Aufbau von faserbasierten Interferometern für die Quantenkryptografie

- Gehäuse, Phasenstabilisierung, Fasereinbau -

Masterarbeit
im Studiengang Elektrotechnik und Informationstechnik
Vertiefungsrichtung Photonik

an der

FernUniversität in Hagen

in Kooperation mit der

HUMBOLDT-UNIVERSITÄT · ZU BERLIN ·

vorgelegt von

Björnstjerne Zindler

geboren am 13. November 1966 in Görlitz

eingereicht am 21. November 2011

Erstgutachter: Herr Professor Dr. A. Richter
Zweitgutachter: Herr Professor Dr. O. Benson

Meiner Mutter gewidmet
*03. Juli 1940
+22. September 2010

Berechnung der Faserlängenänderung mehrlagiger Systeme

- Teil 1: Allgemeine Betrachtungen -

- Konditionen:

Ring nach:

Dämpfung einer Faser infolge Normalspannung

- Herleitung von „ΔL“:

Gegeben ist die Dehnung einer Faser „ε“ berechenbar aus der Ausgangslänge „L_0“ und der Längenänderung „ΔL“:

$$\Delta L = \varepsilon \cdot L_0$$

⇒

$$\Delta L \propto L_0$$

Berechnung von „L_0“:

$$L_0 = \pi \cdot (d_0 + d_F)$$

mit: d_0 Durchmesser des Ringes im Ruhezustand
d_F Faserdurchmesser

Berechnung von „ΔL“:

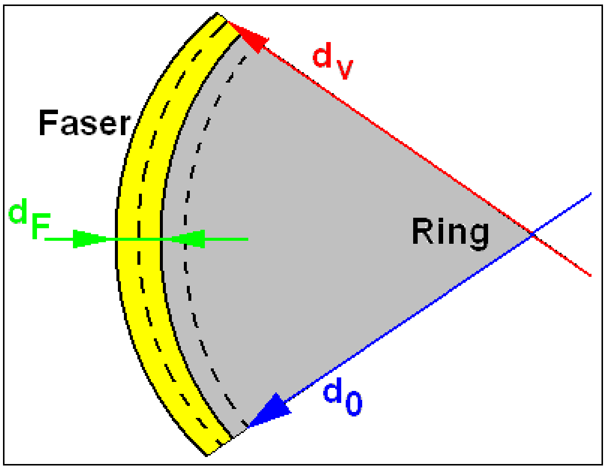
$$L_V = \pi \cdot d_V$$

mit: d_V Durchmesser des Ringes im vergrößerten Zustand + 2x halbe Faser

⇒

$$L_V = \pi \cdot (d_0 + d_e + d_F)$$

mit: d_e Expansionsanteil des Ringes im vergrößerten Zustand



Grafische Darstellung der benutzten Durchmesser.

Damit ist „ΔL“ ermittelt:

$$\Delta L = L_V - L_0$$

⇒

$$\Delta L = \pi \cdot (d_0 + d_e + d_F) - \pi \cdot (d_0 + d_F)$$

⇒

$$\Delta L = N \cdot \pi \cdot d_e$$

mit: N Windungsanzahl

- Anpassung an ein implementiertes Lagensystem:

1. Lage:

$$\Delta L_1 = N_1 \cdot \pi \cdot d_e$$

2. Lage:

$$L_0 = \pi \cdot (d_0 + d_F) \qquad L_{V;2} = \pi \cdot (d_0 + d_e + 3 \cdot d_F)$$

⇒

$$\Delta L_2 = N_2 \cdot \pi \cdot (d_e + 2 \cdot d_F)$$

3. Lage:

$$L_0 = \pi \cdot (d_0 + d_F) \qquad L_{V;3} = \pi \cdot (d_0 + d_e + 5 \cdot d_F)$$

⇒

$$\Delta L_3 = N_3 \cdot \pi \cdot (d_e + 4 \cdot d_F)$$

n- te Lage:

$$L_0 = \pi \cdot (d_0 + d_F) \qquad L_{V;n} = \pi \cdot (d_0 + d_e + (2n-1) \cdot d_F)$$

