C}{V_{XX}} + \frac{V_{YY}}{C} \cdot \frac{1}{n^2} = 2,587$$

[16] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[17] Siehe vorher dazu [Dipb] und [Dipa].

3.3 OW = Östlicher wahrer Scheitelpunkt

OW

- **Punktdefinitionen**

Die Berechnungsgrundlage des oberen und unteren Ellipsenbogens:

$$y = y_{MP} - \frac{C}{V_{XX}} \cdot (x - x_{MP}) \pm \frac{\sqrt{V_{YY} \cdot V_{XX}}}{n \cdot V_{XX}} \sqrt{V_{XX} - (x - x_{MP})^2}$$

Mit:[18]

$$A = V_{XX} \qquad B = C \qquad \frac{e^2 \cdot f^2}{A} = \frac{V_{YY}}{n^2}$$

Betreffender Scheitelpunkt ist definiert durch:

$$+\sqrt{V_{XX} - (x - x_{MP})^2} = -\sqrt{V_{XX} - (x - x_{MP})^2}$$

$\Rightarrow$

$$x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{V_{XX}}$$

Durch Einsetzen in den Bogen ergibt sich y_{OW}.

$$y_{OW} = y_{MP} + \frac{C}{\sqrt{V_{XX}}}$$

Als Relation wurde zusätzlich definiert:

$$V_{XX} = (x_{OW} - x_{MP})^2$$

$\Rightarrow$

$$C = (y_{OW} - y_{MP}) \cdot (x_{OW} - x_{MP})$$

$\Rightarrow$

$$\frac{C}{V_{XX}} = \frac{y_{OW} - y_{MP}}{x_{OW} - x_{MP}}$$

- **Beispiel**

Mit den in [19] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{OW} = 1050,946 \qquad y_{OW} = 546,103$$

$\Rightarrow$

$$\frac{C}{V_{XX}} = 0,2717$$

[18] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[19] Siehe vorher dazu [Dipb] und [Dipa].

WW

3.4 WW = Westlicher wahrer Scheitelpunkt

- **Punktdefinitionen**

Die Berechnungsgrundlage des oberen und unteren Ellipsenbogens:

$$y = y_{MP} - \frac{C}{V_{XX}} \cdot (x - x_{MP}) \pm \frac{\sqrt{V_{YY} \cdot V_{XX}}}{n \cdot V_{XX}} \sqrt{V_{XX} - (x - x_{MP})^2}$$

Mit:[20]

$$A = V_{XX} \qquad B = C \qquad \frac{e^2 \cdot f^2}{A} = \frac{V_{YY}}{n^2}$$

Betreffender Scheitelpunkt ist definiert durch:

$$+\sqrt{V_{XX} - (x - x_{MP})^2} = -\sqrt{A - (V_{XX} - x_{MP})^2}$$

$\Rightarrow$

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{V_{XX}}$$

Durch Einsetzen in den Bogen ergibt sich y_{WW}.

$$y_{WW} = y_{MP} - \frac{C}{\sqrt{V_{XX}}}$$

Als Relation wurde zusätzlich definiert:

$$V_{XX} = (x_{WW} - x_{MP})^2$$

$\Rightarrow$

$$C = (y_{WW} - y_{MP}) \cdot (x_{WW} - x_{MP})$$

$\Rightarrow$

$$\frac{C}{V_{XX}} = \frac{y_{WW} - y_{MP}}{x_{WW} - x_{MP}}$$

- **Beispiel**

Mit den in [21] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{WW} = 338,386 \qquad y_{WW} = 352,091$$

$\Rightarrow$

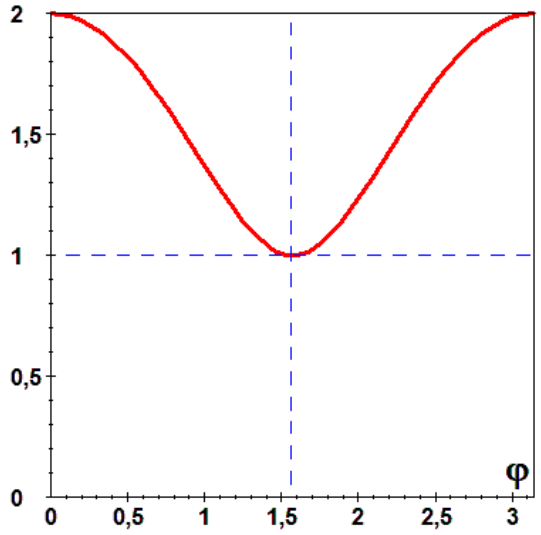
$$\frac{C}{V_{XX}} = 0,2717$$

[20] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[21] Siehe vorher dazu [Dipb] und [Dipa].

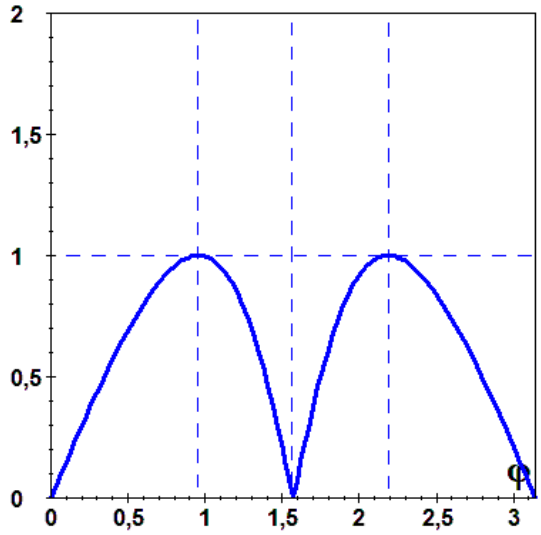
4 Anhang

Grafische Darstellungen der vorkommenden Winkelausdrücke für den Fall $e = 1$ und $f = 2$

- $\sqrt{\sin^2\varphi + 4 \cdot \cos^2\varphi} = \sqrt{1 + 3 \cdot \cos^2\varphi}$



- $3 \cdot \sqrt{\frac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2}{\sin^2\varphi + 4 \cdot \cos^2\varphi}}$



Im vorliegenden Arbeitsblatt beträgt der Winkel beider Ellipsen (**MKQ** und **HKA**) aus Gründen der Konsistenz zu anderen Skripten zueinander mit $\varphi = 0°$. Sollen beide Ellipsen orthogonal $\varphi = 90°$ betrachtet werden, ist in Abschnitt 3 mit folgender Konvertierung zu rechnen:

$$V_{YY}^{\varphi=90°} = V_{XX}^{\varphi=0°} \qquad V_{XX}^{\varphi=90°} = V_{YY}^{\varphi=0°} \qquad C^{\varphi=90^0} = -C^{\varphi=0°}$$

Für $\varphi = 90°$ daher:

$$y^{\varphi=90°} = y_{MP} - \frac{C}{V_{YY}} \cdot (x - x_{MP}) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}} \sqrt{V_{YY} - (x - x_{MP})^2}$$

Mit:

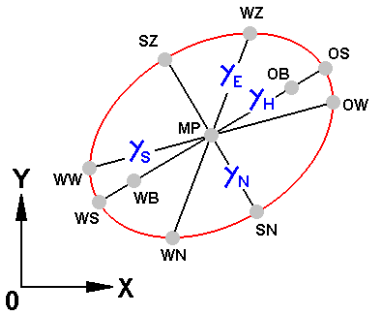
$$A = V_{YY} \qquad B = -C \qquad \frac{e^2 \cdot f^2}{A} = \frac{V_{XX}}{n^2}$$

LaTeX 2_ε

$$\oiint$$

5.1.2 Elliptische Regression - MKQ - Achsen und Winkel

Elliptische Regression



Achsen und Winkel

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 21. Juni 2014 - Letzte Revision: 7. Januar 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Die Elliptische Regression – Achsen und Winkel **3**
1.1 Einleitung . . . 3
1.2 Herleitung der Achsen . . . 4
1.2.1 Die Hauptachse y_H – Punkte WS und OS . . . 4
1.2.2 Die Hauptachse y_H – Punkte WB und OB . . . 5
1.2.3 Die Hauptachse y_H – Punkt MP und Anstieg a . . . 6
1.2.4 Die Nebenachse y_N – Punkte SZ und SN . . . 7
1.2.5 Die Scheitelachse y_S – Punkte OW und WW . . . 8
1.2.6 Die Extremaachse y_E – Punkte WZ und WN . . . 10
1.3 Herleitung der Schnittwinkel . . . 12
1.3.1 Der Winkel α zwischen der Abszisse und den Achsen $y_H; y_N; y_S$ und y_E . . . 12
1.3.2 Der Winkel β zwischen den Achsen $y_H; y_N; y_S$ und y_E . . . 13
1.3.3 Der Zusammenhang zwischen Korrelationskoeffizient ρ_{XY} und Winkel β . . . 14

2 Ein Beispiel – Achsen und Winkel **16**

Literatur

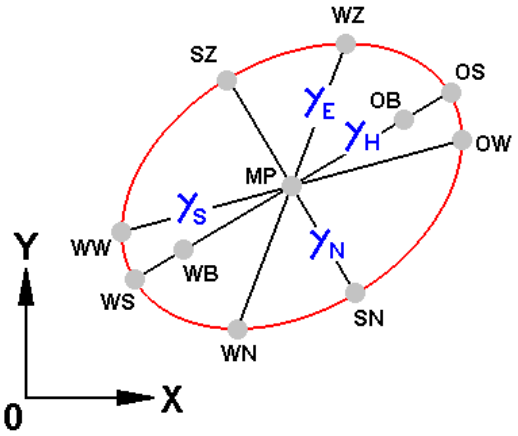
[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Die Elliptische Regression – Achsen und Winkel

1.1 Einleitung

Einleitung



Im Teil „Elliptische Regression von Datenpunkten“ wurde die Durchführung einer Regression beschrieben mit dem Ergebnis der mathematischen Darstellung einer Ellipse. [001]ff.

Im weiteren Verlauf werden die Achsen der Ellipse beschrieben. Dabei wird definiert:

– Die Hauptachse der Ellipse y_H
– Die Nebenachse der Ellipse y_N
– Die Scheitelachse der Ellipse y_S
– Die Extremaachse der Ellipse y_E

Drei Darstellungsformen der Achsfunktionen sind angegeben:

– Die Anstiegsdarstellung (der Anstieg a der Hauptachse als Basis der Beschreibung)
– Die Koeffizientendarstellung (die Koeffizienten A und B der Ellipse als Basis)
– Die goniometrische Darstellung (der Kippwinkel φ der Ellipse als Basis)

So kann als vorangehendes Beispiel die Hauptachse in drei funktionalen Zusammenhängen erscheinen.

$$y_H = a \cdot x_H + b = \tan\varphi \cdot x_H + b = \frac{B}{A - e^2} \cdot x_H + b$$

Zwecks weiterer Begriffsbestimmungen und zum Verständnis im Verlauf siehe zuerst [1] und [2].

[1] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“
[2] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression – Punkte“

1.2 Herleitung der Achsen

Hauptachse

1.2.1 Die Hauptachse y_H – Punkte WS und OS

Punktdefinitionen:

$$x_{WS} = x_{MP} - e \cdot f \cdot \sqrt{\frac{A}{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2}} \qquad y_{WS} = a \cdot x_{WS} + b$$

Sowie:

$$x_{OS} = x_{MP} + e \cdot f \cdot \sqrt{\frac{A}{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2}} \qquad y_{OS} = a \cdot x_{OS} + b$$

Zweipunktgleichung:

$$\frac{y_H - y_{WS}}{x_H - x_{WS}} = \frac{y_{OS} - y_{WS}}{x_{OS} - x_{WS}}$$

$\Rightarrow$

$$y_H = \frac{(y_{OS} - y_{WS}) \cdot (x_H - x_{WS}) + y_{WS} \cdot (x_{OS} - x_{WS})}{x_{OS} - x_{WS}}$$

Substituieren von y_{WS} und y_{OS} und anschließendes Umstellen.

$$y_H = a \cdot x_H + b$$

Was der allgemeinen Definition der Hauptachse entspricht.

1.2.2 Die Hauptachse y_H – Punkte WB und OB

Hauptachse

Punktdefinitionen:

$$x_{WB} = x_{MP} - \varepsilon_L \cdot \cos\varphi \qquad y_{WB} = y_{MP} - \varepsilon_L \cdot \sin\varphi$$

Sowie:

$$x_{OB} = x_{MP} + \varepsilon_L \cdot \cos\varphi \qquad y_{OB} = y_{MP} + \varepsilon_L \cdot \sin\varphi$$

Zweipunktgleichung:

$$\frac{y_H - y_{WB}}{x_H - x_{WB}} = \frac{y_{OB} - y_{WB}}{x_{OB} - x_{WB}}$$

$\Rightarrow$

$$y_H = \frac{(y_{OB} - y_{WB}) \cdot (x_H - x_{WB}) + y_{WB} \cdot (x_{OB} - x_{WB})}{x_{OB} - x_{WB}}$$

Substituieren von $y_{WB}; y_{OB}$ und $x_{WB}; x_{OB}$ sowie anschließendes Umstellen.

$$y_H = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \cdot (x_H - x_{WB}) + y_{WB}$$

Substituieren von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ sowie anschließendes Umstellen.

$$\sin^2\varphi = \frac{a^2}{1+a^2} \qquad \cos^2\varphi = \frac{1}{1+a^2}$$

$\Rightarrow$

$$y_H = a \cdot x_H - a \cdot x_{WB} + y_{WB}$$

Eine Nebenbedingung für WB wird genutzt.

$$y_{WB} = a \cdot x_{WB} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_H = a \cdot x_H + b$$

Was der allgemeinen Definition der Hauptachse entspricht.

Hauptachse

1.2.3 Die Hauptachse y_H – Punkt MP und Anstieg a

Gegeben ist der Anstieg a und der Mittelpunkt der Ellipse mit den Koordinaten:

$$x_{MP} = (d - b) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \qquad y_{MP} = \left(a^2 \cdot d + b\right) \cdot \cos^2\varphi$$

Die Punktrichtungsform wird genutzt.

$$\frac{y_H - y_{MP}}{x_H - x_{MP}} = a$$

$\Rightarrow$

$$y_H = a \cdot (x_H - x_{MP}) + y_{MP}$$

Substituieren von y_{MP} und x_{MP} sowie anschließendes Umstellen. (Die Nebenbedingung $y_{MP} = a \cdot x_{MP} + b$ kann auch genutzt werden)

$$y_H = a \cdot x_H - a \cdot d \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + a \cdot b \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + a^2 \cdot d \cdot \cos^2\varphi + b \cdot \cos^2\varphi$$

Substituieren von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ sowie anschließendes Umstellen.

$$\sin^2\varphi = \frac{a^2}{1 + a^2} \qquad \cos^2\varphi = \frac{1}{1 + a^2}$$

$\Rightarrow$

$$y_H = a \cdot x_H + b$$

Was der allgemeinen Definition der Hauptachse entspricht.

1.2.4 Die Nebenachse y_N – Punkte SZ und SN

Nebenachse

Punktdefinitionen:

$$y_{SN} = y_{MP} - e \cdot \cos\varphi \qquad x_{SN} = x_{MP} + e \cdot \sin\varphi$$

Sowie:

$$y_{SZ} = y_{MP} + e \cdot \cos\varphi \qquad x_{SZ} = x_{MP} - e \cdot \sin\varphi$$

Zweipunktgleichung:

$$\frac{y_N - y_{SN}}{x_N - x_{SN}} = \frac{y_{SN} - y_{SZ}}{x_{SN} - x_{SZ}}$$

$\Rightarrow$

$$y_N = \frac{(y_{SN} - y_{SZ}) \cdot (x_N - x_{SN}) + y_{SN} \cdot (x_{SN} - x_{SZ})}{x_{SN} - x_{SZ}}$$

Substituieren von y_{SZ} in und y_{SN} in der Klammer sowie anschließendes Umstellen.

$$y_N = y_{SN} - 2 \cdot e \cdot \cos\varphi \cdot \frac{x_N - x_{SN}}{x_{SN} - x_{SZ}}$$

Substituieren von x_{SZ} in und x_{SN} im Nenner sowie anschließendes Umstellen.

$$y_N = y_{SN} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \cdot (x_N - x_{SN})$$

Substituieren von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ sowie anschließendes Umstellen.

$$\sin^2\varphi = \frac{a^2}{1 + a^2} \qquad \cos^2\varphi = \frac{1}{1 + a^2}$$

$\Rightarrow$

$$y_N = y_{SN} - \frac{1}{a} \cdot (x_N - x_{SN})$$

Eine Nebenbedingung für SN wird genutzt.

$$y_{SN} = -\frac{1}{a} \cdot x_{SN} + d$$

$\Rightarrow$

$$y_N = -\frac{1}{a} \cdot x_N + d$$

Eine Nebenbedingung für a wird genutzt.

$$a \cdot c = -1$$

$\Rightarrow$

$$y_N = c \cdot x_N + d$$

Was der allgemeinen Definition der Nebenachse entspricht.

Scheitelachse

1.2.5 Die Scheitelachse y_S – Punkte OW und WW

Punktdefinitionen:

$$x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{A} \qquad y_{OW} = y_{MP} + \frac{B}{\sqrt{A}}$$

Sowie:

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{A} \qquad y_{WW} = y_{MP} - \frac{B}{\sqrt{A}}$$

Zweipunktgleichung:

$$\frac{y_S - y_{OW}}{x_S - x_{OW}} = \frac{y_{WW} - y_{OW}}{x_{WW} - x_{OW}}$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{(y_{WW} - y_{OW}) \cdot (x_S - x_{OW}) + y_{OW} \cdot (x_{WW} - x_{OW})}{x_{WW} - x_{OW}}$$

Substituieren von y_{WW} in und y_{OW} sowie anschließendes Umstellen.

$$y_S = 2 \cdot \frac{-B}{\sqrt{A}} \cdot \frac{x_S - x_{OW}}{x_{WW} - x_{OW}} + y_{MP} + \frac{B}{\sqrt{A}}$$

Substituieren von x_{WW} in und x_{OW} im Nenner sowie anschließendes Umstellen.

$$y_S = \frac{B}{A} \cdot (x_S - x_{OW}) + y_{MP} + \frac{B}{\sqrt{A}}$$

Substituieren von x_{OW} sowie anschließendes Umstellen.

$$y_S = \frac{B}{A} \cdot x_S - \frac{B}{A} \cdot x_{MP} + y_{MP}$$

Eine Nebenbedingung für MP wird genutzt.

$$y_{MP} = a \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{B}{A} \cdot x_S + \left(a - \frac{B}{A}\right) \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\frac{B}{A} = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2}$$

Lässt sich y_S leicht vereinfachen.

$$y_S = \frac{B}{A} \cdot x_S + \frac{e^2 \cdot a}{A} \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\frac{B}{A} = \frac{\left(f^2 - e^2\right) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi}$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_S + \frac{e^2 \cdot a}{A} \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$A = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_S + \frac{e^2 \cdot a}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$a = \tan\varphi$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_S + e^2 \cdot \frac{\tan\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\tan\varphi = a$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{f^2 - e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2} \cdot a \cdot x_S + \frac{e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2} \cdot a \cdot \left(1 + a^2\right) \cdot x_{MP} + b$$

Eine Kontrolle von y_S ist möglich über die Tatsache, dass auf y_S der Mittelpunkt $(x_{MP}; y_{MP})$ der Ellipse liegt, daher:

$$y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot x_{MP} + \left(a - \frac{B}{A}\right) \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_{MP} = a \cdot x_{MP} + b$$

Was der geforderten Nebenbedingung entspricht.