⇒

$$\Delta L_n = N_n \cdot \pi \cdot (d_e + 2 \cdot (n-1) \cdot d_F)$$

Die Summe aller einzelner „ΔL“ ergibt die gesamte Längenänderung:

$$\sum_{n=1}^{m} \Delta L_m = \pi \cdot \sum_{n=1}^{m} N_n \cdot (d_e + 2 \cdot (n-1) \cdot d_F)$$

Unter der Annahme, dass die Windungsanzahl jeder einzelnen Lage gleich sei, kann weiter vereinfacht werden:

$$N_1 = N_2 = N_3 = \ldots = N_n = N$$

⇒

$$\sum_{n=1}^{m} \Delta L_n = N \cdot \pi \cdot \sum_{n=1}^{m} (d_e + 2 \cdot (n-1) \cdot d_F)$$

In dieser Form kann die rechte Summe aufgelöst werden:

$$\Delta L = N \cdot \pi \cdot D$$

mit: N Gesamtanzahl Wicklungen um den Piezoring
D effektiver Durchmesser des mehrlagigen Systems

$$D = d_e + d_F \cdot (m-1)$$

- Beispiel:

Es soll tabellarisch dargestellt werden, Beispielswerte:

$$N = \frac{100}{\pi} \rightarrow m = 10 \rightarrow N_n = \frac{10}{\pi}$$

Sowie:

$$d_e = 1 \qquad d_F = 1$$

$\Rightarrow$

$$\Delta L = 10 \cdot m^2 \qquad \Delta L_1 = 10 \cdot m$$

$\Rightarrow$

m =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ΔL	10	40	90	160	250	360	490	640	810	1000
ΔL_1	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Legt man 10 Lagen mit je 10 Windungen übereinander, ergibt sich eine 10- fach höhere Längenänderung, als wenn man 100 Windungen nebeneinander wickelt (! bei vorliegenden Beispielswerten !).

- Nachtrag:

Im effektiven Durchmesser „D“ sind zwei Längenänderungen enthalten, der passive (statische) Anteil, infolge der Vergrößerung des Wickeldurchmessers äußerer Lagen um den Ring, sowie der aktive (dynamische) Anteil infolge der Änderung des Ringdurchmessers:

$$D_A = d_e \qquad D_P = d_F \cdot (m-1)$$

Daher, soll der Ring als regelndes Element in z. B. einer Phasenstabilisierung eingesetzt werden und somit nur der aktive (dynamische) Anteil von Interesse ist, ergibt sich für „ΔL“:

$$\boxed{\Delta L_D = N \cdot \pi \cdot D_A}$$

Berechnung der Faserlängenänderung mehrlagiger Systeme

- Teil 2: Unter Beachtung der Querkontraktion -

- Konditionen:

Ring nach:

Dämpfung einer Faser infolge Normalspannung

- Einführung der Querkontraktion:

Gegeben ist die Längenänderung „ΔL" einer Faser um einen Piezoring, gewickelt mehrlagig, gegeben durch:

$$\Delta L = N \cdot \pi \cdot \left(d_e + d_F \cdot (m-1)\right)$$

mit:	N	Gesamtanzahl Wicklungen um den Piezoring
	d_e	Expansionsanteil des Ringdurchmessers
	d_F	Faserdurchmesser
	m	Anzahl Lagen (bei gleicher Anzahl an Wicklungen je Lage !)

Demnach ist „ΔL" im idealen Zustand nur abhängig von „d_e". Alle anderen Werte sind konstant.

$$\Delta L = \Delta L(d_e)$$

Im realen Betrieb kann eine weitere Größe „ΔL" beeinflussen, die Querkontraktion der Faser bei Zug. Wird die Faser einer Normalkraft ausgesetzt, ändert sich auch „d_F":

$$\frac{\Delta L}{L_0} = -\nu \cdot \frac{\Delta d_F}{d_F}$$

mit:	ν	Poissonsche Zahl (Querkontraktionsbeiwert)

$$\Delta L = -\nu \cdot \frac{\Delta d_F}{d_F} \cdot L_0$$

mit:

$$L_0 = N \cdot \pi \cdot (d_0 + d_F)$$

⇒

$$\Delta L = -\nu \cdot \frac{\Delta d_F}{d_F} \cdot N \cdot \pi \cdot (d_0 + d_F)$$

Beide „ΔL" werden gleichgesetzt:

$$N \cdot \pi \cdot \left(d_e + d_F \cdot (m-1)\right) = -\nu \cdot \frac{\Delta d_F}{d_F} \cdot N \cdot \pi \cdot (d_0 + d_F)$$

⇒

$$\Delta d_F = -\frac{d_e + d_F \cdot (m-1)}{d_0 + d_F} \cdot \frac{d_F}{\nu}$$

Für den Fall „$d_0 >> d_F$“ kann vereinfacht werden:

$$\Delta d_F = -\frac{d_e + d_F \cdot (m-1)}{d_0} \cdot \frac{d_F}{\nu}$$

⇒

$$\Delta d_F = -D \cdot \frac{d_F}{\nu \cdot d_0}$$

mit: D effektiver Durchmesser des Piezoringes
$d_F / (\nu \cdot d_0)$ gewichteter Querkontraktionskoeffizient

Der Wert für „Δd“ kann nun in „ΔL“ eingesetzt werden:

$$\Delta L = N \cdot \pi \cdot (d_e + (d_F + \Delta d_F) \cdot (m-1))$$

⇒

$$\Delta L = N \cdot \pi \cdot \left(d_e + \left(d_F - D \cdot \frac{d_F}{\nu \cdot d_0} \right) \cdot (m-1) \right)$$

mit:

$$D = d_e + d_F \cdot (m-1)$$

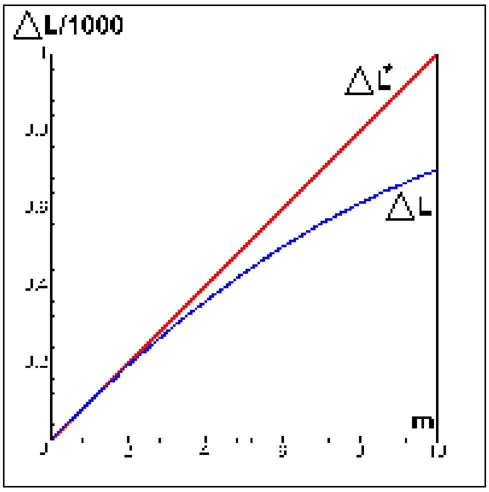
- Beispiel:

Es soll „ΔL“ grafisch dargestellt werden, dazu wird beispielshalber gesetzt:

$$d_e = 1 \quad d_F = 1 \quad d_0 = 100 \quad N = \frac{100}{\pi} \quad \nu = 0{,}3 \qquad \rightarrow \qquad D = m$$

⇒

$$\Delta L \propto 100 \cdot m - \frac{10}{3} \cdot m \cdot (m-1)$$



Auswirkung der Querkontraktion auf die Längenänderung der Faser unter Benutzung eines mehrlagig gewickelten Piezoringes. **Rot** – ohne Beachtung der Querkontraktion, **Blau** – mit Beachtung der Querkontraktion.

Ohne Querkontraktionsanteil war „ΔL“ gegeben mit:

$$\Delta L^* \propto 100 \cdot m$$

- Nachtrag:

Der effektive Durchmesser „D*“:

$$D^* = d_e + \left(d_F - D \cdot \frac{d_F}{\nu \cdot d_0} \right) \cdot (m-1)$$

⇒

$$D^* = d_e \cdot \left(1 - \frac{d_F}{\nu \cdot d_0} \cdot (m-1) \right) + d_F \cdot \left(1 - \frac{d_F}{\nu \cdot d_0} \cdot (m-1) \right) \cdot (m-1)$$