Mit der Berechnungsgrundlage der linearen Exzentrizität ε_L ist eine weitere Vereinfachung möglich. Da vorangegangen per Definition $f > e$ sowie $f > 1\,[PIX]$ und $e > 1\,[PIX]$ gilt, ist $f^2 - e^2$ substituierbar:

$$\varepsilon_L^2 = f^2 - e^2$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{\varepsilon_L^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_S + \frac{e^2 \cdot \tan\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \varepsilon_L^2 \cdot \frac{a}{e^2 \cdot a^2 + f^2} \cdot x_S + \frac{e^2 \cdot a \cdot \left(1 + a^2\right)}{e^2 \cdot a^2 + f^2} \cdot x_{MP} + b$$

Extremaachse

1.2.6 Die Extremaachse y_E – Punkte WZ und WN

Punktdefinitionen:

$$x_{WZ} = x_{MP} + B \cdot \sqrt{\frac{A}{B^2 + f^2 \cdot e^2}} \qquad y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A}}$$

Sowie:

$$x_{WN} = x_{MP} - B \cdot \sqrt{\frac{A}{B^2 + f^2 \cdot e^2}} \qquad y_{WN} = y_{MP} - \sqrt{\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A}}$$

Zweipunktgleichung:

$$\frac{y_E - y_{WZ}}{x_E - x_{WZ}} = \frac{y_{WN} - y_{WZ}}{x_{WN} - x_{WZ}}$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{(y_{WN} - y_{WZ}) \cdot (x_E - x_{WZ}) + y_{WZ} \cdot (x_{WN} - x_{WZ})}{x_{WN} - x_{WZ}}$$

Substituieren von y_{WN} in und y_{WZ} sowie anschließendes Umstellen.

$$y_E = -2\sqrt{\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A}} \cdot \frac{x_E - x_{WZ}}{x_{WN} - x_{WZ}} + y_{MP} + \sqrt{\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A}}$$

Substituieren von x_{WN} in und x_{WZ} im Nenner sowie anschließendes Umstellen.

$$y_E = \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} \cdot (x_E - x_{WZ}) + y_{MP} + \sqrt{\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A}}$$

Substituieren von x_{WZ} sowie anschließendes Umstellen.

$$y_E = \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} \cdot x_E - \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} \cdot x_{MP} + y_{MP}$$

Eine Nebenbedingung für MP wird genutzt.

$$y_{MP} = a \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} \cdot x_E + \left(a - \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B}\right) \cdot x_{MP} + b$$

Der Koeffizient wird gesplittet:

$$y_E = \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} \cdot x_E + \left(a - \frac{B}{A} - \frac{f^2 \cdot e^2}{A \cdot B}\right) \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\frac{B}{A} = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2}$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} \cdot x_E + a \cdot e^2 \cdot \left(\frac{1 + a^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2} - \frac{f^2}{a \cdot A \cdot B}\right) \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\frac{1}{A} = \frac{1 + a^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2}$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} \cdot x_E + e^2 \cdot \frac{a \cdot B - f^2}{A \cdot B} \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} = \frac{f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi}{(f^2 - e^2) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}{(f^2 - e^2) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi} \cdot x_E + e^2 \cdot \frac{a \cdot B - f^2}{A \cdot B} \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\frac{a \cdot B - f^2}{A \cdot B} = \frac{-1}{(f^2 - e^2) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}{(f^2 - e^2) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi} \cdot x_E - \frac{e^2}{(f^2 - e^2) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi} \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\tan\varphi = a$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{f^2 \cdot a^2 + e^2}{f^2 - e^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot x_E - \frac{e^2}{f^2 - e^2} \cdot \frac{1 + a^2}{a} \cdot x_{MP} + b$$

Eine Kontrolle von y_E ist möglich über die Tatsache, dass auf y_E der Mittelpunkt $(x_{MP}; y_{MP})$ der Ellipse liegt, daher:

$$y_{MP} = \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} \cdot x_{MP} + \left(a - \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B}\right) \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_{MP} = a \cdot x_{MP} + b$$

Was der geforderten Nebenbedingung entspricht.

Mit der Berechnungsgrundlage der linearen Exzentrizität ε_L ist eine weitere Vereinfachung möglich. Da per Definition $f > e$ sowie $f > 1\,[PIX]$ und $e > 1\,[PIX]$ gilt, ist $f^2 - e^2$ substituierbar:

$$\varepsilon_L^2 = f^2 - e^2$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}{\varepsilon_L^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi} \cdot x_E - \frac{e^2}{\varepsilon_L^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{f^2 \cdot a^2 + e^2}{\varepsilon_L^2 \cdot a} \cdot x_E - \frac{e^2 \cdot \left(1 + a^2\right)}{\varepsilon_L^2 \cdot a} \cdot x_{MP} + b$$

1.3 Herleitung der Schnittwinkel

Winkel α

1.3.1 Der Winkel α zwischen der Abszisse und den Achsen $y_H; y_N; y_S$ und y_E

Erfolgt mit den betreffenden Anstieg m nach der Berechnungsgrundlage:

$$\tan\alpha = m$$

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S	y_E
Darstellung	$\tan\alpha =$	$\tan\alpha =$	$\tan\alpha =$	$\tan\alpha =$
Koeffizienten-	$\frac{B}{A-e^2}$	$\frac{e^2-A}{B}$	$\frac{B}{A}$	$\frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B}$
Anstiegs-	a	$-\frac{1}{a}$	$\frac{f^2-e^2}{e^2\cdot a^2+f^2}\cdot a$	$\frac{f^2\cdot a^2+e^2}{f^2-e^2}\cdot\frac{1}{a}$
Goniometrische	$\tan\varphi$	$-\cot\varphi$	$\frac{\left(f^2-e^2\right)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{e^2\cdot\sin^2\varphi+f^2\cdot\cos^2\varphi}$	$\frac{f^2\cdot\sin^2\varphi+e^2\cdot\cos^2\varphi}{(f^2-e^2)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}$

1.3.2 Der Winkel β zwischen den Achsen $y_H; y_N; y_S$ und y_E

Winkel β

Erfolgt mit den betreffenden Anstiegen m_1 und m_2 nach der Berechnungsgrundlage:

$$\tan\beta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$$

$\Rightarrow$

Rechts – Koeffizientendarstellung

	y_H	y_N	y_S	y_E
	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$
y_H	0	∞	$\left\lvert\frac{B-A\cdot a}{A+B\cdot a}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{B\cdot(B-A\cdot a)+e^2\cdot f^2}{B\cdot(A+B\cdot a)+a\cdot e^2\cdot f^2}\right\rvert$
y_N	∞	0	$\left\lvert\frac{A+B\cdot a}{B-A\cdot a}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{B\cdot(A+B\cdot a)+a\cdot e^2\cdot f^2}{B\cdot(B-A\cdot a)+e^2\cdot f^2}\right\rvert$
y_S	$\left\lvert\frac{e^2}{f^2}\cdot\tan\varphi\right\rvert$	$\left\lvert\frac{f^2}{e^2}\cdot\cot\varphi\right\rvert$	0	$\left\lvert\frac{A}{B}\cdot\frac{e^2\cdot f^2}{A^2+B^2+e^2\cdot f^2}\right\rvert$
y_E	$\left\lvert\frac{e^2}{f^2}\cdot\cot\varphi\right\rvert$	$\left\lvert\frac{f^2}{e^2}\cdot\tan\varphi\right\rvert$	$\left\lvert\frac{e^2\cdot f^2}{e^4-f^4}\cdot\sin^{-1}\varphi\cdot\cos^{-1}\varphi\right\rvert$	0

Links – Goniometrische Darstellung

Koeffizient ρ

1.3.3 Der Zusammenhang zwischen Korrelationskoeffizient ρ_{XY} und Winkel β

In „Elliptische Regression von Datenpunkten“ wurde der lineare Korrelationskoeffizient ρ_{XY} definiert. Mit dessen Hilfe ist der Schnittwinkel β ebenfalls beschreibbar, so gilt:

$$\rho_{XY}^2 = a^2 \cdot \frac{f^2}{e^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{f^2}{e^2} = \rho_{XY}^2 \cdot \cot^2 \varphi \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{e^2}{f^2} = \frac{\tan^2 \varphi}{\rho_{XY}^2}$$

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S
	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$
y_S	$\rho_{XY}^{-2} \cdot \left\lvert \tan^3 \varphi \right\rvert$	$\rho_{XY}^{+2} \cdot \left\lvert \cot^3 \varphi \right\rvert$	-
y_E	$\rho_{XY}^{-2} \left\lvert \tan \varphi \right\rvert$	$\rho_{XY}^{+2} \cdot \left\lvert \cot \varphi \right\rvert$	$\rho_{XY}^{+2} \cdot \left\lvert \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{\sin^4\varphi - \rho_{XY}^{+4} \cdot \cos^4\varphi} \right\rvert$

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S
	$\rho_{XY}^2 =$	$\rho_{XY}^2 =$	$\rho_{XY}^2 =$
y_S	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2 \varphi$	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2 \varphi$	-
y_E	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2 \varphi$	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2 \varphi$	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2 \varphi$

Da für das Quadrat eines Korrelationskoeffizienten gilt

$$0 \leq \rho_{XY}^2 \leq 1$$

und $\rho_{XY}^2 = \frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2 \varphi$ für alle Fälle gegeben ist, kann definiert werden:

$$0 \leq \frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2 \varphi \leq 1$$

$\Rightarrow$

$$0 \leq \tan^2 \varphi \leq \frac{e^2}{f^2}$$

$\Rightarrow$

$$0 \leq \tan\varphi \leq \frac{e}{f} \qquad -\frac{e}{f} \leq \tan\varphi \leq 0$$

$\Rightarrow$

$$0 \leq \varphi \leq \arctan\frac{e}{f} \qquad \pi - \arctan\frac{e}{f} \leq \varphi \leq \pi$$

Damit kann man für den ersten Quadranten (und für den zweiten bei Bedarf auch) ein maximales φ_{GRENZ} definieren.

$$\varphi_{GRENZ} = \pm\arctan\frac{e}{f}$$

Bei einer strengen Einhaltung der Forderung $f > e$ ergibt sich dann:

$$0 \leq \frac{e}{f} \leq 1$$

$\Rightarrow$

$$-45^\circ \equiv -\frac{\pi}{4} = \varphi_{MIN} \leq \varphi \leq \varphi_{MAX} = +\frac{\pi}{4} \equiv +45^\circ$$

Für $\varphi_{Grenz} = \pm\frac{\pi}{2} \equiv \pm 90^\circ$ muss $f > e$ als Bedingung fallen gelassen werden.

Die Beschreibung der lineare Funktion von φ_{GRENZ}:

$$y_{GRENZ} = \pm\frac{e}{f} \cdot x_{GRENZ} + b$$

2 Ein Beispiel – Achsen und Winkel

Beispiel

$$a = 0,5928 \qquad b = 37,5079 \qquad c = -1,6869 \qquad d = 1621,1455$$

$$\varphi = 0,535 \equiv 30,65° \qquad \rho_{XY} = 0,868$$

$$A = 126935,44 \qquad B = 34486,8$$

$$e = 262,22 \qquad f = 383,9$$

$$x_{MP} = 694,6692986$$

$\Rightarrow$[3]

$$y_H = 0,592 \cdot x_H + 37,507 \qquad y_N = -1,686 \cdot x_N + 1621,145$$

$$y_S = 0,271 \cdot x_S + 260,506 \qquad y_E = 2,586 \cdot x_E - 1347,679$$

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S	y_E
Darstellung	$\tan\alpha =$	$\tan\alpha =$	$\tan\alpha =$	$\tan\alpha =$
Koeffizienten-	$+0,5928$	$-1,6869$	$+0,271$	$+2,586$
Anstiegs-	$+0,5928$	$-1,6869$	$+0,271$	$+2,586$
Goniometrische	$+0,5928$	$-1,6869$	$+0,271$	$+2,586$

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S	y_E
	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$
y_H	0	∞	$+0,276$	$+0,787$
y_N	∞	0	$+3,615$	$+1,270$
y_S	$+0,276$	$+3,616$	0	$+1,359$
y_E	$+0,787$	$+1,270$	$+1,359$	0

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S	y_E
Darstellung	$\alpha° =$	$\alpha° =$	$\alpha° =$	$\alpha° =$
Koeffizienten-	$+30,66$	$+120,66$	$+15,200$	$+68,863$
Anstiegs-	$+30,66$	$+120,66$	$+15,200$	$+68,863$
Goniometrische	$+30,66$	$+120,66$	$+15,197$	$+68,864$

[3] Beispiel entnommen aus: Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S	y_E
	$\beta° =$	$\beta° =$	$\beta° =$	$\beta° =$
y_H	0	$+90$	$+15,459$	$+38,203$
y_N	$+90$	0	$+74,540$	$+51,796$
y_S	$+15,456$	$+74,543$	0	$+53,663$
y_E	$+38,210$	$+51,789$	$+53,666$	0

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S
	$\rho^2_{XY} =$	$\rho^2_{XY} =$	$\rho^2_{XY} =$
y_S	$+0,753$	$+0,752$	-
y_E	$+0,753$	$+0,753$	$+0,753$

$\Rightarrow$

$$\frac{e}{f} = \pm 0,683$$

$\Rightarrow$

$$\varphi_{GRENZ} = \pm \arctan \tfrac{e}{f} = \pm 0,600 \equiv \pm 34,33° \qquad \varphi_{VORH} = 0,535 \equiv 30,65°$$

Und:

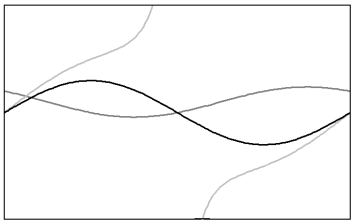
$$y_{GRENZ} = \pm 0,683 \cdot x_{GRENZ} + 37,5079$$

LaTeX 2_ε

$$\oiint$$

5.1.3 Elliptische Regression - MKQ - Relationen und Vereinfachungen

Elliptische Regression - Relationen und Vereinfachungen



Elliptic Regression - Relations and Simplifications

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 22. Juni 2014 - Letzte Revision: 11. Juni 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Relationen und Vereinfachungen - MKQ **3**
1.1 Anstiege . . . 3
1.2 Winkel . . . 4
1.3 A- B- Koeffizienten . . . 5
1.4 Sonstige . . . 6

2 Relationen und Vereinfachungen - HKA **7**
2.1 Anstiege . . . 7
2.2 Winkel . . . 8
2.3 A- B- Koeffizienten . . . 9
2.4 Sonstige . . . 10

3 Anhang **11**

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

[Dipa] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten - HKA. www.Zenithpoint.de.

[Dipb] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten - MKQ. www.Zenithpoint.de.

---

1 Relationen und Vereinfachungen - MKQ

1.1 Anstiege

Anstiege

[001]ff.

- Zusammenhang zwischen den Anstiegen a und c

$$a \cdot c = -1$$

- Verschiedene Darstellungsformen des Anstiegs a

$$\tan\varphi = \frac{B}{A - e^2} = a$$

- Verschiedene Darstellungsformen des Anstiegs c

$$-\cot\varphi = \frac{e^2 - A}{B} = c$$

- Vereinfachung von a

$$\frac{B + e^2 \cdot a}{A} = a$$

- Vereinfachung von c

$$\frac{-A}{B + e^2 \cdot a} = c$$

Winkel

1.2 Winkel

- Der $\sin$ des Winkels φ

$$\frac{a^2}{1+a^2} = \frac{A \cdot a^2 \cdot f^2}{(B \cdot a + A)^2 + e^2 \cdot f^2 \cdot a^2} = \frac{A \cdot a^2}{f^2 + e^2 \cdot a^2} = \sin^2 \varphi$$

- Der $\cos$ des Winkels φ

$$\frac{1}{1+a^2} = \frac{A \cdot f^2}{(B \cdot a + A)^2 + e^2 \cdot f^2 \cdot a^2} = \frac{A \cdot e^2}{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2} = \frac{A}{f^2 + e^2 \cdot a^2} = \cos^2 \varphi$$

- Der $\tan$ des Winkels φ

$$a = \tan \varphi$$

- Das Produkt von $\sin$ und $\cos$

$$\frac{a}{1+a^2} = \frac{1}{a-c} = \frac{A \cdot a}{f^2 + e^2 \cdot a^2} = \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

- Sonstige Zusammenhänge und Vereinfachungen

$$\frac{1-a}{1+a^2} = \cos^2 \varphi - \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \cos \varphi \cdot (\cos \varphi - \sin \varphi)$$

1.3 A- B- Koeffizienten

Koeffizienten

- Verschiedene Darstellungsformen des Koeffizienten A

$$\frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{B + e^2 \cdot a}{a} = f^2 - B \cdot a = e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi = A$$

- Verschiedene Darstellungsformen des Koeffizienten B

$$a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = a \cdot \left(A - e^2\right) = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = B$$

- Summe von A und B

$$\left(e^2 + f^2\right) \cdot \left(e^2 - f^2\right) \cdot \sin^2 \varphi + f^4 = e^4 \cdot \sin^2 \varphi + f^4 \cdot \cos^2 \varphi = \frac{e^4 \cdot a^2 + f^4}{1 + a^2} = A^2 + B^2$$

- Produkt von A und B

$$\left(e^2 \cdot a^2 + f^2\right) \cdot \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sin \varphi \cdot \cos^3 \varphi = A \cdot B$$

- Produkt von A und B mit dem Anstieg a

$$\begin{aligned} \left(e^2 \cdot a^2 + f^2\right) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi &= A \cdot a \\ \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sin^2 \varphi &= B \cdot a \end{aligned}$$

- Quotient von A und B

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{f^2 - e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2} &= \frac{B}{A} \\ \frac{f^2}{B} - a &= \frac{A}{B} \end{aligned}$$

- Sonstige Zusammenhänge und Vereinfachungen

$$\begin{aligned} A \cdot a - B &= e^2 \cdot a \\ \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} &= \frac{A}{B} + a + c \\ \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A} &= f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi \\ \frac{B^2 \cdot A}{B^2 + f^2 \cdot e^2} &= \left(f^2 - e^2\right)^2 \cdot \frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi} \\ \frac{A}{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2} &= \frac{1}{e^2} \cdot \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

Sonstige

1.4 Sonstige

- Vereinfachung von e

$$\frac{A \cdot a - B}{a} = \frac{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2}{A} \cdot \cos^2 \varphi = e^2$$

- Vereinfachung von f

$$A + B \cdot a = f^2$$

- Zusammenhang zwischen e und f

$$A^2 - B^2 + \frac{a^2 - 1}{a} \cdot A \cdot B = A \cdot \left(f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi\right) - B^2 = e^2 \cdot f^2$$

2 Relationen und Vereinfachungen - HKA

2.1 Anstiege

Die Verknüpfung zwischen Anstieg-MKQ und Anstieg-HKA[1] ist über den Korrelationskoeffizienten ρ zu führen. Anstiege

$$_{MKQ}\rho_{XY} = a \cdot \frac{f}{e} \qquad _{HKA}\rho_{XY} = C \cdot \sqrt{\frac{V_{YY}}{V_{XX}}}$$

$\Rightarrow$

$$a^2 = C^2 \cdot \frac{V_{YY}}{V_{XX}} \cdot \frac{e^2}{f^2}$$

Mit den Herleitungen für e^2 und f^2.

$$e^2 = \frac{V_{YY}}{n} \qquad f^2 = \frac{V_{XX}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$a^2 = C^2 \cdot \frac{V_{YY}^2}{V_{XX}^2}$$

- Verschiedene Darstellungsformen des Anstiegs a [2] [001]ff.

$$a = C \cdot \frac{V_{YY}}{V_{XX}}$$

Mit dem Sonderfall $\lambda = e^2$:

$$a = \left(\tan\varphi_{1;2} = \pm\frac{C}{V_{YY} - \lambda_{1;2}} = \mp\frac{C}{V_{XX} - \lambda_{1;2}}\right) = \frac{C}{V - \lambda}$$

- Verschiedene Darstellungsformen des Anstiegs c

$$c = -\frac{1}{C} \cdot \frac{V_{XX}}{V_{YY}}$$

Mit dem Sonderfall $\lambda = e^2$:

$$c = \left(-\frac{1}{a} = -\cot\varphi_{1:2} = \mp\frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} = \pm\frac{V_{XX} - \lambda_{1;2}}{C}\right) = -\frac{V - \lambda}{C}$$

- Vereinfachung von a, nur für den Sonderfall $\lambda = e^2$ und $a = \frac{C}{V-\lambda}$ gültig

$$\frac{C + e^2 \cdot a}{V} = a$$

- Vereinfachung von c, nur für den Sonderfall $\lambda = e^2$ und $a = \frac{C}{V-\lambda}$ gültig

$$-\frac{V}{C + e^2 \cdot a} = c$$

[1] Konvertierungsregeln für die Methoden nach [Dipb] und [Dipa] je nach betrachteter Ellipse, hier:

$$A = V_{YY} \qquad B = C \qquad \frac{e^2 \cdot f^2}{A} = \frac{V_{XX}}{n^2}$$

Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.

Weiterhin:

$$2 \cdot \lambda_{1;2} = V_{XX} + V_{YY} \pm \sqrt{(V_{XX} - V_{YY})^2 + 4 \cdot C^2}$$

[2] Vorzeichen von C je nach betrachteter Ellipse $Y_{1;2}^{(\varphi=0°)}$ oder $Y_{1;2}^{(\varphi=90°)}$. Siehe Anhang.

Winkel

2.2 Winkel

- Der $\sin$ des Winkels φ

$$\frac{C^2 \cdot V_{YY}^2}{V_{XX}^2 + C^2 \cdot V_{YY}^2} = \sin^2\varphi$$

- Der $\cos$ des Winkels φ

$$\frac{V_{XX}^2}{V_{XX}^2 + C^2 \cdot V_{YY}^2} = \cos^2\varphi$$

- Der $\tan$ des Winkels φ

$$a = \tan\varphi = C \cdot \frac{V_{YY}}{V_{XX}}$$

- Das Produkt von $\sin$ und $\cos$

$$\frac{C \cdot V_{XX} \cdot V_{YY}}{V_{XX}^2 + C^2 \cdot V_{YY}^2} = \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$

- Sonstige Zusammenhänge und Vereinfachungen

$$V_{XX} \cdot \frac{V_{XX} - C \cdot V_{YY}}{V_{XX}^2 + C^2 \cdot V_{YY}^2} = \cos^2\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi = \cos\varphi \cdot (\cos\varphi - \sin\varphi)$$

2.3 A- B- Koeffizienten

Koeffizienten

- Verschiedene Darstellungsformen des Koeffizienten A [3]

$$V_{YY} = A$$

- Verschiedene Darstellungsformen des Koeffizienten B

$$C = B$$

[3] Abhängig von der betrachteten Ellipse.

Sonstige

2.4 Sonstige

- Vereinfachung von e

$$\frac{V_{YY}}{n} = e^2$$

Mit dem Sonderfall: [4]

$$\lambda = e^2$$

- Vereinfachung von f

$$\frac{V_{XX}}{n} = f^2$$

Mit dem Sonderfall:

$$\lambda = f^2$$

- Zusammenhang zwischen e und f

$$\frac{V_{XX} \cdot V_{YY}}{n^2} = e^2 \cdot f^2$$

Mit dem Sonderfall:

$$\lambda^2 = e^2 \cdot f^2$$

[4] Sonderfall:

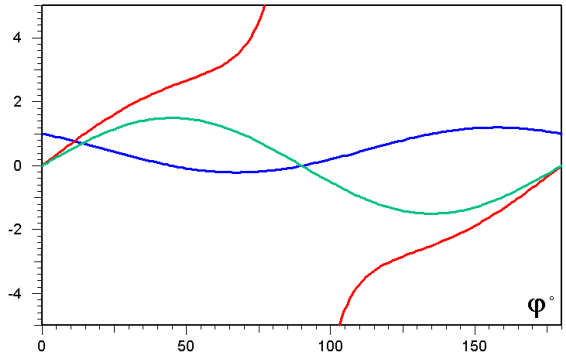
$$C = 0 \qquad V = V_{XX} = V_{YY}$$

Ellipse als Sonderfall eines Kreises.

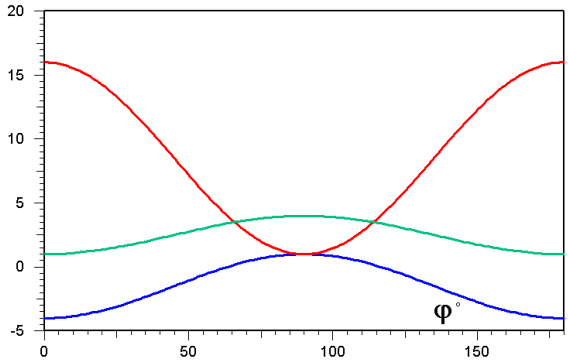
3 Anhang

Grafische Darstellungen der vorkommenden Winkelausdrücke für den Fall $e = 1$ und $f = 2$ Grafiken

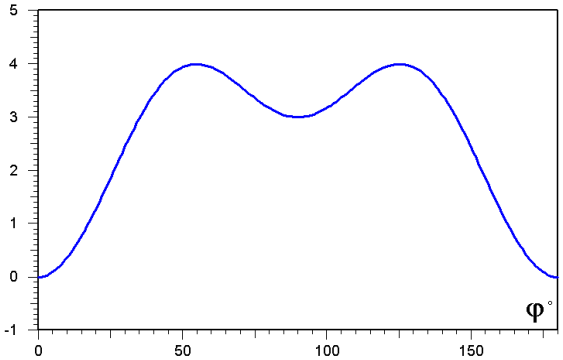
- $I = \cos^2\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi$ $II = \left(\tan^2\varphi + 4\right) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$ $III = 3 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$



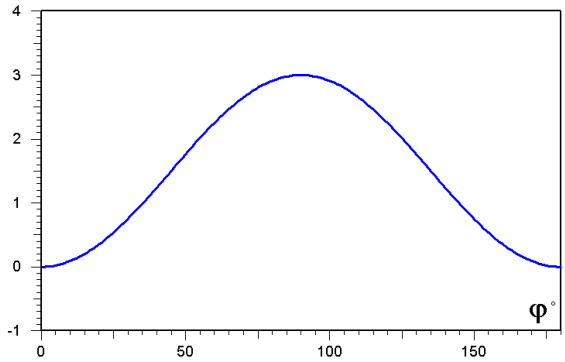
- $I = \sin^2\varphi + 4 \cdot \cos^2\varphi$ $II = \sin^2\varphi + 16 \cdot \cos^2\varphi$ $III = 4 \cdot \sin^2\varphi + \cos^2\varphi$



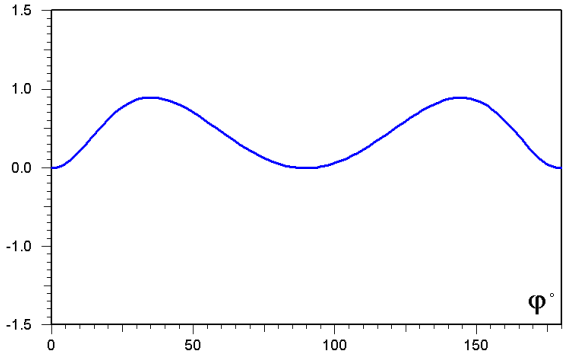
- $I = 3 \cdot \left(\tan^2\varphi + 4\right) \cdot \sin\varphi \cdot \cos^3\varphi$



- $I = 3 \cdot \sin^2\varphi$



- $I = 9 \cdot \frac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{4 \cdot \sin^2\varphi + \cos^2\varphi}$



[Dipb],[Dipa] Im vorliegenden Arbeitsblatt beträgt der Winkel beider Ellipsen (**MKQ** und **HKA**) aus Gründen der Konsistenz zu anderen Skripten zueinander mit $\varphi = 0°$[5]. Sollen beide Ellipsen orthogonal $\varphi = 90°$[6] betrachtet werden, ist in Abschnitt 2 mit folgender Konvertierung zu rechnen:

$$V_{YY}^{\varphi=90°} = V_{XX}^{\varphi=0°} \qquad V_{XX}^{\varphi=90°} = V_{YY}^{\varphi=0°} \qquad C^{\varphi=90^0} = -C^{\varphi=0°}$$

Für $\varphi = 90°$ daher:

$$y^{\varphi=90°} = y_{MP} - \frac{C}{V_{YY}} \cdot (x - x_{MP}) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}} \sqrt{V_{YY} - (x - x_{MP})^2}$$

Mit:

$$A = V_{YY} \qquad B = -C \qquad \frac{e^2 \cdot f^2}{A} = \frac{V_{XX}}{n^2}$$

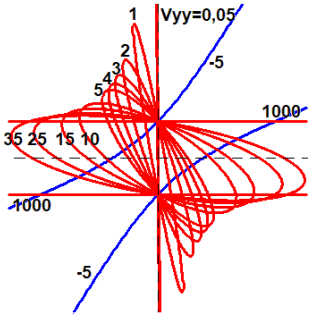
LaTeX 2_ε

[5] Entspricht der Hauptkomponente.
[6] Entspricht der Nebenkomponente.

$$\oiint$$

5.1.4 Elliptische Regression - MKQ/HKA/SIG - Grafische Darstellungen

Ellipsenfunktionsgleichung - Grafische Darstellungen



Ellipse Function Equation - Graphical Representations

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 03. April 2025 – Letzte Revision: 5. Mai 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Fall MKQ - $Y\left(X_m; Y_m; A; B; e; f\right)$ **3**

2 Fall HKA - $Y\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}; C\right)$ **9**

3 Fall SIG - $Y^{(\varphi=0^\circ)}\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}\right)$ **15**

4 Fall SIG - $Y^{(\varphi=90^\circ)}\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}\right)$ **21**

Literatur

[Dipa] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten - Prinzip HKA. www.Zenithpoint.de.

[Dipb] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten - Prinzip MKQ. www.Zenithpoint.de.

[Dipc] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten - Punkte. www.Zenithpoint.de.

[Dipd] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Ermittlung der abszissen und ordinatenparallelen Ellipse über die Singulärwertzerlegung. www.Zenithpoint.de.

---

1 Fall MKQ - $Y\left(X_m; Y_m; A; B; e; f\right)$

- **Veränderliche** X_m

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse. [Dipb]

$$Y\left(X_m; Y_m; A; B; e; f\right) = Y_m + \frac{B}{A} \cdot (X - X_m) \pm \frac{e \cdot f}{A} \cdot \sqrt{A - (X - X_m)^2}$$

Mit:

$$A = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi \qquad B = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi$$

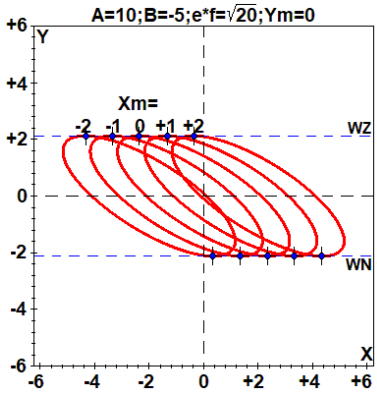
Sowie:[1]

$$A = V_{YY} \qquad B = -C \qquad e \cdot f = \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$A = 10 \qquad B = -5 \qquad e \cdot f = \sqrt{20}$$

- **Beispiel**



Negative wie positive Werte für X_m sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte WZ[2] und WN[3] bilden den Wertebereich der Ellipse ab. Es gilt:

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\frac{B^2 + e^2 \cdot f^2}{A}} \qquad y_{WN} = y_{MP} - \sqrt{\frac{B^2 + e^2 \cdot f^2}{A}}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta y = y_{WZ} - y_{WN} = 2\sqrt{\frac{B^2 + e^2 \cdot f^2}{A}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$y_{WZ} = +\sqrt{\frac{9}{2}} \approx= +2,121 \qquad y_{WN} = -\sqrt{\frac{9}{2}} \approx= -2,121$$

$\Rightarrow$

$$\Delta y = 3 \cdot \sqrt{2} \approx 4,243$$

[1] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[2] WZ = Wahrer Zenith, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[3] WN = Wahrer Nadir, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche Y_m**

[Dipb] Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse.

$$Y\left(X_m; Y_m; A; B; e; f\right) = Y_m + \frac{B}{A} \cdot (X - X_m) \pm \frac{e \cdot f}{A} \cdot \sqrt{A - (X - X_m)^2}$$

Mit:

$$A = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi \qquad B = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi$$

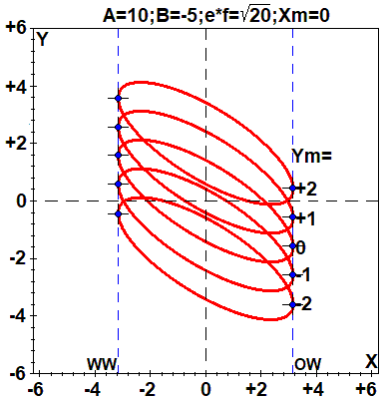
Sowie:[4]

$$A = V_{YY} \qquad B = -C \qquad e \cdot f = \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$A = 10 \qquad B = -5 \qquad e \cdot f = \sqrt{20}$$

- **Beispiel**



Negative wie positive Werte für Y_m sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte OW[5] und WW[6] bilden den Definitionsbereich der Ellipse ab. Es gilt:

$$x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{A} \qquad x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{A}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = x_{OW} - x_{WW} = 2\sqrt{A}$$

Mit den bekannten Werten:

$$x_{OW} = +\sqrt{10} \approx +3,162 \qquad x_{WW} = -\sqrt{10} \approx -3,162$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = x_{OW} - x_{WW} = 2\sqrt{10} \approx 6,325$$

[4] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[5] OW = Östlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[6] WW = Westlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche A**

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse. [Dipb]

$$Y\left(X_m; Y_m; A; B; e; f\right) = Y_m + \frac{B}{A} \cdot \left(X - X_m\right) \pm \frac{e \cdot f}{A} \cdot \sqrt{A - \left(X - X_m\right)^2}$$

Mit:

$$A = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi \qquad B = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi$$

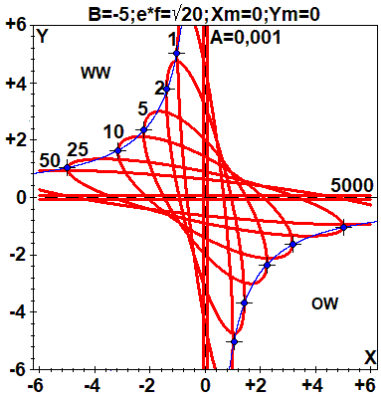
Sowie:[7]

$$A = V_{YY} \qquad B = -C \qquad e \cdot f = \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$A = 10 \qquad B = -5 \qquad e \cdot f = \sqrt{20}$$

- **Beispiel**



Nur positive Werte für A sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte OW[8] und WW[9] bilden die Umhüllende aller obiger Ellipsen ab. Es gilt:

$$y_{WW} = y_{MP} - \frac{B}{\sqrt{A}} \qquad x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{A}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WW} = y_{MP} + \frac{B}{x_{WW} - x_{MP}}$$

Bzw:

$$y_{OW} = y_{MP} + \frac{B}{\sqrt{A}} \qquad x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{A}$$

$\Rightarrow$

$$y_{OW} = y_{MP} + \frac{B}{x_{OW} - x_{MP}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$y_{WW} = -\frac{5}{x_{WW}} \qquad y_{OW} = -\frac{5}{x_{OW}}$$

Es ergibt sich für die Punkte WZ[10] und WN[11] eine weitere Umhüllende.

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\frac{B^2 + e^2 \cdot f^2}{A}} \qquad x_{WZ} = x_{MP} + B \cdot \sqrt{\frac{A}{B^2 + e^2 \cdot f^2}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WZ} = y_{MP} + \frac{B}{x_{WZ} - x_{MP}} \qquad \text{bzw.} \qquad y_{WN} = y_{MP} + \frac{B}{x_{WN} - x_{MP}}$$

[7] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[8] OW = Östlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[9] WW = Westlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[10] WZ = Wahrer Zenith, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[11] WN = Wahrer Nadir, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche** B

[Dipb] Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse.

$$Y\left(X_m; Y_m; A; B; e; f\right) = Y_m + \frac{B}{A} \cdot (X - X_m) \pm \frac{e \cdot f}{A} \cdot \sqrt{A - (X - X_m)^2}$$

Mit:

$$A = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi \qquad B = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi$$

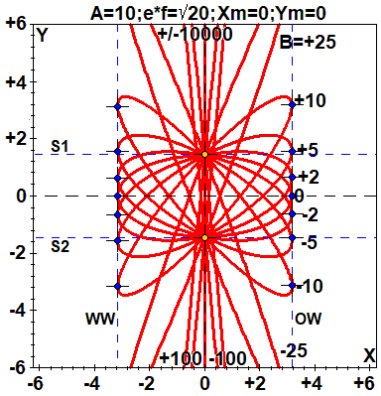
Sowie:[12]

$$A = V_{YY} \qquad B = -C \qquad e \cdot f = \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$A = 10 \qquad B = -5 \qquad e \cdot f = \sqrt{20}$$

- **Beispiel**



Negative wie positive Werte für B sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte OW[13] und WW[14] zeigen den Definitionsbereich an.

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{A} \qquad x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{A}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = x_{OW} - x_{WW} = 2\sqrt{A}$$

Mit den bekannten Werten:

$$x_{WW} = -\sqrt{10} \approx -3,162 \qquad x_{OW} = +\sqrt{10} \approx +3,162$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = 2\sqrt{10} \approx 6,325$$

Die Singularpunkte S_1 und S_2 sind berechenbar über die allgemeine Funktionsgleichung.

$$S_{1;2} = Y\left(X = X_m\right) = Y_m \pm \frac{e \cdot f}{\sqrt{A}}$$

$\Rightarrow$

$$S_{1;2} = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1,414$$

[12] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[13] OW = Östlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[14] WW = Westlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche** $e \cdot f$

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse. [Dipb]

$$Y\left(X_m; Y_m; A; B; e; f\right) = Y_m + \frac{B}{A} \cdot \left(X - X_m\right) \pm \frac{e \cdot f}{A} \cdot \sqrt{A - \left(X - X_m\right)^2}$$

Mit:

$$A = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi \qquad B = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi$$

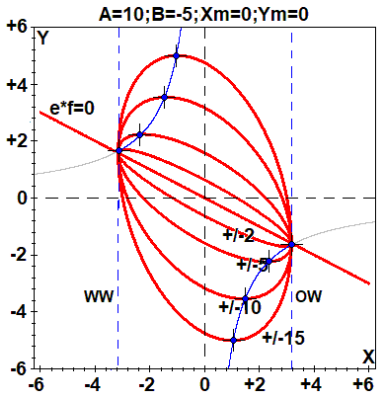
Sowie:[15]

$$A = V_{YY} \qquad B = -C \qquad e \cdot f = \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$A = 10 \qquad B = -5 \qquad e \cdot f = \sqrt{20}$$

- **Beispiel**



Negative (nicht relevant) wie positive Werte für $e \cdot f$ sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte OW[16] und WW[17] zeigen den Definitionsbereich an.

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{A} \qquad x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{A}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = x_{OW} - x_{WW} = 2\sqrt{A}$$

Mit den bekannten Werten:

$$x_{WW} = -\sqrt{10} \approx -3,162 \qquad x_{OW} = +\sqrt{10} \approx +3,162$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = 2\sqrt{10} \approx 6,325$$

Es ergibt sich für die Punkte WZ[18] und WN[19] eine weitere Besonderheit.