Im effektiven Durchmesser „D*“ sind zwei Längenänderungen enthalten, der passive (statische) Anteil, infolge der Vergrößerung des Wickeldurchmessers äußerer Lagen um den Ring, sowie der aktive (dynamische) Anteil infolge der Änderung des Ringdurchmessers:

$$D_A^* = d_e \cdot Q \qquad D_P^* = d_F \cdot (m-1) \cdot Q$$

Mit:

$$Q = 1 - \frac{d_F}{\nu \cdot d_0} \cdot (m-1)$$

⇒

$$D_A^* = D_A \cdot Q \qquad D_P^* = D_P \cdot Q$$

⇒

$$\boxed{\Delta L_D^* = N \cdot \pi \cdot D_A \cdot Q}$$

Berechnung der Faserlängenänderung mehrlagiger Systeme

- Teil 3: Querkontraktion als wicklungslagenlimitierende Größe -

- Konditionen:

Ring nach:

Dämpfung einer Faser infolge Normalspannung

- Maximale Lagenanzahl:

Ersichtlich ist, dass „Q“ als Repräsentant der Querkontraktion nie kleiner Null aus praktischen Gründen werden kann, damit ist die maximale Anzahl an Lagen definiert:

$$1 \leq 1 - \frac{d_F}{\nu \cdot d_0} \cdot (m-1) > 0$$

$\Rightarrow$

$$1 \leq m < 1 + \frac{\nu \cdot d_0}{d_F}$$

Für das oben angeführte Beispiel ergäbe sich:

$$m < \frac{0{,}3 \cdot 100}{1} + 1$$

$\Rightarrow$

$$m_{MAX} = 30$$

Ein Überschreiten dieser Grenze entspricht dem Verlassen der Berechnungsgrundlage der Querkontraktion, damit dem Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes, Ergebnis wäre ein Faserbruch in der äußersten Faserlage.

Dies ist jedoch ein theoretischer Wert, er betrachtet die Faser als ideal und geht davon aus, dass in der Nähe der Streckgrenze es zu keiner Einschnürung des Fasermaterials kommt. Diese lokale, extreme Querschnittsverkleinerung hätte eine zusätzliche Kerbspannung zur Folge, die oben errechnetes „m_{max}“ erheblich verkleinert. Deshalb ist es besser die maximale Lagenanzahl über ein mögliches „ΔL_{max}“ zu errechnen:

$$\frac{d}{dm}\Delta L = \frac{d}{dm} N \cdot \pi \cdot \left(d_e + d_F \cdot (m-1) - d_e \cdot \frac{d_F}{\nu \cdot d_0} \cdot (m-1) - d_F \cdot \frac{d_F}{\nu \cdot d_0} \cdot (m-1)^2 \right) = 0$$

$\Rightarrow$

$$N \cdot \pi \cdot \left(d_F - d_e \cdot \frac{d_F}{\nu \cdot d_0} - 2 d_F \cdot \frac{d_F}{\nu \cdot d_0} \cdot (m-1) \right) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{m < 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\nu \cdot d_0}{d_F} - \frac{d_e}{d_F} \right)}$$

mit:

$(\nu \cdot d_0) / d_F$ gewichteter Querkontraktionsbeiwert

- Beispiel:

Für das oben angeführte Beispiel ergäbe sich:

$$m < 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{30}{1} - \frac{1}{1} \right)$$

⇒

$$m_{\max} = 15$$

Bei:

$$\Delta L_{\max} = \frac{100}{\pi} \cdot \pi \cdot \left(1 + 1 \cdot (15-1) - 1 \cdot \frac{1}{0{,}3 \cdot 100} \cdot (15-1) - 1 \cdot \frac{1}{0{,}3 \cdot 100} \cdot (15-1)^2 \right)$$

⇒

$$\Delta L_{\max} = 800$$

Ohne Berücksichtigung der Querkontraktion hätte sich ergeben:

$$\Delta L^*_{\max} = \frac{100}{\pi} \cdot \pi \cdot (1 + 1 \cdot (15-1))$$

⇒

$$\Delta L^*_{\max} = 1500$$