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\frac{B^2 + e^2 \cdot f^2}{A}} \qquad x_{WZ} = x_{MP} + B \cdot \sqrt{\frac{A}{B^2 + e^2 \cdot f^2}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WZ} = y_{MP} + \frac{B}{x_{WZ} - x_{MP}} \quad \text{bzw.} \quad y_{WN} = y_{MP} + \frac{B}{x_{WN} - x_{MP}}$$

Für $e \cdot f = 0$ ergibt sich eine lineare Funktion.

$$Y\left(e \cdot f = 0\right) = \underbrace{\frac{B}{A} \cdot X}_{a \cdot x} + \underbrace{Y_m - \frac{B}{A} \cdot X_m}_{b}$$

[15] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[16] OW = Östlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[17] WW = Westlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[18] WZ = Wahrer Zenith, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[19] WN = Wahrer Nadir, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

2 Fall HKA - $Y\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}; C\right)$

- **Veränderliche X_m**

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse. [Dipa]

$$Y\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}; C\right) = Y_m - \frac{C}{V_{YY}} \cdot (X - X_m) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}} \sqrt{V_{YY} - (X - X_m)^2}$$

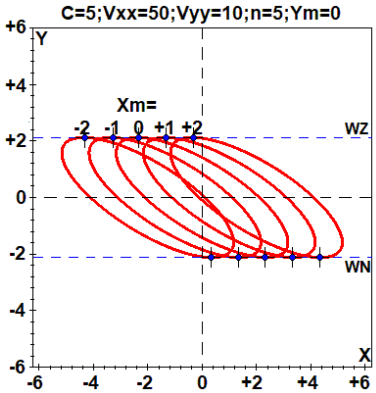
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[20]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative wie positive Werte für X_m sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte WZ[21] und WN[22] bilden den Wertebereich der Ellipse ab. Es gilt:

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\frac{C^2}{V_{YY}} + \frac{V_{XX}}{n^2}} \qquad y_{WN} = y_{MP} - \sqrt{\frac{C^2}{V_{YY}} + \frac{V_{XX}}{n^2}}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta y = y_{WZ} - y_{WN} = 2\sqrt{\frac{C^2}{V_{YY}} + \frac{V_{XX}}{n^2}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$y_{WZ} = +\sqrt{\frac{9}{2}} \approx +2,121 \qquad y_{WN} = -\sqrt{\frac{9}{2}} \approx -2,121$$

$\Rightarrow$

$$\Delta y = 3 \cdot \sqrt{2} \approx 4,243$$

[20] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[21] WZ = Wahrer Zenith, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[22] WN = Wahrer Nadir, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche Y_m**

[Dipa] Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse.

$$Y\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}; C\right) = Y_m - \frac{C}{V_{YY}} \cdot (X - X_m) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}} \sqrt{V_{YY} - (X - X_m)^2}$$

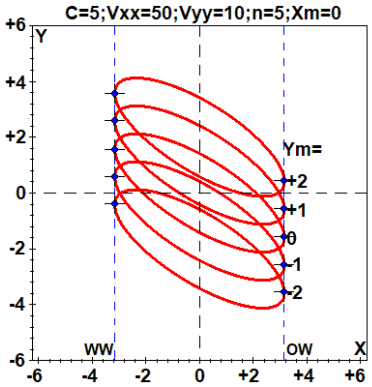
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[23]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative wie positive Werte für Y_m sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte OW[24] und WW[25] bilden den Definitionsbereich der Ellipse ab. Es gilt:

$$x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{V_{YY}} \qquad x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{V_{YY}}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = x_{OW} - x_{WW} = 2\sqrt{V_{YY}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$x_{OW} = +\sqrt{10} \approx +3,162 \qquad x_{WW} = -\sqrt{10} \approx -3,162$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = 2\sqrt{10} \approx 6,325$$

[23] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[24] OW = Östlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[25] WW = Westlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche n**

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse. [Dipa]

$$Y\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}; C\right) = Y_m - \frac{C}{V_{YY}} \cdot (X - X_m) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}} \sqrt{V_{YY} - (X - X_m)^2}$$

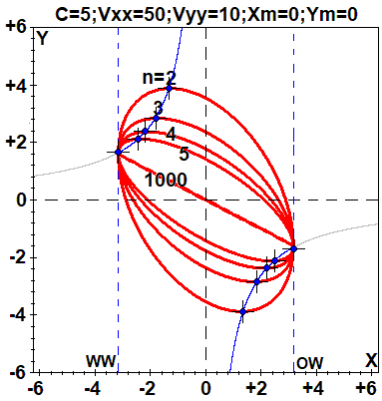
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[26]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative (praktisch irrelevant)
wie positive Werte für n sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte OW[27] und WW[28] zeigen den Definitionsbereich an.

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{V_{YY}} \qquad x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{V_{YY}}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = x_{OW} - x_{WW} = 2\sqrt{V_{YY}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$x_{WW} = -\sqrt{10} \approx -3,162 \qquad x_{OW} = +\sqrt{10} \approx +3,162$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = 2\sqrt{10} \approx 6,325$$

Es ergibt sich für die Punkte WZ[29] und WN[30] eine weitere Besonderheit.

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\frac{C^2 \cdot n^2 + V_{XX} \cdot V_{YY}}{V_{YY} \cdot n^2}} \qquad x_{WZ} = x_{MP} - C \cdot \sqrt{\frac{V_{YY} \cdot n^2}{C^2 \cdot n^2 + V_{XX} \cdot V_{YY}}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WZ} = y_{MP} + \frac{C}{x_{MP} - x_{WZ}} \qquad \text{bzw.} \qquad y_{WN} = y_{MP} + \frac{C}{x_{MP} - x_{WN}}$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich eine lineare Funktion.

$$Y\left(n \to \infty\right) = \underbrace{Y_m + \frac{C}{V_{YY}} \cdot X_m}_{b} + \underbrace{\frac{-C}{V_{YY}} \cdot X}_{a \cdot x}$$

[26] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[27] OW = Östlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[28] WW = Westlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[29] WZ = Wahrer Zenith, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[30] WN = Wahrer Nadir, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche** V_{XX}

[Dipa] Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse.

$$Y\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}; C\right) = Y_m - \frac{C}{V_{YY}} \cdot (X - X_m) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}} \sqrt{V_{YY} - (X - X_m)^2}$$

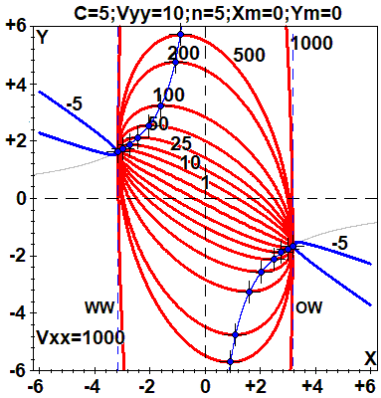
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[31]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative (generiert Hyperbeln, daher irrelevant) wie positive Werte für V_{XX} sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte OW[32] und WW[33] zeigen den Definitionsbereich an.

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{V_{YY}} \qquad x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{V_{YY}}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = x_{OW} - x_{WW} = 2\sqrt{V_{YY}}$$

Sowie:

$$y_{WW} = y_{MP} + \frac{C}{\sqrt{V_{YY}}} \qquad y_{OW} = y_{MP} - \frac{C}{\sqrt{V_{YY}}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$x_{WW} = -\sqrt{10} \approx -3,162 \qquad x_{OW} = +\sqrt{10} \approx +3,162$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = 2\sqrt{10} \approx 6,325$$

Es ergibt sich für die Punkte WZ[34] und WN[35] eine weitere Besonderheit.

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\frac{C^2 \cdot n^2 + V_{XX} \cdot V_{YY}}{V_{YY} \cdot n^2}} \qquad x_{WZ} = x_{MP} - C \cdot \sqrt{\frac{V_{YY} \cdot n^2}{C^2 \cdot n^2 + V_{XX} \cdot V_{YY}}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WZ} = y_{MP} + \frac{C}{x_{MP} - x_{WZ}} \quad \text{bzw.} \quad y_{WN} = y_{MP} + \frac{C}{x_{MP} - x_{WN}}$$

[31] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[32] OW = Östlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[33] WW = Westlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[34] WZ = Wahrer Zenith, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[35] WN = Wahrer Nadir, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche V_{YY}**

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse. [Dipa]

$$Y\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}; C\right) = Y_m - \frac{C}{V_{YY}} \cdot (X - X_m) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}} \sqrt{V_{YY} - (X - X_m)^2}$$

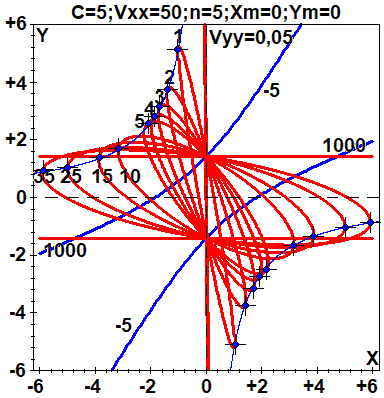
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[36]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative (generiert Hyperbeln, daher irrelevant)
wie positive Werte für V_{YY} sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte OW[37] und WW[38] bilden die Umhüllende aller obiger Ellipsen ab. Es gilt:

$$y_{WW} = y_{MP} + \frac{C}{\sqrt{V_{YY}}} \qquad x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{V_{YY}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WW} = y_{MP} - \frac{C}{x_{WW} - x_{MP}}$$

Bzw:

$$y_{OW} = y_{MP} - \frac{C}{\sqrt{V_{YY}}} \qquad x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{V_{YY}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{OW} = y_{MP} - \frac{C}{x_{OW} - x_{MP}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$y_{WW} = -\frac{5}{x_{WW}} \qquad y_{OW} = -\frac{5}{x_{OW}}$$

Es ergibt sich für die Punkte WZ[39] und WN[40] eine weitere Umhüllende.

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\frac{C^2 \cdot n^2 + V_{XX} \cdot V_{YY}}{V_{YY} \cdot n^2}} \qquad x_{WZ} = x_{MP} - C \cdot \sqrt{\frac{V_{YY} \cdot n^2}{C^2 \cdot n^2 + V_{XX} \cdot V_{YY}}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WZ} = y_{MP} + \frac{C}{x_{MP} - x_{WZ}} \qquad \text{bzw.} \qquad y_{WN} = y_{MP} + \frac{C}{x_{MP} - x_{WN}}$$

[36] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[37] OW = Östlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[38] WW = Westlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[39] WZ = Wahrer Zenith, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[40] WN = Wahrer Nadir, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche** $C_{XY} = C_{YX} = C$

[Dipa] Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse.

$$Y\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}; C\right) = Y_m - \frac{C}{V_{YY}} \cdot (X - X_m) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}} \sqrt{V_{YY} - (X - X_m)^2}$$

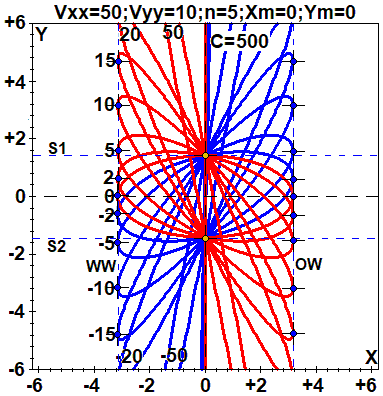
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[41]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative wie positive Werte für C sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte OW[42] und WW[43] zeigen den Definitionsbereich an.

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{V_{YY}} \qquad x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{V_{YY}}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = x_{OW} - x_{WW} = 2\sqrt{V_{YY}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$x_{WW} = -\sqrt{10} \approx -3,162 \qquad x_{OW} = +\sqrt{10} \approx +3,162$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = 2\sqrt{10} \approx 6,325$$

Die Singularpunkte S_1 und S_2 sind berechenbar über die allgemeine Funktionsgleichung.

$$S_{1;2} = Y\left(X = X_m\right) = Y_m \pm \frac{1}{n}\sqrt{V_{XX}}$$

$\Rightarrow$

$$S_{1;2} = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1,414$$

[41] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[42] OW = Östlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[43] WW = Westlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

3 Fall SIG - $Y^{(\varphi=0^\circ)}\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}\right)$

- **Veränderliche** X_m

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und ungekippten Ellipse. [Dipd]

$$Y^{(\varphi=0^\circ)}\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}\right) = Y_m \pm \sqrt{V_{YY}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - X_m\right)^2}{V_{XX}}}$$

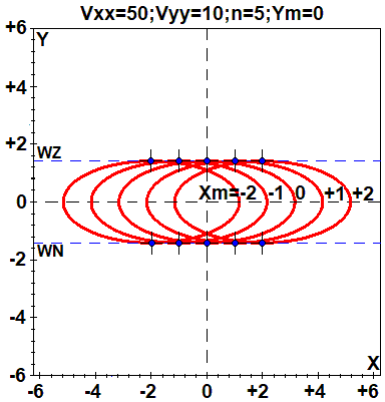
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[44 ; 45]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative wie positive Werte für X_m sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte WZ[46] und WN[47] bilden den Wertebereich der Ellipse ab. Es gilt:

$$y_{WZ} = y_{MP} + \frac{1}{n} \cdot \sqrt{V_{XX}} \qquad y_{WN} = y_{MP} - \frac{1}{n} \cdot \sqrt{V_{XX}}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta y = y_{WZ} - y_{WN} = \frac{2}{n} \cdot \sqrt{V_{XX}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$y_{WZ} = +\sqrt{2} \approx +1,414 \qquad y_{WN} = -\sqrt{2} \approx -1,414$$

$\Rightarrow$

$$\Delta y = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2,828$$

[44] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[45] Der Wert C ist in der Methode SIG ohne Bedeutung.
[46] WZ = Wahrer Zenith, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[47] WN = Wahrer Nadir, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche Y_m**

[Dipa] Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse.

$$Y^{(\varphi=0^\circ)}\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}\right) = Y_m \pm \sqrt{V_{YY}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - X_m\right)^2}{V_{XX}}}$$

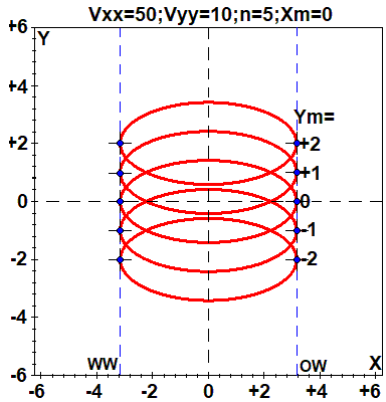
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[48] ; [49]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative wie positive Werte für Y_m sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Punkte OW[50] und WW[51] bilden den Definitionsbereich der Ellipse ab. Es gilt:

$$x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{V_{YY}} \qquad x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{V_{YY}}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = x_{OW} - x_{WW} = 2 \cdot \sqrt{V_{YY}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$x_{OW} = +\sqrt{10} \approx +3,162 \qquad x_{WW} = -\sqrt{10} \approx -3,162$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = 2 \cdot \sqrt{10} \approx 6,325$$

[48] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[49] Der Wert C ist in der Methode SIG ohne Bedeutung.
[50] OW = Östlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]
[51] WW = Westlich wahrer Scheitelpunkt, zu den Bezeichnungen siehe [Dipc]

- **Veränderliche n**

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse. [Dipa]

$$Y^{(\varphi=0^\circ)}\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}\right) = Y_m \pm \sqrt{V_{YY}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - X_m\right)^2}{V_{XX}}}$$

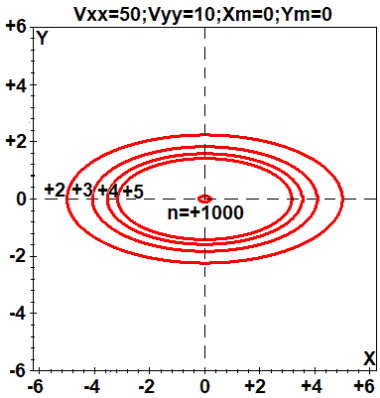
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[52 ; 53]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Nur positive Werte für n sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Für die zentrierte Ellipse gilt die Funktionsgleichung:

$$Y^{(\varphi=0^\circ)}\left(X_m = 0; Y_m = 0; V_{XX}; V_{YY}\right) = \pm\sqrt{V_{YY}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{X^2}{V_{XX}}}$$

Gesucht ist der Fall, an dem die Ellipse zu einem Punkt zusammengeschmolzen ist. Dann muss gelten:

$$\frac{1}{n} - \frac{X^2}{V_{XX}} = 0$$

$\Rightarrow$

$$X_{1;2} = \pm\sqrt{\frac{V_{XX}}{n}}$$

Das ist nur dann möglich wenn $X_1 = X_2 = 0$, was erfordert:

$$n \to \infty$$

Für die verschobene Ellipse wäre der Punkt an der Stelle $P\left(X_m; Y_m\right)$ zu beobachten. Was dann erfordert:

$$\frac{1}{n} = 0$$

$\Rightarrow$

$$n \to \infty$$

[52] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[53] Der Wert C ist in der Methode SIG ohne Bedeutung.

- **Veränderliche** V_{XX}

[Dipa] Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse.

$$Y^{(\varphi=0^\circ)}\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}\right) = Y_m \pm \sqrt{V_{YY}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - X_m\right)^2}{V_{XX}}}$$

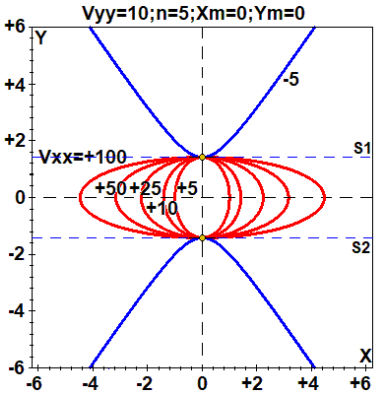
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[54] ; [55]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative (generiert Hyperbeln, daher irrelevant)
wie positive Werte für V_{XX} sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Singularpunkte S_1 und S_2 sind berechenbar über die allgemeine Funktionsgleichung.

$$S_{1;2} = Y^{(\varphi=0^\circ)}\left(X = X_m\right) = Y_m \pm \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$S_{1;2} = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1,414$$

[54] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[55] Der Wert C ist in der Methode SIG ohne Bedeutung.

- **Veränderliche V_{YY}**

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse. [Dipa]

$$Y^{(\varphi=0^\circ)}\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}\right) = Y_m \pm \sqrt{V_{YY}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - X_m\right)^2}{V_{XX}}}$$

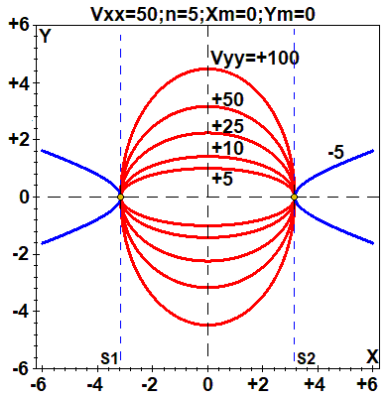
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[56 ; 57]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative (generiert Hyperbeln, daher irrelevant)
wie positive Werte für V_{YY} sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Singularpunkte S_1 und S_2 sind berechenbar über die allgemeine Funktionsgleichung an der Stelle, wo obere und untere Funktion zusammenstoßen $Y = Y_m$. Dann muss gelten:

$$\frac{1}{n} - \frac{\left(X - X_m\right)^2}{V_{XX}} = 0$$

Damit gilt:

$$S_{1;2} = X_m \pm \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}}$$

Mit den bekannten Werten.

$$S_{1;2} = \pm\sqrt{10} \approx \pm 3,162$$

[56] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[57] Der Wert C ist in der Methode SIG ohne Bedeutung.

4 Fall SIG - $Y^{(\varphi=90^\circ)}\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}\right)$

- **Veränderliche** X_m

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und ungekippten Ellipse. [Dipd]

$$Y^{(\varphi=90^\circ)}\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}\right) = Y_m \pm \sqrt{V_{XX}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - X_m\right)^2}{V_{YY}}}$$

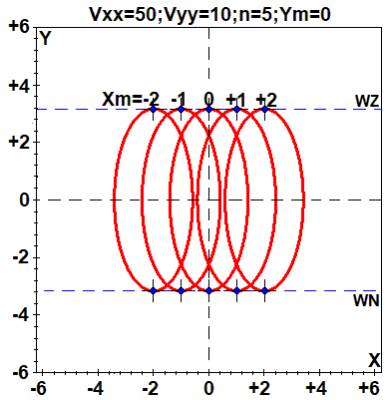
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[58 ; 59]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative wie positive Werte für X_m sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Der Wertebereich ist berechenbar über die allgemeine Funktionsgleichung an der Stelle $X = X_m$.

$$Y\left(X = X_m\right) = Y_m \pm \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}}$$

Damit gilt:

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} \qquad y_{WN} = y_{MP} - \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta y = y_{WZ} - y_{WN} = 2 \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$y_{WZ} = +\sqrt{10} \approx +3,162 \qquad y_{WN} = -\sqrt{10} \approx -3,162$$

$\Rightarrow$

$$\Delta y = 2 \cdot \sqrt{10} \approx 6,324$$

[58] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[59] Der Wert C ist in der Methode SIG ohne Bedeutung.

- **Veränderliche** Y_m

[Dipa] Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse.

$$Y^{(\varphi=90°)}\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}\right) = Y_m \pm \sqrt{V_{XX}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - X_m\right)^2}{V_{YY}}}$$

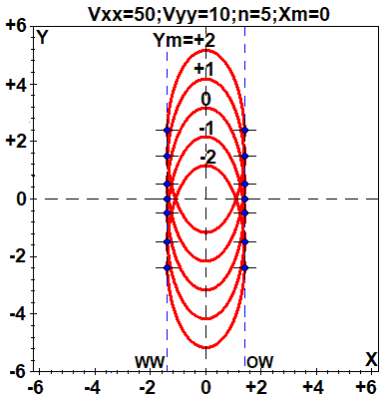
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[60 ; 61]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative wie positive Werte für Y_m sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Der Definitionsbereich ist berechenbar über die allgemeine Funktionsgleichung an der Stelle, wo obere und untere Funktion zusammenstoßen $Y = Y_m$. Dann muss gelten:

$$\frac{1}{n} - \frac{\left(X - X_m\right)^2}{V_{YY}} = 0$$

Daher:

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} \qquad x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = x_{OW} - x_{WW} = 2 \cdot \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}}$$

Mit den bekannten Werten.

$$x_{WW} = -\sqrt{2} \approx -1,414 \qquad x_{OW} = +\sqrt{2} \approx +1,414$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2,828$$

[60] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[61] Der Wert C ist in der Methode SIG ohne Bedeutung.

- **Veränderliche n**

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse. [Dipa]

$$Y^{(\varphi=90^\circ)}\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}\right) = Y_m \pm \sqrt{V_{XX}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - X_m\right)^2}{V_{YY}}}$$

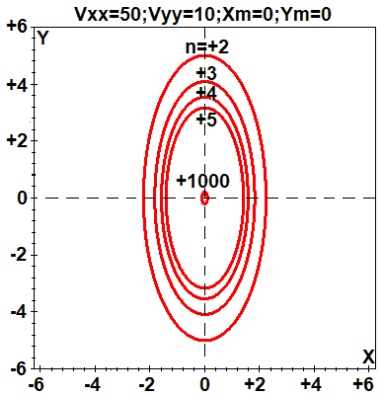
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[62 ; 63]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Nur positive Werte für n sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Für die zentrierte Ellipse gilt die Funktionsgleichung:

$$Y^{(\varphi=90^\circ)}\left(X_m = 0; Y_m = 0; V_{XX}; V_{XX}\right) = \pm\sqrt{V_{XX}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{X^2}{V_{YY}}}$$

Gesucht ist der Fall, an dem die Ellipse zu einem Punkt zusammengeschmolzen ist. Dann muss gelten:

$$\frac{1}{n} - \frac{X^2}{V_{YY}} = 0$$

$\Rightarrow$

$$X_{1;2} = \pm\sqrt{\frac{V_{YY}}{n}}$$

Das ist nur dann möglich wenn $X_1 = X_2 = 0$, was erfordert:

$$n \to \infty$$

Für die verschobene Ellipse wäre der Punkt an der Stelle $P\left(X_m; Y_m\right)$ zu beobachten. Was dann erfordert:

$$\frac{1}{n} = 0$$

$\Rightarrow$

$$n \to \infty$$

[62] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[63] Der Wert C ist in der Methode SIG ohne Bedeutung.

- **Veränderliche** V_{XX}

[Dipa] Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse.

$$Y^{(\varphi=90°)}(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}) = Y_m \pm \sqrt{V_{XX}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{(X - X_m)^2}{V_{YY}}}$$

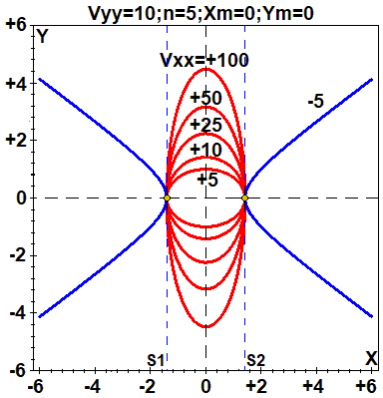
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[64 ; 65]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative (generiert Hyperbeln, daher irrelevant) wie positive Werte für V_{XX} sind möglich.

- **Besondere Punkte**

Die Singularpunkte S_1 und S_2 sind berechenbar über die allgemeine Funktionsgleichung.

$$S_{1;2} = Y^{(\varphi=90°)}(Y = Y_m)$$

$\Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{(X - X_m)^2}{V_{YY}}} = 0$$

Daher:

$$S_{1;2} = x_{MP} \pm \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$S_{1;2} = \pm\sqrt{2} \approx \pm 1,414$$

[64] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[65] Der Wert C ist in der Methode SIG ohne Bedeutung.

- **Veränderliche** V_{YY}

Gegeben ist die Funktionsgleichung einer unzentrierten und gekippten Ellipse. [Dipa]

$$Y^{(\varphi=90^\circ)}\left(X_m; Y_m; V_{XX}; V_{YY}\right) = Y_m \pm \sqrt{V_{XX}}\sqrt{\frac{1}{n} - \frac{\left(X - X_m\right)^2}{V_{YY}}}$$

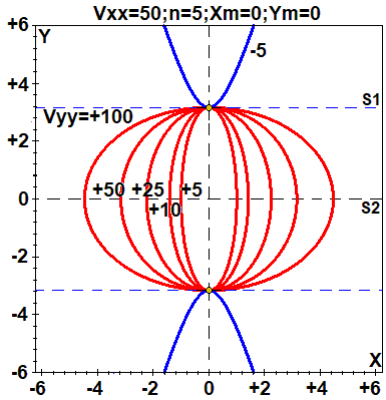
Mit:

$$V_{XX} = \frac{e^2 \cdot f^2}{V_{YY}} \cdot n^2 \qquad V_{YY} = A \qquad C = -B$$

$\Rightarrow$[66] ; [67]

$$V_{XX} = 50 \qquad V_{YY} = 10 \qquad C = 5 \qquad n = 5$$

- **Beispiel**



Negative (generiert Hyperbeln, daher irrelevant) wie positive Werte für V_{YY} sind möglich.

- **Besondere Punkte** Singularwerte für:

$$Y^{(\varphi=90^\circ)}\left(X = X_m\right) = Y_m \pm \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}}$$

$\Rightarrow$

$$S_{1;2} = y_{MP} \pm \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}}$$

Mit den bekannten Werten:

$$S_{1;2} = \pm\sqrt{10} \approx \pm 3,162$$

[66] Der Wert n, die Anzahl der verwendeten Datenpunkte muss bekannt sein, n kann nicht nachträglich berechnet werden.
[67] Der Wert C ist in der Methode SIG ohne Bedeutung.

LaTeX 2_ε

$$\oiint$$

5.2 Sonstige

5.2.1 (Pearson-)Korrelationskoeffizient höherer Grade

(Pearson-)Korrelationskoeffizienten höherer Grade

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 13. März 2014 - Letzte Revision: 7. August 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Der Pearson-Korrelationskoeffizient $\rho_P^{(1)}$ **5**

3 Die erweiterten Korrelationskoeffizenten **7**

3.1 Der Lineare Korrelationskoeffizient $\rho^{(1)}$ 7

3.2 Der Quadratische Korrelationskoeffizient $\rho^{(2)}$ 8

3.3 Der Kubische Korrelationskoeffizient $\rho^{(3)}$ 9

3.4 Der Biquadratische Korrelationskoeffizient $\rho^{(4)}$ 10

4 Zusammenfassung und Erwartungen **11**

5 Grafische Darstellungen **13**

5.1 Regressionen 13

5.2 Korrelationen 14

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Einleitung

Einleitung

Besteht die Notwendigkeit Datenpaare einer Messwertreihe auszuwerten, dann werden mit hoher Sicherheit während dieses Prozesses ebenfalls Regressionen durchgeführt, von linear über quadratisch, kubisch bis zu biquadratisch. Gleichfalls ist unter Umständen eine Elliptische Regression notwendig. Ein sichtbares Ergebnis ist dann der Lineare Korrelationskoeffizient $\rho^{(1)}$ unter der Berechnungsgrundlage: [001]ff.

$$\rho^{(1)} = a \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

Wobei a den Anstieg der Hauptachse der regressierten Ellipse darstellt und σ_x bzw. σ_y die Standardabweichungen der Datenwerte X und Y.

Nutzt man die Grundlage nach Pearson zur Ermittlung des Linearen Korrelationskoeffizienten, dann lässt sich $\rho^{(1)}$ berechnen über:

$$\rho^{(1)} = \frac{Cov\,(X;Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

Der Wert Cov ist hier die Kovarianz zwischen X und Y.

Beide Gleichungen für $\rho^{(1)}$ zusammen gefasst, zeigen folgenden Zusammenhang:

$$a \cdot \sigma_x^2 = Cov\,(X;Y)$$

$\Rightarrow$

$$a \cdot Var\,(X) = Cov\,(X;Y)$$

$Var\,(X)$ ist die Varianz von X.

$$a = \frac{Cov\,(X;Y)}{Var\,(X)}$$

$\Rightarrow$

$$a = \frac{E\,[(X - E\,(X)) \cdot (Y - E\,(Y))]}{E\,(X^2) - E^2\,(X)}$$

Wobei $E\,(\bullet)$ der Erwartungswert ist.

Der Lineare Korrelationskoeffizient $\rho^{(1)}$ ist ein Repräsentant für den Grad des linearen Zusammenhangs zwischen zwei Merkmalen. Er nimmt Werte zwischen -1 und +1 an. Bei ± 1 besteht ein vollständiger linearer Zusammenhang. Gilt $\rho^{(1)} = 0$ liegt keine Abhängigkeit voneinander vor. Dies gilt jedoch nur für lineare Abhängigkeiten, so kann Merkmal 1 und Merkmal 2 durchaus nichtlinear zusammen hängen, obwohl $\rho^{(1)} = 0$. Daher ist der Lineare Korrelationskoeffizient nicht geeignet zur Untersuchung für vollständig stochastische Abhängigkeiten.

Die Nutzung von $\rho^{(1)}$ verlangt einige Voraussetzungen, welche hier als erfüllt gelten.

Der Anstieg a liegt linear vor. Im weiteren Verlauf dieses Arbeitsblattes wird eine Möglichkeit beschrieben um polynomiale Funktionen für die Hauptachse der Elliptischen Regression nutzen zu können und somit auch Korrelationskoeffizienten höherer Grade zu berechnen.

2 Der Pearson-Korrelationskoeffizient $\rho_P^{(1)}$

Lineare Korrelation

Mit den Datenpaaren X und Y ist eine Lineare Regression durchgeführt worden. Damit liegt eine Berechnungsgrundlage folgender Form vor.

$$y = B \cdot x + A$$

$\Rightarrow$

$$Y_i = y_i \qquad X_i = x_i$$

Ebenso wurde ein Linearer Korrelationskoeffizient berechnet. Die Voraussetzungen für diese Berechnung sind gegeben. Aus der Elliptischen Regression ist der Lineare Korrelationskoeffizient vorab schon bekannt.

$$\rho_P^{(1)} = 0,866$$

Die Berechnung von $\rho^{(1)}$ ist einfach durchführbar mit den bekannten elementaren Mitteln

n	x_i	y_i	X_i	Y_i	X_i - X_M	Y_i - Y_M
1	128	100	+128	+100	-567	-348, 75
2	256	250	+256	+250	-439	-198, 75
3	440	510	+440	+510	-255	+61, 25
4	640	160	+640	+160	-55	-288, 75
5	768	400	+768	+400	+73	-48, 75
6	896	520	+896	+520	+201	+71, 25
7	1152	750	+1 152	+750	+457	+301, 25
8	1280	900	+1 280	+900	+585	+451, 25
-	-	-	+5 560	+3 590	0	0

$(X_i$ - $X_M)^2$	$(Y_i$ - $Y_M)^2$	$(X_i$ - $X_M) \cdot (Y_i$ - $Y_M)$
+321 489	+121 627	+197 741
+192 721	+39 502	+87 251
+65 025	+3 752	-15 619
+3 025	+83 377	+15 881
+5 329	+2 377	-3 559
+40 401	+5 077	+14 321
+208 849	+90 752	+137 671
+342 225	+203 627	+263 981
+1 179 064	+550 091	+697 668

- **Mittelwerte**

$$X_M = \frac{5560}{8} = 695 \qquad Y_M = \frac{3590}{8} = 448,75$$

- **Standardabweichungen**

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1179064}{8}} = 383,905 \qquad \sigma_Y = \sqrt{\frac{550091}{8}} = 262,224$$

- **Kovarianz**

$$Cov(X,Y) = \frac{697668}{8} = 87208,5$$

- **Linearer Korrelationskoeffizient**

$$\rho_P^{(1)} = \frac{Cov\,(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{87208,5}{383,905 \cdot 262,224} = 0,866$$

3 Die erweiterten Korrelationskoeffizenten

3.1 Der Lineare Korrelationskoeffizient $\rho^{(1)}$

Lineare Korrelation

Mit den Datenpaaren X und Y ist eine Lineare Regression durchgeführt worden. Damit liegt eine Berechnungsgrundlage folgender Form vor.

$$y = B \cdot x + A$$

$\Rightarrow$

$$Y_i = y_i \qquad X_i = B \cdot x_i + A$$

Die Voraussetzungen für die Berechnung des Korrelationskoeffizienten sind gegeben. Das Ergebnis der Linearen Regression:

$$y = 0,593 \cdot x + 37,508$$

$\Rightarrow$

$$B = +0,593 \qquad A = +37,508$$

n	x_i	y_i	X_i	Y_i	X_i - X_M	Y_i - Y_M
1	128	100	+113, 386	+100	-336, 118	-348, 75
2	256	250	+189, 265	+250	-260, 239	-198, 75
3	440	510	+298, 340	+510	-151, 164	+61, 25
4	640	160	+416, 900	+160	-32, 604	-288, 75
5	768	400	+492, 778	+400	+43, 274	-48, 75
6	896	520	+568, 657	+520	+119, 153	+71, 25
7	1152	750	+720, 414	+750	+270, 910	+301, 25
8	1280	900	+796, 292	+900	+346, 788	+451, 25
-	-	-	+3 596	+3 590	0	0

$(X_i$ - $X_M)^2$	$(Y_i$ - $Y_M)^2$	$(X_i$ - $X_M) \cdot (Y_i$ - $Y_M)$
+112 975	+121 627	+117 221
+67 724	+39 502	+51 723
+22 851	+3 752	-9 259
+1 063	+83 377	+9 240
+1 873	+2 377	-2 110
+14 197	+5 077	+8 490
+73 392	+90 752	+81 612
+120 262	+203 627	+156 488
+414 337	+550 091	+413 405

- **Mittelwerte**

$$X_M = \frac{3596}{8} = 449,50 \qquad Y_M = \frac{3590}{8} = 448,75$$

- **Standardabweichungen**

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{414337}{8}} = 227,579 \qquad \sigma_Y = \sqrt{\frac{550091}{8}} = 262,224$$

- **Kovarianz**

$$Cov(X,Y) = \frac{413405}{8} = 51675,625$$

- **Linearer Korrelationskoeffizient**

$$\rho^{(1)} = \frac{Cov\,(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{51675,625}{227,579 \cdot 262,224} = 0,866$$

Quadratische Korrelation

3.2 Der Quadratische Korrelationskoeffizient $\rho^{(2)}$

Mit den Datenpaaren X und Y ist eine Quadratische Regression durchgeführt worden. Damit liegt eine Berechnungsgrundlage folgender Form vor.

$$y = C \cdot x^2 + B \cdot x + A$$

$\Rightarrow$

$$y - C \cdot x^2 = B \cdot x + A$$

$\Rightarrow$

$$Y_i = y_i - C \cdot x_i \qquad X_i = B \cdot x_i + A$$

Die Voraussetzungen für die Berechnung des Korrelationskoeffizienten sind gegeben. Das Ergebnis der Quadratischen Regression:

$$y = 454,96 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 - 0,0486 \cdot x + 195,71$$

$\Rightarrow$

$$C = +454,96 \cdot 10^{-6} \qquad B = -0,0486 \qquad A = +195,71$$

n	x_i	y_i	X_i	Y_i	X_i - X_M	Y_i - Y_M
1	128	100	+189, 489	+92, 546	+27, 556	-69, 394
2	256	250	+183, 268	+220, 184	+21, 335	+58, 244
3	440	510	+174, 326	+421, 920	+12, 393	+259, 980
4	640	160	+164, 606	-26, 352	+2, 673	-188, 292
5	768	400	+158, 385	+131, 653	-3, 548	-30, 287
6	896	520	+152, 164	+154, 751	-9, 769	-7, 189
7	1152	750	+139, 723	+146, 221	-22, 210	-15, 719
8	1280	900	+133, 502	+154, 594	-28, 431	-7, 346
-	-	-	+1 295, 463	+1 295, 517	0	0

$(X_i$ - $X_M)^2$	$(Y_i$ - $Y_M)^2$	$(X_i$ - $X_M) \cdot (Y_i$ - $Y_M)$
+759, 333	+4 815, 527	-1 912, 220
+455, 182	+3 392, 264	+1 242, 636
+153, 586	+67 589, 600	+3 221, 932
+7, 145	+35 453, 877	-503, 305
+12, 588	+917, 302	+107, 458
+95, 433	+51, 682	+70, 229
+493, 284	+247, 087	+349, 119
+808, 322	+53, 964	+208, 854
+2 784, 873	+112 521, 303	+2 784, 703

- **Mittelwerte**

$$X_M = \frac{1295,463}{8} = 161,933 \qquad Y_M = \frac{1295,517}{8} = 161,940$$

- **Standardabweichungen**

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{2784,873}{8}} = 18,658 \qquad \sigma_Y = \sqrt{\frac{112521,303}{8}} = 118,597$$

- **Kovarianz**

$$Cov(X,Y) = \frac{2784,703}{8} = 348,088$$

- **Quadratischer Korrelationskoeffizient**

$$\rho^{(2)} = \frac{Cov\,(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{348,088}{18,658 \cdot 118,597} = 0,157$$

3.3 Der Kubische Korrelationskoeffizient $\rho^{(3)}$

Kubische Korrelation

Mit den Datenpaaren X und Y ist eine Kubische Regression durchgeführt worden. Damit liegt eine Berechnungsgrundlage folgender Form vor.

$$y = D \cdot x^3 + C \cdot x^2 + B \cdot x + A$$

$\Rightarrow$

$$y - D \cdot x^3 - C \cdot x^2 = B \cdot x + A$$

$\Rightarrow$

$$Y_i = y_i - D \cdot x_i^3 - C \cdot x_i^2 \qquad X_i = B \cdot x_i + A$$

Die Voraussetzungen für die Berechnung des Korrelationskoeffizienten sind gegeben. Das Ergebnis der Kubischen Regression:

$$y = 1,578 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 - 0,00289 \cdot x^2 + 1,901 \cdot x - 70,611$$

$\Rightarrow$

$$D = 1,578 \cdot 10^{-6} \qquad C = -0,00289 \qquad B = 1,901 \qquad A = -70,611$$

n	x_i	y_i	X_i	Y_i	X_i - X_M	Y_i - Y_M
1	128	100	+173	+144	-1077, 5	-1106
2	256	250	+416	+413	-834, 5	-837
3	440	510	+766	+935	-484, 5	-315
4	640	160	+1 146	+929	-104, 5	-321
5	768	400	+1 389	+1 388	+138, 5	+135
6	896	520	+1 632	+1 703	+381, 5	+453
7	1152	750	+2 119	+2 169	+868, 5	+919
8	1280	900	+2 363	+2 322	+1112, 5	+1072
-	-	-	+10 004	+10 003	0	0

$(X_i$ - $X_M)^2$	$(Y_i$ - $Y_M)^2$	$(X_i$ - $X_M) \cdot (Y_i$ - $Y_M)$
+1, 161·10^{+06}	+1, 223·10^{+06}	+1, 192·10^{+06}
+0, 696·10^{+06}	+0, 701·10^{+06}	+0, 698·10^{+06}
+0, 235·10^{+06}	+0, 099·10^{+06}	+0, 153·10^{+06}
+0, 011·10^{+06}	+0, 103·10^{+06}	+0, 034·10^{+06}
+0, 019·10^{+06}	+0, 018·10^{+06}	+0, 019·10^{+06}
+0, 146·10^{+06}	+0, 205·10^{+06}	+0, 173·10^{+06}
+0, 754·10^{+06}	+0, 845·10^{+06}	+0, 798·10^{+06}
+1, 238·10^{+06}	+1, 149·10^{+06}	+1, 193·10^{+06}
+4, 260·10^{+06}	+4, 343·10^{+06}	+4, 260·10^{+06}

- **Mittelwerte**

$$X_M = \frac{10004}{8} = 1250,5 \qquad Y_M = \frac{10003}{8} = 1250,375$$

- **Standardabweichungen**

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{4,26 \cdot 10^{+6}}{8}} = 729,726 \qquad \sigma_Y = \sqrt{\frac{4,343 \cdot 10^{+6}}{8}} = 736,801$$

- **Kovarianz**

$$Cov(X,Y) = \frac{4,260 \cdot 10^{+6}}{8} = 0,533 \cdot 10^{+6}$$

- **Kubischer Korrelationskoeffizient**

$$\rho^{(3)} = \frac{Cov\,(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{0,533 \cdot 10^{+6}}{729,726 \cdot 736,801} = 0,990$$

Biquadratische Korrelation

3.4 Der Biquadratische Korrelationskoeffizient $\rho^{(4)}$

Mit den Datenpaaren X und Y ist eine Biquadratische Regression durchgeführt worden. Damit liegt eine Berechnungsgrundlage folgender Form vor.

$$y = E \cdot x^4 + D \cdot x^3 + C \cdot x^2 + B \cdot x + A$$

$\Rightarrow$

$$y - E \cdot x^4 - D \cdot x^3 - C \cdot x^2 = B \cdot x + A$$

$\Rightarrow$

$$Y_i = y_i - E \cdot x_i^4 - D \cdot x_i^3 - C \cdot x_i^2 \qquad X_i = B \cdot x_i + A$$

Die Voraussetzungen für die Berechnung des Korrelationskoeffizienten sind gegeben. Das Ergebnis der Biquadratischen Regression:

$$y = -5,168 \cdot 10^{-9} \cdot x^4 + 15,930 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 - 0,0161 \cdot x^2 + 6,450 \cdot x - 514,281$$

$\Rightarrow$

$E = -5,168 \cdot 10^{-9} \qquad D = +15,930 \cdot 10^{-6} \qquad C = -0,0161 \qquad B = +6,450 \qquad A = -514,281$

n	x_i	y_i	X_i	Y_i	X_i - X_M	Y_i - Y_M
1	128	100	+311	+312	-3 657	-3 654
2	256	250	+1 137	+1 061	-2 831	-2 905
3	440	510	+2 324	+2 465	-1 644	-1 501
4	640	160	+3 613	+3 449	-357	-517
5	768	400	+4 439	+4 483	+471	+520
6	896	520	+5 265	+5 324	+1 297	+1 358
7	1152	750	+6 916	+6 875	+2 948	+2 909
8	1280	900	+7 741	+7 756	+3 773	+3 790
-	-	-	+31 746	+31 725	0	0

$(X_i - X_M)^2$	$(Y_i - Y_M)^2$	$(X_i - X_M) \cdot (Y_i - Y_M)$
$+13,374 \cdot 10^{+06}$	$+13,352 \cdot 10^{+06}$	$+13,363 \cdot 10^{+06}$
$+8,015 \cdot 10^{+06}$	$+8,439 \cdot 10^{+06}$	$+8,224 \cdot 10^{+06}$
$+2,703 \cdot 10^{+06}$	$+2,253 \cdot 10^{+06}$	$+2,468 \cdot 10^{+06}$
$+0,127 \cdot 10^{+06}$	$+0,267 \cdot 10^{+06}$	$+0,185 \cdot 10^{+06}$
$+0,222 \cdot 10^{+06}$	$+0,270 \cdot 10^{+06}$	$+0,245 \cdot 10^{+06}$
$+1,682 \cdot 10^{+06}$	$+1,844 \cdot 10^{+06}$	$+1,761 \cdot 10^{+06}$
$+8,691 \cdot 10^{+06}$	$+8,462 \cdot 10^{+06}$	$+8,576 \cdot 10^{+06}$
$+14,236 \cdot 10^{+06}$	$+14,364 \cdot 10^{+06}$	$+14,300 \cdot 10^{+06}$
$+49,05 \cdot 10^{+06}$	$+49,251 \cdot 10^{+06}$	$+49,122 \cdot 10^{+06}$

- **Mittelwerte**

$$X_M = \frac{31746}{8} = 3968,25 \qquad Y_M = \frac{31725}{8} = 3965,625$$

- **Standardabweichungen**

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{49,05 \cdot 10^{+6}}{8}} = 2476,103 \qquad \sigma_Y = \sqrt{\frac{48,251 \cdot 10^{+6}}{8}} = 2481,229$$

- **Kovarianz**

$$Cov(X,Y) = \frac{49,122 \cdot 10^{+6}}{8} = 6,140 \cdot 10^{+6}$$

- **Biquadratischer Korrelationskoeffizient**

$$\rho^{(4)} = \frac{Cov\,(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{6,140 \cdot 10^{+6}}{2476,103 \cdot 22481,229} = 0,999$$

4 Zusammenfassung und Erwartungen

Zusammenfassung

- Da eine Polynomregression höherer Grade die vorhandenen Daten x_i und y_i immer besser widerspiegeln kann, ist zu erwarten das gilt:

$$\lim_{n \to +\infty} p^{(n)} = \pm 1$$

Es sei denn, dass die vorhandenen Daten schon beim Linearen Korrelationskoeffizenten eine völlige Unabhängigkeit voneinander anzeigen.

$$\rho^{(1)} = 0$$

- Als Kontrolle der Richtigkeit der einzelnen Werte $\rho^{(1)}, \sigma_X$ und σ_Y kann die Berechnungsgrundlage von $\rho^{(1)}$ aus der Elliptischen Regression heran gezogen werden. So gilt dort:

$$\rho^{(1)} = a \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$$

Damit für den Anstieg a der Hauptachse:

$$a = \rho^{(1)} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

Zu erwarten ist ein Übereinstimmen von a und $a^{(1)}$ beim Linearen Korrelationskoeffizienten mit dem Anstieg aus der Elliptischen Regression und durch die Transformation der Datenwerte x_i und y_i zu $X_i; Y_i$ bei den Korrelationskoeffizienten höherer Grade in den linearen Raum ein $a^{(n>1)} = \pm 1$.

Die einzelnen Werte:

Lineare Regression:

$$a^{(1)} = 0,866 \cdot \frac{262,224}{383,905} = 0,592$$

Quadratische Regression:

$$a^{(2)} = 0,157 \cdot \frac{118,597}{18,658} = 0,998$$

Kubische Regression:

$$a^{(3)} = 0,990 \cdot \frac{736,801}{729,726} = 1,000$$

Biquadratische Regression:

$$a^{(4)} = 0,999 \cdot \frac{2481,229}{2476,103} = 1,000$$

- Für die **Lineare Exzentrizität** ε_L einer Ellipse ist bekannt:

$$\varepsilon_L^2 = \left| e^2 - f^2 \right|$$

Weiterhin ist gegeben:

$$f^2 \equiv \sigma_X^2 = \frac{\left\{ f^2 \right\}}{n} \qquad e^2 \equiv \sigma_Y^2 = \frac{\left\{ e^2 \right\}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$f^2 \cdot n \equiv \sigma_X^2 \cdot n = \left\{ f^2 \right\} \qquad e^2 \cdot n \equiv \sigma_Y^2 \cdot n = \left\{ e^2 \right\}$$

$\Rightarrow$

$$f^2 \equiv \sigma_X^2 \qquad e^2 \equiv \sigma_Y^2$$

$\Rightarrow$

$$\varepsilon_L^2 = \left| \sigma_Y^2 - \sigma_X^2 \right|$$

Für vorhandene Werte gilt:

Grad	ε_L	σ_X^2	σ_Y^2
Linear	280,400	147 383, 000	68 761, 375
Quadratisch	117,120	348,109	14 065, 163
Kubisch	101,858	532 500	542 875
Biquadratisch	316,030	6 131 250	6 031 375

- Für die **numerische Exzentrizität** ε_N gilt analog:

$$\varepsilon_N^2 = \frac{\varepsilon_L^2}{MAX\left(\sigma_X^2; \sigma_Y^2\right)}$$

$\Rightarrow$

Grad	ε_N	σ_X^2	σ_Y^2
Linear	0,730	**147 383, 000**	68 761, 375
Quadratisch	0,988	348,109	**14 065, 163**
Kubisch	0,138	532 500	**542 875**
Biquadratisch	0,128	**6 131 250**	6 031 375

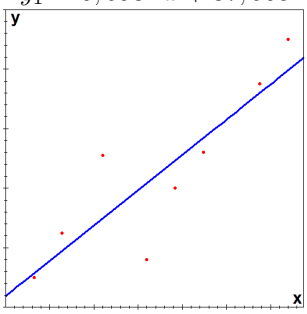
5 Grafische Darstellungen

5.1 Regressionen

Grafisch dargestellt sind in den folgenden Abbildungen die Punktmenge $P(x_i; y_i)$ der Urliste und den dazugehörigen Regressionsgrafen. **Anhang**

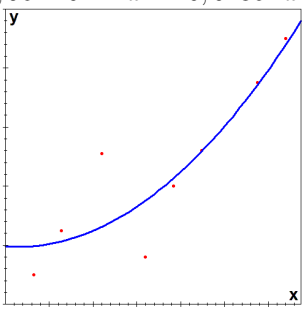
- **Lineare Regression**

$$y_1 = 0,593 \cdot x + 37,508$$



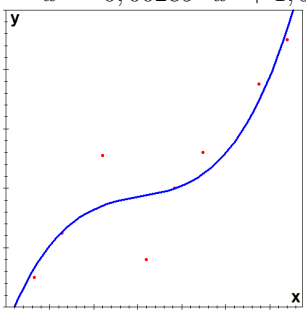
- **Quadratische Regression**

$$y_2 = 454,96 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 - 0,0486 \cdot x + 195,71$$



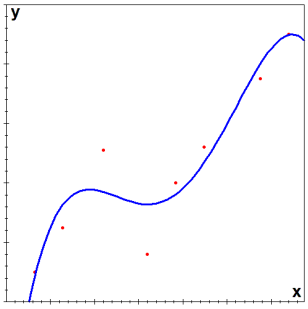
- **Kubische Regression**

$$y_3 = 1,578 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 - 0,00289 \cdot x^2 + 1,901 \cdot x - 70,611$$



- **Biquadratische Regression**

$$y_4 = -5,168 \cdot 10^{-9} \cdot x^4 + 15,930 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 - 0,0161 \cdot x^2 + 6,450 \cdot x - 514,281$$



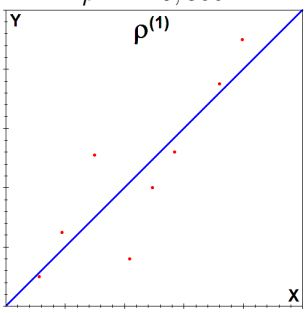
5.2 Korrelationen

Anhang

Grafisch dargestellt sind in den folgenden Abbildungen die Punktmenge $P\left(X_i; Y_i\right)$ und der Funktionsgraf $Y = f\left(X\right) = X$.

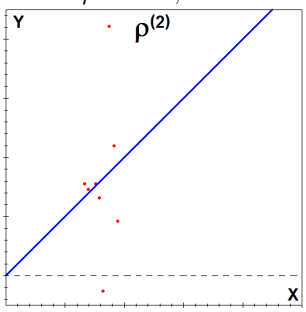
- **Lineare Korrelation**

$\rho^{(1)} = 0,866$



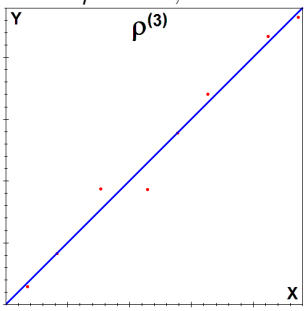
- **Quadratische Korrelation**

$\rho^{(2)} = 0,157$



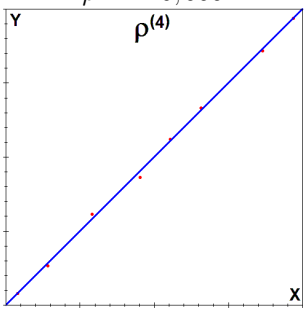
- **Kubische Korrelation**

$\rho^{(3)} = 0,990$



- **Biquadratische Korrelation**

$\rho^{(4)} = 0,999$



LaTeX 2_ε

$$\oiint$$

5.2.2 Kleine Theorie über Interpolationsfehlerpolynome

Kleine Theorie über Interpolationsfehlerpolynome
Allgemeines und Beispiele

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 20. August 2014 – Letzte Revision: 22. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Allgemeines Lösungsverfahren **3**
1.1 Vorbereitende Betrachtungen . . . 3
1.2 Verkürztes Verfahren - Über m ein Minimum ermitteln . . . 4
1.3 Ausführliches Verfahren - Über x_m ein Minimum ermitteln . . . 6
1.4 Vereinfachungen . . . 7

2 Spezielle Lösungsverfahren **9**
2.1 Septisches Fehlerpolynom . . . 9
2.2 Sextisches Fehlerpolynom (Triquadratisches Fehlerpolynom) . . . 10
2.3 Quintisches Fehlerpolynom . . . 11
2.4 Biquadratisches Fehlerpolynom . . . 12
2.5 Kubisches Fehlerpolynom . . . 13
2.6 Quadratisches Fehlerpolynom . . . 14
2.7 Lineares Fehlerpolynom . . . 15
2.8 Sonderfälle $n = 1$ und $n = 2$ . . . 16

3 Beispiel numerisch – quadratisches Fehlerpolynom **17**
3.1 Vollständige Berechnung . . . 17
3.2 Verkürztes Verfahren . . . 18
3.3 Ausführliches Verfahren . . . 19
3.4 Vereinfachungen . . . 20
3.5 Sonderfall $n = 2$ . . . 21

4 Beispiel grafisch **22**
4.1 Septisches Fehlerpolynom . . . 22
4.2 Sextisches Fehlerpolynom (Triquadratisches Fehlerpolynom) . . . 23
4.3 Quintisches Fehlerpolynom . . . 24
4.4 Biquadratisches Fehlerpolynom . . . 25
4.5 Kubisches Fehlerpolynom . . . 26
4.6 Quadratisches Fehlerpolynom . . . 27

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Allgemeines Lösungsverfahren

1.1 Vorbereitende Betrachtungen

Gegeben ist ein Interpolationspolynom nach Verfahren I: [001]ff.

$$P(x)_I = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$$

Gegeben ist ein Interpolationspolynom nach Verfahren II:

$$P(x)_{II} = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \ldots + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + b_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot x^i$$

Beide Polynome sind vom gleichen Grad und wurden mindestens ermittelt über die selben Datenpunkte $P_0 = (x_0, y_0)$ und $P_n = (x_n, y_n)$.

Die Differenz beider Polynome sei das Fehlerpolynom der Interpolation.

$$P(x) = P(x)_I - P(x)_{II}$$

$\Rightarrow$

$$P(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) \cdot x + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1}) \cdot x^{n-1} + (a_n - b_n) \cdot x^n = \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i) \cdot x^i$$

$\Rightarrow$

$$P(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \ldots + c_{n-1} \cdot x^{n-1} + c_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot x^i$$

Mit:

$$c_i = a_i - b_i$$

Angenommen, die Datenpunkte seien nach der Abszisse aufsteigend sortiert, so dass gilt

$$x_0 = MIN(x_i) \qquad x_n = MAX(x_i)$$

dann kann das bestimmte Integral des Fehlerpolynoms ermittelt werden.

$$\tilde{F}(c_i) = \int_{x_0}^{x_n} P(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} \left(\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot x^i \right) dx$$

Von Interesse im weiteren Verlauf ist der Betrag des Fehlerpolynoms.

$$F(c_i) = \int_{x_0}^{x_n} |P(x)| dx = \left| \int_{x_0}^{x_n} \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot x^i dx \right|$$

Damit ist $F(c_i)$ berechnet.

$$\tilde{F}(c_i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x_n^{i+1} - x_0^{i+1}}{i+1} \cdot c_i$$

$\Rightarrow$

$$F(c_i) = \left| \sum_{i=0}^{n} \frac{x_n^{i+1} - x_0^{i+1}}{i+1} \cdot c_i \right|$$

$\Rightarrow$

$$F(c_i) = \mathrm{sgn}\tilde{F}(c_i) \cdot \tilde{F}(c_i)$$

1.2 Verkürztes Verfahren - Über m ein Minimum ermitteln

Ziel ist es, einen Bereich zu finden, wo das Fehlerpolynom minimiert ist. Dafür gibt es global drei Möglichkeiten.

• Optimierung der Koeffizienten c_i. Diese stehen jedoch fest über die einzelnen Interpolationen.

• Die Anzahl der Datenpunkte gegen unendlich gehen lassen. Diese stehen jedoch ebenso im Vornherein fest.

• Den Ausdruck $x_n^{i+1} - x_0^{i+1}$ optimieren.

Dazu muss umgestellt werden:

$$\tilde{F}\left(x_m, m\right) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\left(x_m + m\right)^{i+1} - \left(x_m - m\right)^{i+1}}{i+1} \cdot c_i$$

$\Rightarrow$

$$F\left(x_m, m\right) = \left| \sum_{i=0}^{n} \frac{\left(x_m + m\right)^{i+1} - \left(x_m - m\right)^{i+1}}{i+1} \cdot c_i \right|$$

Mit $m > 0$! Wobei x_m der Mittelpunkt des zukünftigen minimierten Fehlerpolynoms sein soll und m das symmetrische Intervall um x_m.

Zuerst wird das Fehlerpolynom zentriert, bedeutet, es wird ohne Änderung der Allgemeingültigkeit $x_m = 0$ gesetzt.

$$\tilde{F}\left(m\right) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\left(+m\right)^{i+1} - \left(-m\right)^{i+1}}{i+1} \cdot c_i$$

$\Rightarrow$

$$F\left(m\right) = \left| \sum_{i=0}^{n} \frac{\left(+m\right)^{i+1} - \left(-m\right)^{i+1}}{i+1} \cdot c_i \right|$$

Jetzt kann auf Extrema untersucht werden.

$$F'\left(m\right) = \frac{d}{dm} F\left(m\right)$$

$\Rightarrow$

$$F'\left(m\right) = \mathrm{sgn}\tilde{F}\left(x_m\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} \left(+m\right)^i \cdot c_i + \sum_{i=0}^{n} \left(-m\right)^i \cdot c_i \right)$$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{sgn}\tilde{F}\left(x_m\right) \cdot \sum_{i=0}^{n} \left(+m\right)^i \cdot c_i = -\mathrm{sgn}\tilde{F}\left(x_m\right) \cdot \sum_{i=0}^{n} \left(-m\right)^i \cdot c_i$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=0}^{n} \left(+m\right)^i \cdot c_i = -\sum_{i=0}^{n} \left(-m\right)^i \cdot c_i$$

Ist m definiert, befindet sich das Fehlerintegral in einem Extrema. Welcher Art klärt die 2. Ableitung. Gesucht ist ein Minimum, so dass gelten muss:

$$F''\left(m\right) = \frac{d}{dm} F'\left(m\right)$$

$\Rightarrow$

$$F''\left(m\right) = \mathrm{sgn}\tilde{F}\left(x_m\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} i \cdot \left(+m\right)^{i-1} \cdot c_i + \sum_{i=0}^{n} i \cdot \left(-m\right)^{i-1} \cdot c_i \right)$$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{sgn}\tilde{F}\left(x_m\right) \cdot \sum_{i=0}^{n} i \cdot \left(+m\right)^{i-1} \cdot c_i > -\mathrm{sgn}\tilde{F}\left(x_m\right) \cdot \sum_{i=0}^{n} i \cdot \left(-m\right)^{i-1} \cdot c_i$$

Der Wert für $\mathrm{sgn}\tilde{F}\left(x_m\right)$ ist bekannt, da $x_m = 0$ gesetzt wurde. Somit gilt

$$\mathrm{sgn}\tilde{F}\left(x_m\right) = 0$$

und der Nachweis ist vorerst nicht durchführbar. Die Ermittlung von m als ein Extrema (potentielles Minimum) hat jedoch den Vorteil, dass im Ausführlichen Verfahren nur eine Unbekannte in $F(x_m, m) = F(x_m)$ vorkommt.

Der hier ermittelte Wert von m gilt für alle möglichen zukünftigen Extremapunkte von $F(c_i) = \text{sgn}\tilde{F}(c_i) \cdot \tilde{F}(c_i)$. Bedeutet, ist ein x_m bekannt, egal ob Minimum oder Maximum, besitzt es unter anderen, zusätzlichen Intervallwerten $\tilde{m}$ immer den Intervallwert m aus dem Verkürzten Verfahren. Das gilt jedoch nicht, falls $x_m = 0$ im Ausführlichen Verfahren berechnet wird.

Gleichzeitig kann dadurch abgeschätzt werden, dass hochgradige Fehlerpolynome oftmals kein minimiertes Fehlerpolynom generieren können, weil

$$\sum_{i=0}^{n} (+m)^i \cdot c_i = -\sum_{i=0}^{n} (-m)^i \cdot c_i$$

keine reellen Lösungen liefert. Dann muss im Ausführlichen Verfahren mit zwei Unbekannten m und x_m das Minimum berechnet werden, falls eines vorhanden ist.

1.3 Ausführliches Verfahren - Über x_m ein Minimum ermitteln

$$\tilde{F}\left(x_m, m\right) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\left(x_m + m\right)^{i+1} - \left(x_m - m\right)^{i+1}}{i+1} \cdot c_i$$

$\Rightarrow$

$$F\left(x_m, m\right) = \left| \sum_{i=0}^{n} \frac{\left(x_m + m\right)^{i+1} - \left(x_m - m\right)^{i+1}}{i+1} \cdot c_i \right|$$

Es kann auf Extrema untersucht werden. Der Wert m für ein potentielles Minimum ist aus dem Verkürzten Verfahren bekannt, daher gilt $F\left(x_m, m\right) = F\left(x_m\right)$.

$$F'\left(x_m\right) = \frac{d}{dx_m} F\left(x_m\right)$$

$\Rightarrow$

$$F'\left(x_m\right) = \mathrm{sgn}\tilde{F}\left(x_m\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} \left(x_m + m\right)^i \cdot c_i - \sum_{i=0}^{n} \left(x_m - m\right)^i \cdot c_i \right)$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=0}^{n} \left(x_m + m\right)^i \cdot c_i = \sum_{i=0}^{n} \left(x_m - m\right)^i \cdot c_i$$

Ist x_m definiert, befindet sich das Fehlerintegral in einem Extrema. Welcher Art klärt die 2. Ableitung. Gesucht ist ein Minimum, so dass gelten muss:

$$F''\left(x_m\right) = \frac{d}{dx_m} F'\left(x_m\right)$$

$\Rightarrow$

$$F''\left(x_m\right) = \mathrm{sgn}\tilde{F}\left(x_m\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} i \cdot \left(x_m + m\right)^{i-1} \cdot c_i - \sum_{i=0}^{n} i \cdot \left(x_m - m\right)^{i-1} \cdot c_i \right)$$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{sgn}\tilde{F}\left(x_m\right) \cdot \sum_{i=0}^{n} i \cdot \left(x_m + m\right)^{i-1} \cdot c_i > \mathrm{sgn}\tilde{F}\left(x_m\right) \cdot \sum_{i=0}^{n} i \cdot \left(x_m - m\right)^{i-1} \cdot c_i$$

1.4 Vereinfachungen

• Der Ausdruck

$$\sum_{i=0}^{n} (+m)^i \cdot c_i + \sum_{i=0}^{n} (-m)^i \cdot c_i$$

kann vereinfacht werden für **ungerade** Werte von n:

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{(n-1)/2} m^{2 \cdot i} \cdot c_{2 \cdot i}$$

$\Rightarrow$

$$F'(m) = \mathrm{sgn}\tilde{F}(c_i) \cdot 2 \cdot \sum_{i=0}^{(n-1)/2} m^{2 \cdot i} \cdot c_{2 \cdot i} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=0}^{(n-1)/2} m^{2 \cdot i} \cdot c_{2 \cdot i} = 0$$

kann vereinfacht werden für **gerade** Werte von n:

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{n/2} m^{2 \cdot i} \cdot c_{2 \cdot i}$$

$\Rightarrow$

$$F'(m) = \mathrm{sgn}\tilde{F}(c_i) \cdot 2 \cdot \sum_{i=0}^{n/2} m^{2 \cdot i} \cdot c_{2 \cdot i} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=0}^{n/2} m^{2 \cdot i} \cdot c_{2 \cdot i} = 0$$

• Der Ausdruck

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot (+m)^{i-1} \cdot c_i + \sum_{i=0}^{n} i \cdot (-m)^{i-1} \cdot c_i$$

kann vereinfacht werden für **ungerade** Werte von n:

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{(n-1)/2} (2 \cdot i + 1) \cdot m^{2 \cdot i} \cdot c_{2 \cdot i+1}$$

$\Rightarrow$

$$F''(m) = \mathrm{sgn}\tilde{F}(x_m) \cdot 2 \cdot \sum_{i=0}^{(n-1)/2} (2 \cdot i + 1) \cdot m^{2 \cdot i} \cdot c_{2 \cdot i+1} > 0$$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{sgn}\tilde{F}(x_m) \cdot \sum_{i=0}^{(n-1)/2} (2 \cdot i + 1) \cdot m^{2 \cdot i} \cdot c_{2 \cdot i+1} > 0$$

kann vereinfacht werden für **gerade** Werte von n:

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{(n-2)/2} (2 \cdot i + 1) \cdot m^{2 \cdot i} \cdot c_{2 \cdot i+1}$$

$\Rightarrow$

$$F''(m) = \mathrm{sgn}\tilde{F}(x_m) \cdot 2 \cdot \sum_{i=0}^{(n-2)/2} (2 \cdot i + 1) \cdot m^{2 \cdot i} \cdot c_{2 \cdot i+1} > 0$$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{sgn}\tilde{F}(x_m) \cdot \sum_{i=0}^{(n-2)/2} (2 \cdot i + 1) \cdot m^{2 \cdot i} \cdot c_{2 \cdot i+1} > 0$$

- Der Ausdruck

$$\sum_{i=0}^{n} (x_m + m)^i \cdot c_i - \sum_{i=0}^{n} (x_m - m)^i \cdot c_i$$

kann pragmatisch umgestellt werden für alle Werte von n:

$$\sum_{i=0}^{n} \left((x_m + m)^i - (x_m - m)^i \right) \cdot c_i$$

$\Rightarrow$

$$(x_m + m)^n \cdot c_n - (x_m - m)^n \cdot c_n + \sum_{i=0}^{n-1} \left((x_m + m)^i - (x_m - m)^i \right) \cdot c_i$$

Aufbauend auf die bekannten Werte der reduzierten Summe kann das Polynom nächsthöheren Grades berechnet werden.

- Der Ausdruck

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot (x_m + m)^{i-1} \cdot c_i - \sum_{i=0}^{n} i \cdot (x_m - m)^{i-1} \cdot c_i$$

kann pragmatisch umgestellt werden für alle Werte von n:

$$(x_m + m)^{n-1} \cdot n \cdot c_n - (x_m - m)^{n-1} \cdot n \cdot c_n + \sum_{i=0}^{n-1} \left((x_m + m)^{i-1} - (x_m - m)^{i-1} \right) \cdot i \cdot c_i$$

Das Polynom ist die Ableitung des Ausdrucks und kann so ermittelt werden.

$$(x_m + m)^n \cdot c_n - (x_m - m)^n \cdot c_n + \sum_{i=0}^{n-1} \left((x_m + m)^i - (x_m - m)^i \right) \cdot c_i$$

2 Spezielle Lösungsverfahren

2.1 Septisches Fehlerpolynom

$$n = 7$$

Verkürztes Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben mit:

$$c_0 + c_2 \cdot m^2 + c_4 \cdot m^4 + c_6 \cdot m^6 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $m \in R^+ \setminus \{0\}$.

Ausführliches Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben:

$$P_7 = 7 \cdot c_7 \cdot x_m^6 + 35 \cdot c_7 \cdot m^2 \cdot x_m^4 + 21 \cdot c_7 \cdot m^4 \cdot x_m^2 + c_7 \cdot m^6 + P_6 = 0$$

$\Rightarrow$

$$7 \cdot R_7 \cdot x_m^6 + 6 \cdot R_6 \cdot x_m^5 + 5 \cdot R_5 \cdot x_m^4 + 4 \cdot R_4 \cdot x_m^3 + 3 \cdot R_3 \cdot x_m^2 + 2 \cdot R_2 \cdot x_m + R_1 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $x_m \in R$. Die Bedingung für das Vorhandensein eines Minimums ist nachzuweisen unter:

$$\left(21 \cdot R_7 \cdot x_m^5 + 15 \cdot R_6 \cdot x_m^4 + 10 \cdot R_5 \cdot x_m^3 + 6 \cdot R_4 \cdot x_m^2 + 3 \cdot R_3 \cdot x_m + R_2\right) \cdot \mathrm{sgn} F\left(x_m\right) > 0$$

Mit:

$$\begin{aligned}
R_7 &= c_7 \\
R_6 &= c_6 \\
R_5 &= 7 \cdot c_7 \cdot m^2 + c_5 \\
R_4 &= 5 \cdot c_6 \cdot m^2 + c_4 \\
R_3 &= 7 \cdot c_7 \cdot m^4 + \frac{10}{3} \cdot c_5 \cdot m^2 + c_3 \\
R_2 &= 3 \cdot c_6 \cdot m^4 + 2 \cdot c_4 \cdot m^2 + c_2 \\
R_1 &= c_7 \cdot m^6 + c_5 \cdot m^4 + c_3 \cdot m^2 + c_1
\end{aligned}$$

2.2 Sextisches Fehlerpolynom (Triquadratisches Fehlerpolynom)

$$n = 6$$

Verkürztes Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben mit:

$$c_0 + c_2 \cdot m^2 + c_4 \cdot m^4 + c_6 \cdot m^6 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $m \in R^+ \setminus \{0\}$.

Ausführliches Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben:

$$P_6 = 6 \cdot c_6 \cdot x_m^5 + 20 \cdot c_6 \cdot m^2 \cdot x_m^3 + 6 \cdot c_6 \cdot m^4 \cdot x_m + P_5 = 0$$

$\Rightarrow$

$$6 \cdot R_6 \cdot x_m^5 + 5 \cdot R_5 \cdot x_m^4 + 4 \cdot R_4 \cdot x_m^3 + 3 \cdot R_3 \cdot x_m^2 + 2 \cdot R_2 \cdot x_m + R_1 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $x_m \in R$. Die Bedingung für das Vorhandensein eines Minimums ist nachzuweisen unter:

$$\left(15 \cdot R_6 \cdot x_m^4 + 10 \cdot R_5 \cdot x_m^3 + 6 \cdot R_4 \cdot x_m^2 + 3 \cdot R_3 \cdot x_m + R_2\right) \cdot \mathrm{sgn} F\left(x_m\right) > 0$$

Mit:

$$\begin{aligned}
R_6 &= c_6 \\
R_5 &= c_5 \\
R_4 &= 5 \cdot c_6 \cdot m^2 + c_4 \\
R_3 &= \frac{10}{3} \cdot c_5 \cdot m^2 + c_3 \\
R_2 &= 3 \cdot c_6 \cdot m^4 + 2 \cdot c_4 \cdot m^2 + c_2 \\
R_1 &= c_5 \cdot m^4 + c_3 \cdot m^2 + c_1
\end{aligned}$$

2.3 Quintisches Fehlerpolynom

$$n = 5$$

Verkürztes Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben mit:

$$c_0 + c_2 \cdot m^2 + c_4 \cdot m^4 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $m \in R^+ \setminus \{0\}$.

Ausführliches Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben:

$$P_5 = 5 \cdot c_5 \cdot x_m^4 + 10 \cdot c_5 \cdot m^2 \cdot x_m^2 + c_5 \cdot m^4 + P_4 = 0$$

$\Rightarrow$

$$5 \cdot R_5 \cdot x_m^4 + 4 \cdot R_4 \cdot x_m^3 + 3 \cdot R_3 \cdot x_m^2 + 2 \cdot R_2 \cdot x_m + R_1 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $x_M \in R$. Die Bedingung für das Vorhandensein eines Minimums ist nachzuweisen unter:

$$\left(10 \cdot R_5 \cdot x_m^3 + 6 \cdot R_4 \cdot x_m^2 + 3 \cdot R_3 \cdot x_m + R_2\right) \cdot \mathrm{sgn} F\left(x_m\right) > 0$$

Mit:

$$\begin{aligned}
R_5 &= c_5 \\
R_4 &= c_4 \\
R_3 &= \frac{10}{3} \cdot c_5 \cdot m^2 + c_3 \\
R_2 &= 2 \cdot c_4 \cdot m^2 + c_2 \\
R_1 &= c_5 \cdot m^4 + c_3 \cdot m^2 + c_1
\end{aligned}$$

2.4 Biquadratisches Fehlerpolynom

$$n = 4$$

Verkürztes Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben mit:

$$c_0 + c_2 \cdot m^2 + c_4 \cdot m^4 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $m \in R^+ \setminus \{0\}$.

Ausführliches Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben:

$$P_4 = 4 \cdot c_4 \cdot x_m \cdot x_m^2 + 4 \cdot c_4 \cdot m^2 \cdot x_m + P_3 = 0$$

$\Rightarrow$

$$4 \cdot R_4 \cdot x_m^3 + 3 \cdot R_3 \cdot x_m^2 + 2 \cdot R_2 \cdot x_m + R_1 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $x_M \in R$. Die Bedingung für das Vorhandensein eines Minimums ist nachzuweisen unter:

$$\left(6 \cdot R_4 \cdot x_m^2 + 3 \cdot R_3 \cdot x_m + R_2\right) \cdot \mathrm{sgn} F\left(x_m\right) > 0$$

Mit:

$$\begin{aligned} R_4 &= c_4 \\ R_3 &= c_3 \\ R_2 &= 2 \cdot c_4 \cdot m^2 + c_2 \\ R_1 &= c_3 \cdot m^2 + c_1 \end{aligned}$$

2.5 Kubisches Fehlerpolynom

$$n = 3$$

Verkürztes Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben mit:

$$c_0 + c_2 \cdot m^2 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $m \in R^+ \setminus \{0\}$.

Ausführliches Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben:

$$P_3 = 3 \cdot c_3 \cdot x_m^2 + c_3 \cdot m^2 + P_2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$3 \cdot R_3 \cdot x_m^2 + 2 \cdot R_2 \cdot x_m + R_1 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $x_m \in R$. Die Bedingung für das Vorhandensein eines Minimums ist nachzuweisen unter:

$$(3 \cdot R_3 \cdot x_m + R_2) \cdot \text{sgn} F\left(x_m\right) > 0$$

Mit:

$$\begin{aligned} R_3 &= c_3 \\ R_2 &= c_2 \\ R_1 &= c_3 \cdot m^2 + c_1 \end{aligned}$$

2.6 Quadratisches Fehlerpolynom

$$n = 2$$

Verkürztes Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben mit:

$$c_0 + c_2 \cdot m^2 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $m \in R^+ \setminus \{0\}$.

Ausführliches Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben:

$$P_2 = 2 \cdot c_2 \cdot x_m + P_1 = 0$$

$\Rightarrow$

$$2 \cdot R_2 \cdot x_m + R_1 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $x_m \in R$. Die Bedingung für das Vorhandensein eines Minimums ist nachzuweisen unter:

$$R_2 \cdot \text{sgn} F\left(x_m\right) > 0$$

Mit:

$$R_2 = c_2$$
$$R_1 = c_1$$

2.7 Lineares Fehlerpolynom

$$n = 1$$

Verkürztes Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben mit:

$$c_0 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $m \in R^+ \setminus \{0\}$.

Ausführliches Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben:

$$P_1 = c_1 = 0$$

$\Rightarrow$

$$R_1 = 0$$

Keine mögliche Lösungen, unabhängig von $x_m \in R$. Die Bedingung für das Vorhandensein eines Minimums wäre nachzuweisen unter:

$$0 \cdot \text{sgn} F\left(x_m\right) > 0$$

Mit:

$$R_1 = c_1$$

2.8 Sonderfälle $n = 1$ und $n = 2$

Die quadratische und die lineare Interpolation nehmen eine kleine Sonderstellung ein.

Quadratische Interpolation

$$m = \sqrt{-\frac{c_0}{c_2}}$$

Sowie:

$$x_m = -\frac{c_1}{2 \cdot c_2} \qquad \text{mit} \qquad c_2 \cdot \text{sgn} F\left(x_m\right) > 0$$

Lineare Interpolation

$$c_0 = 0$$

Sowie:

$$c_1 = 0 \qquad \text{mit} \qquad 0 \cdot \text{sgn} F\left(x_m\right) > 0$$

Die lineare Interpolation ist unabhängig von m und x_m. Was auch einsichtig ist bei der Bedingung der gleichen zwei genutzten Datenpunkte. Für den Fall der linearen Interpolation wird immer gelten $P\left(x\right)_I = P\left(x\right)_{II}$ und somit $a_i - b_i = 0 \rightarrow c_i = 0 \rightarrow P\left(x\right) = 0 \rightarrow F\left(c_i\right) = 0$. Eine Minimierung des Fehlerpolynoms ist nicht notwendig/möglich.

3 Beispiel numerisch – quadratisches Fehlerpolynom

3.1 Vollständige Berechnung

Datenpunkte:

$$P_0 = (-1; +2) \qquad P_1 = (+1, +1)$$

$\Rightarrow$

$$x_0 = -1 \qquad x_n = +1$$

Die interpolierten Polynome dazu:

$$P(x)_I = +\frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + 0$$

Sowie:

$$P(x)_{II} = -\frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + 2$$

$\Rightarrow$

$$P(x) = +2 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 2$$

Für die Koeffizienten gilt dann:

$$c_2 = +2 \qquad c_1 = 0 \qquad c_0 = -2$$

Das Fehlerpolynom $F(c_i)$ ergibt sich dann zu:

$$\tilde{F}(c_i) = \sum_{i=0}^{2} \frac{x_n^{i+1} - x_0^{i+1}}{i+1} \cdot c_i$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{F}(c_i) = -\frac{8}{3}$$

$\Rightarrow$

$$F(c_i) = +\frac{8}{3}$$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{sgn}\tilde{F}(c_i) = -1$$

3.2 Verkürztes Verfahren

Das Fehlerpolynom $F(m)$ ergibt sich dann zu:

$$\tilde{F}(m) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(+m)^{i+1} - (-m)^{i+1}}{i+1} \cdot c_i$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{F}(m) = \frac{4}{3} \cdot m^3 - 4m$$

$\Rightarrow$

$$F(m) = \frac{4}{3} \cdot m \cdot \left|m^2 - 3\right|$$

Die erste Ableitung Null gesetzt:

$$\sum_{i=0}^{2} (+m)^i \cdot c_i = -\sum_{i=0}^{2} (-m)^i \cdot c_i \qquad \leftrightarrow \qquad F'(m) = \frac{d}{dm} \cdot F(m)$$

$\Rightarrow$

$$m^2 \cdot c_2 + c_0 = -m^2 \cdot c_2 - c_0 \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{4}{3} \cdot \left|m^2 - 3\right| + \operatorname{sgn}\left(m^2 - 3\right) \cdot \frac{8}{3} \cdot m^2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$m = 1 \qquad \leftrightarrow \qquad m = 1$$

Es ist $m > 0$ zu beachten, $m = -1$ fällt weg!

3.3 Ausführliches Verfahren

$$m = 1$$

Das Fehlerpolynom $F(x_m)$ ergibt sich dann zu:

$$\tilde{F}(x_m) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x_m+1)^{i+1} - (x_m-1)^{i+1}}{i+1} \cdot c_i$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{F}(x_m) = 4 \cdot x_m^2 - \frac{8}{3}$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{F}(x_m) = \frac{4}{3} \cdot \left|3 \cdot x_m^2 - 2\right|$$

Die erste Ableitung Null gesetzt:

$$\sum_{i=0}^{2} (x_m+1)^i \cdot c_i = \sum_{i=0}^{2} (x_m-1)^i \cdot c_i \qquad \leftrightarrow \qquad F'(x_m) = \frac{d}{dx_m} \cdot F(x_m)$$

$\Rightarrow$

$$(x_m+1)^2 = (x_m-1)^2 \qquad \leftrightarrow \qquad \text{sgn}\left(3 \cdot x_m^2 - 2\right) \cdot 8 \cdot x_m = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_m = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad x_m = 0$$

Die zweite Ableitung prüft das Extrema:

$$\text{sgn}\tilde{F}(c_i) \cdot \sum_{i=0}^{2} i \cdot (x_m+m)^{i-1} \cdot c_i > \text{sgn}\tilde{F}(c_i) \cdot \sum_{i=0}^{2} i \cdot (x_m-m)^{i-1} \cdot c_i$$

$$\leftrightarrow$$

$$F''(x_m) = \frac{d}{dx_m} \cdot F'(x_m)$$

$\Rightarrow$

$$x_m - m \overset{?}{>} x_m + m \qquad \leftrightarrow \qquad \text{sgn}\left(3 \cdot x_m^2 - 2\right) \cdot 8 \overset{?}{>} 0$$

$\Rightarrow$

$$-1 \overset{!}{<} +1 \qquad \leftrightarrow \qquad -8 \overset{!}{<} 0$$

Über $x_m = 0$ ist das Fehlerpolynom nicht zu minimieren.

Es ist nachzuweisen:

$$F(c_i) = F(m)$$
$$F(c_i) = F(x_m)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{8}{3} = \frac{4}{3} \cdot m \cdot \left|m^2 - 3\right|$$
$$\frac{8}{3} = \frac{4}{3} \cdot \left|3 \cdot x_m^2 - 2\right|$$

Was erfüllt ist.

3.4 Vereinfachungen

Die erste Ableitung ermittelt das Extrema.

$$\sum_{i=0}^{2/2} m^{2\cdot i} \cdot c_{2\cdot i} = m^2 \cdot c_2 + m^0 \cdot c_0 = 0$$

$\Rightarrow$

$$m = 1$$

Die zweite Ableitung definiert die Art des Extrema.

$$\mathrm{sgn}\tilde{F}\left(c_i\right) \cdot \sum_{i=0}^{(2-2)/2} \left(2 \cdot i + 1\right) \cdot m^{2\cdot i} \cdot c_{2\cdot i+1} = c_1 \overset{?}{>} 0$$

$\Rightarrow$

$$0 \overset{!}{=} 0$$

3.5 Sonderfall $n = 2$

Die Ermittlung eines potentiellen Minima kann auch geführt werden über:

$$m = \sqrt{-\frac{c_0}{c_2}}$$

$\Rightarrow$

$$m = 1$$

Die Ermittlung von x_m:

$$x_m = -\frac{c_1}{2 \cdot c_2} \qquad \text{mit} \qquad c_2 \cdot \text{sgn} F\left(x_m\right) \overset{?}{>} 0$$

$\Rightarrow$

$$x_m = 0 \qquad \text{mit} \qquad -2 \overset{!}{<} 0$$

Es liegt kein Minima vor.

4 Beispiel grafisch

4.1 Septisches Fehlerpolynom

$$n = 7$$

$\Rightarrow$

$$P(x)_I = \begin{cases} -\frac{29}{90090} \cdot x^7 + \frac{1013}{51480} \cdot x^6 - \frac{733}{1584} \cdot x^5 + \frac{8132}{1287} \cdot x^4 \\ \\ -\frac{4718419}{102960} \cdot x^3 + \frac{9546707}{51480} \cdot x^2 - \frac{179383}{462} \cdot x + \frac{4294}{13} \end{cases}$$

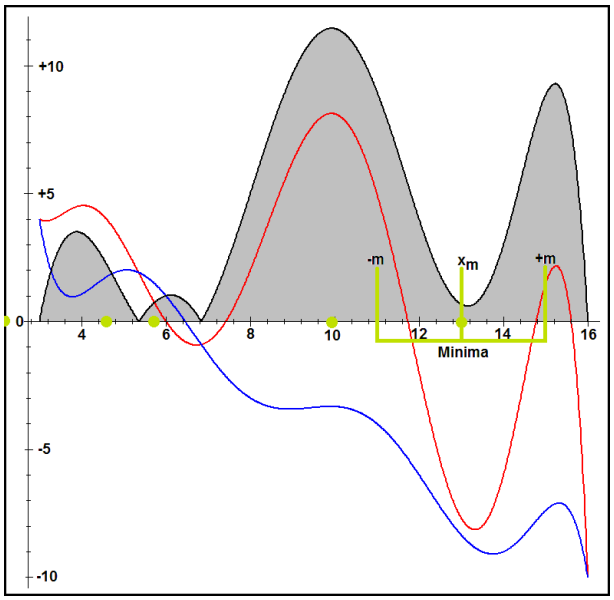
$\Rightarrow$

$$P(x)_{II} = \begin{cases} -\frac{42947}{259459200} \cdot x^7 + \frac{405959}{37065600} \cdot x^6 - \frac{25787}{86400} \cdot x^5 + \frac{32033801}{7413120} \cdot x^4 \\ \\ -\frac{330916621}{9266400} \cdot x^3 + \frac{517474043}{3088800} \cdot x^2 - \frac{57100397}{138600} \cdot x + \frac{80192}{195} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$P(x) = \begin{cases} +\frac{3121}{19958400} \cdot x^7 - \frac{24877}{2851200} \cdot x^6 + \frac{180143}{950400} \cdot x^5 - \frac{1138963}{570240} \cdot x^4 \\ \\ +\frac{7210853}{712800} \cdot x^3 - \frac{4256029}{237600} \cdot x^2 - \frac{3285497}{138600} \cdot x + \frac{1214}{15} \end{cases}$$

$\Rightarrow$



ROT – Interpolationspolynom I,
BLAU – Interpolationspolynom II,
SCHWARZ – Betrag des Fehlerpolynoms,
GRÜN – MIN/MAX des Fehlerpolynoms

$\Rightarrow$

#	x_m	m_0	m_1	m_2	m_3	F''	MAX / MIN
1	+ 00, 21	0	1, 81	-	-	- 175, 52	Maxima
2	+ 04, 75	0	1, 81	6, 49	-	- 008, 04	Maxima
3	+ 05, 87	0	1, 81	7, 58	-	- 005, 97	Maxima
4	+ 09, 90	0	1, 81	2, 21	5, 96	- 010, 40	Maxima
5	+ 13, 01	0	1, 81	1, 96	-	+009, 96	Mimima
6	+ 14, 08	0	1, 81	-	-	- 018, 80	Maxima

4.2 Sextisches Fehlerpolynom (Triquadratisches Fehlerpolynom)

$$n = 6$$

$\Rightarrow$

$$P(x)_I = \begin{cases} +\frac{7}{30888} \cdot x^6 - \frac{2647}{308880} \cdot x^5 + \frac{379}{4290} \cdot x^4 \\ \\ +\frac{66631}{308880} \cdot x^3 - \frac{1268759}{154440} \cdot x^2 + \frac{177103}{4290} \cdot x - \frac{2222}{39} \end{cases}$$

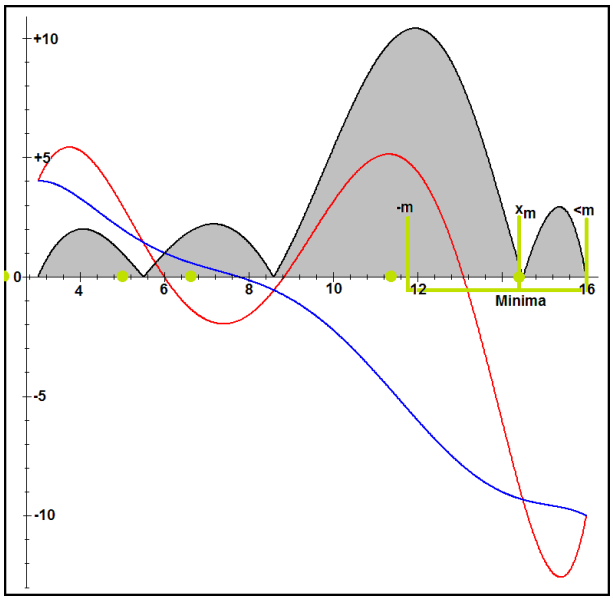
$\Rightarrow$

$$P(x)_{II} = \begin{cases} -\frac{1489}{10810800} \cdot x^6 + \frac{9521}{1201200} \cdot x^5 - \frac{386093}{2162160} \cdot x^4 \\ \\ +\frac{31965}{16016} \cdot x^3 - \frac{62649803}{5405400} \cdot x^2 + \frac{4820033}{150150} \cdot x - \frac{5702}{195} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$P(x) = \begin{cases} -\frac{101}{277200} \cdot x^6 + \frac{6859}{415800} \cdot x^5 - \frac{44393}{166320} \cdot x^4 \\ \\ +\frac{148033}{83160} \cdot x^3 - \frac{701663}{207900} \cdot x^2 - \frac{17674}{1925} \cdot x + \frac{416}{15} \end{cases}$$

$\Rightarrow$



ROT – Interpolationspolynom I,
BLAU – Interpolationspolynom II,
SCHWARZ – Betrag des Fehlerpolynoms,
GRÜN – MIN/MAX des Fehlerpolynoms

$\Rightarrow$

#	x_m	m_0	m_1	m_2	m_3	F''	MAX / MIN
1	+ 00, 12	0	2, 38	-	-	- 47 864	Maxima
2	+ 04, 95	0	2, 38	7,44	-	- 00 005	Maxima
3	+ 06, 76	0	2, 38	9,04	-	- 00 004	Maxima
4	+ 11, 69	0	2, 38	4,05	-	- 00 010	Maxima
5	+ 14, 22	0	2, 38	-	-	+ 00 025	Minima

4.3 Quintisches Fehlerpolynom

$$n = 5$$

$\Rightarrow$

$$P(x)_I = +\frac{6587}{154440} \cdot x^5 - \frac{25381}{118800} \cdot x^4 + \frac{6191959}{1544400} \cdot x^3 - \frac{53455367}{1544400} \cdot x^2 + \frac{11446483}{85800} \cdot x - \frac{34456}{195}$$

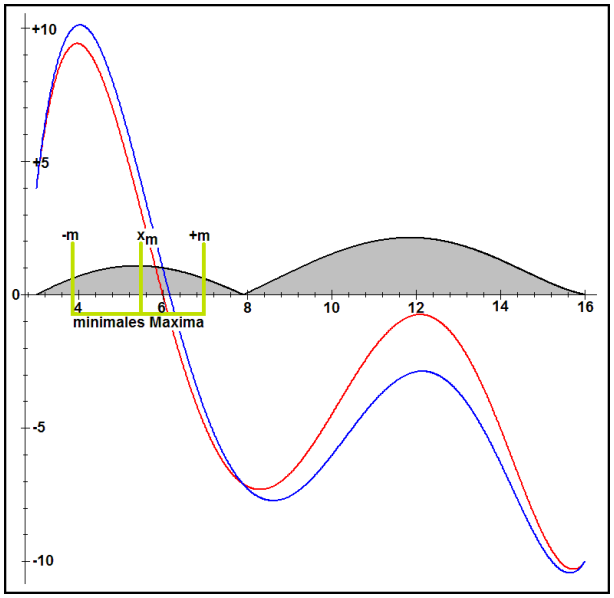
$\Rightarrow$

$$P(x)_{II} = +\frac{4153}{1029600} \cdot x^5 - \frac{16139}{79200} \cdot x^4 + \frac{3984041}{1029600} \cdot x^3 - \frac{34915693}{1029600} \cdot x^2 + \frac{7597817}{57200} \cdot x - \frac{2317}{13}$$

$\Rightarrow$

$$P(x) = -\frac{1}{4320} \cdot x^5 + \frac{469}{47520} \cdot x^4 - \frac{6643}{47520} \cdot x^3 + \frac{33287}{47520} \cdot x^2 - \frac{1531}{2640} \cdot x - \frac{23}{15}$$

$\Rightarrow$



ROT – Interpolationspolynom I,
BLAU – Interpolationspolynom II,
SCHWARZ – Betrag des Fehlerpolynoms,
GRÜN – MIN/MAX des Fehlerpolynoms

$\Rightarrow$

#	x_m	m_0	m_1	m_2	m_3	F''	MAX / MIN
1	+ 00, 74	0	1, 46	-	-	- 2, 69	Maxima
2	+ 05, 40	0	1, 46	4, 83	-	- 1, 09	Maxima
3	+ 11, 83	0	1, 46	3, 43	-	- 1, 05	Maxima
4	+ 16, 14	0	1, 46	-	-	- 2, 40	Maxima

4.4 Biquadratisches Fehlerpolynom

$$n = 4$$

$\Rightarrow$

$$P(x)_I = +\frac{5}{15444} \cdot x^4 - \frac{245}{7722} \cdot x^3 + \frac{14455}{15444} \cdot x^2 - \frac{77383}{7722} \cdot x + \frac{3097}{117}$$

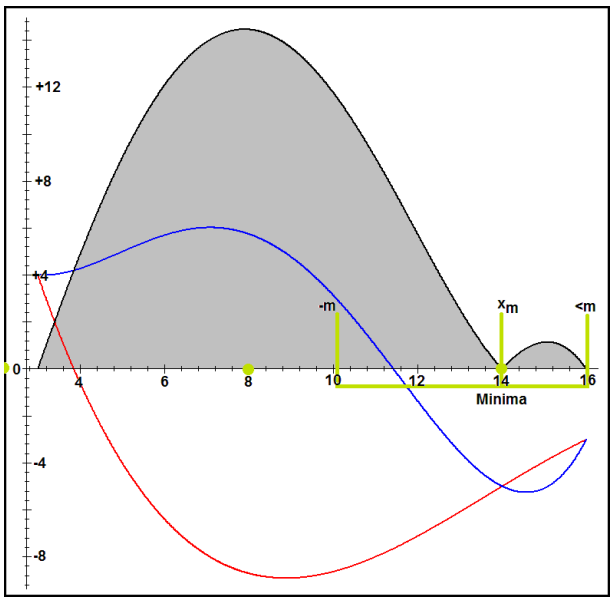
$\Rightarrow$

$$P(x)_{II} = +\frac{1621}{308880} \cdot x^4 - \frac{26779}{154440} \cdot x^3 + \frac{554339}{308880} \cdot x^2 - \frac{95311}{14040} \cdot x + \frac{1459}{117}$$

$\Rightarrow$

$$P(x) = +\frac{13}{2640} \cdot x^4 - \frac{17}{120} \cdot x^3 + \frac{2267}{2640} \cdot x^2 + \frac{4267}{1320} \cdot x - \frac{14}{1}$$

$\Rightarrow$



ROT – Interpolationspolynom I,
BLAU – Interpolationspolynom II,
SCHWARZ – Betrag des Fehlerpolynoms,
GRÜN – MIN/MAX des Fehlerpolynoms

$\Rightarrow$

#	x_m	m_0	m_1	m_2	m_3	F''	MAX / MIN
1	- 00, 49	0	3, 87	-	-	- 18, 98	Maxima
2	+ 08, 10	0	3, 87	-	-	- 07, 71	Maxima
3	+ 13, 98	0	3, 87	-	-	+ 12, 99	Minima

4.5 Kubisches Fehlerpolynom

$$n = 3$$

$\Rightarrow$

$$P(x)_I = +\frac{4}{143} \cdot x^3 - \frac{2279}{2860} \cdot x^2 + \frac{16721}{2860} \cdot x - \frac{463}{65}$$

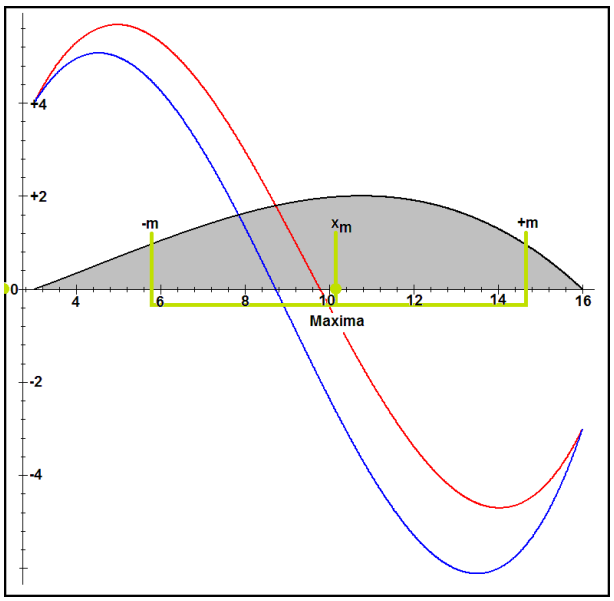
$\Rightarrow$

$$P(x)_{II} = +\frac{133}{4290} \cdot x^3 - \frac{599}{715} \cdot x^2 + \frac{24347}{4290} \cdot x - \frac{411}{65}$$

$\Rightarrow$

$$P(x) = +\frac{1}{330} \cdot x^3 - \frac{9}{220} \cdot x^2 - \frac{113}{660} \cdot x + \frac{4}{5}$$

$\Rightarrow$



ROT – Interpolationspolynom I,
BLAU – Interpolationspolynom II,
SCHWARZ – Betrag des Fehlerpolynoms,
GRÜN – MIN/MAX des Fehlerpolynoms

$\Rightarrow$

#	x_m	m_0	m_1	m_2	m_3	F''	MAX / MIN
1	- 01, 21	0	4, 42	-	-	- 0, 92	Maxima
2	+10, 21	0	4, 42	-	-	- 0, 92	Maxima

4.6 Quadratisches Fehlerpolynom

$$n = 2$$

$\Rightarrow$

$$P(x)_I = -\frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{2}{1}$$

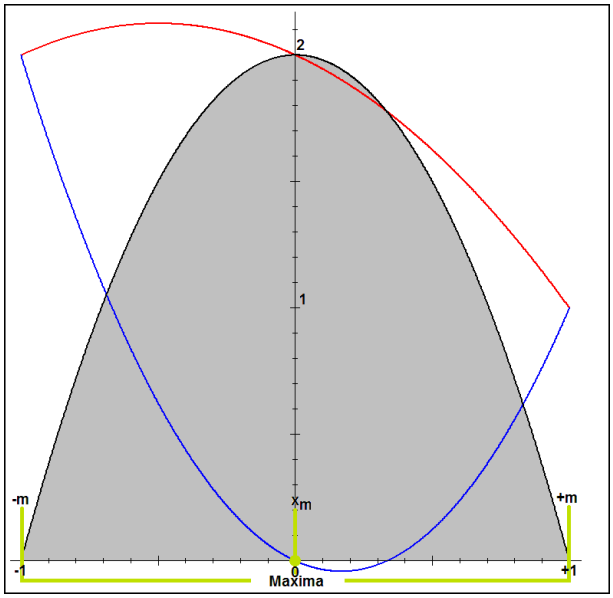
$\Rightarrow$

$$P(x)_{II} = +\frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{0}{2}$$

$\Rightarrow$

$$P(x) = +\frac{2}{1} \cdot x^2 + \frac{0}{1} \cdot x - \frac{2}{1}$$

$\Rightarrow$



ROT – Interpolationspolynom I,
BLAU – Interpolationspolynom II,
SCHWARZ – Betrag des Fehlerpolynoms,
GRÜN – MIN/MAX des Fehlerpolynoms

$\Rightarrow$

#	x_m	m_0	m_1	m_2	m_3	F''	MAX / MIN
1	0	0	1	-	-	- 8	Maxima

LaTeX 2_ε

.

LaTeX 2ε