

Der Kolbenbolzen und seine Bewegungsrelationen

—

Eine (winzig) kleine Hubkolbenmotorenkunde

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 27. April 2015 – Letzte Revision: 11. Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Modell, Arbeitsgleichung und Relationen	4
2.1	Die Relationen ohne Exzentrizitäten	5
2.1.1	Die Weg- Zeit- Relation - (WZR)	5
2.1.2	Die Geschwindigkeit- Zeit- Relation - (GZR)	7
2.1.3	Die Beschleunigung- Zeit- Relation - (BZR)	9
2.1.4	Die Ruck- Zeit- Relation - (RZR)	11
2.2	Die Relationen mit Exzentrizitäten	13
2.2.1	Die Weg- Zeit- Relation - (WZRe)	13
2.2.2	Die Geschwindigkeit- Zeit- Relation - (GZRe)	14
2.2.3	Die Beschleunigung- Zeit- Relation - (BZRe)	15
2.2.4	Die Ruck- Zeit- Relation - (RZRe)	16
3	Ermittlung der Oszillationen des Kolbenbolzens	17
3.1	Die Oszillationen ohne Exzentrizitäten	18
3.2	Die Oszillationen mit Exzentrizitäten	20
4	Zusammenfassung	22
4.1	Ermittelte Erkenntnisse	22
4.2	Ermittelte Berechnungsgrundlagen	23
4.2.1	Ohne Exzentrizitäten	23
4.2.2	Mit Exzentrizitäten	24
5	Grafische Darstellungen	25
5.0.3	Ohne Exzentrizitäten	25
5.0.4	Mit Exzentrizitäten	29

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

Gewidmet im Allgemeinen

dem ungarischen Lande

Gewidmet im Speziellen

Familie und Frau

Ivánné Sándor Ildikó

und der Gemeinde

Kővágószőlős

Magyarország

Ungarn



1 Einleitung

[001]ff.

In historischen Zeiten, als Automobile fast völlig ohne Elektronik auskamen (vom Radio einmal abgesehen), hat es mich schon immer verwundert, wie es möglich sein kann, dass ein Motor eigentlich so schnell dreht, ohne dass der Kolben von seiner Pleuelstange abreißt. Wird dieser doch in unvorstellbar kurzen Zeiten von Totpunkt zu Totpunkt hin und her gerissen. Mit meinen damals jungen Jahren wusste ich natürlich nicht, dass die Annahme „hin und her gerissen“ schon per se falsch ist. Heute ist mir bekannt, dass er selbstverfreilich eben nicht gerissen, sondern dosiert be- und entschleunigt seine Bahnen zieht, ohne vom Pleuel sich loslösen zu wollen.

Einleitung

Kurze Zeit später mit leichten Kenntnissen von Physik und Mathematik ausgestattet, konnte ich mir auch ein genaueres Bild machen von den Verhältnissen, welche im Innern eines Hubkolbenmotors herrschen. Heute werden diese Verhältnisse zu Papier/PDF gebracht.

Diese Abhandlung beschäftigt sich mit den Relationen von Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Ruck im Verhältnis zur Zeit. Nicht mit der Thermodynamik. Betrachtet wird der Kolbenbolzen, angetrieben durch den daran hängenden Kolben, die Kraft weitergebend an die Kurbelwelle.

Vorliegend ist keine vollständige Hubkolbenmotorenkunde zu erwarten, es war/ist einfach ein Arbeitsblatt für mich, um nachvollziehen zu können, welche Berechnungsgrundlagen den Motor bzw. das Automobil vorantreiben. Jetzt endlich auch als Dokument.

Die Berechnungsgrundlage der hier aufgezeigten zeitabhängigen Relationen ist folgendes Differential:

$$y^{(n)} = \omega^n \cdot \frac{d^n}{dt^n} \cdot y$$

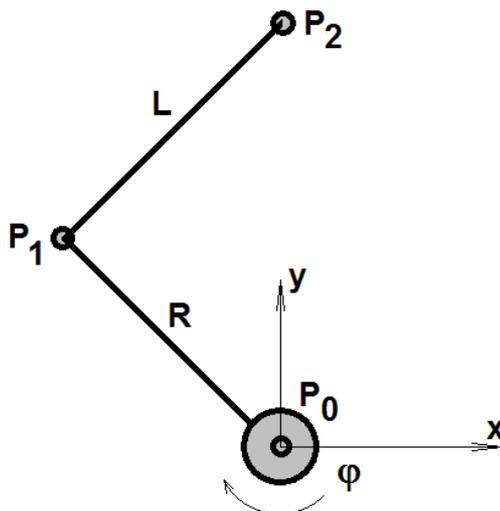
 \Rightarrow

$$y^{(n)} = \left(\frac{d}{dt} \cdot \varphi \right)^n \cdot \frac{d^n}{dt^n} \cdot y$$

Wobei (n) die n -te Ableitung darstellt.

Modell

2 Modell, Arbeitsgleichung und Relationen



Die Kurbelwelle eines Motors vollzieht eine Drehbewegung. Der Winkel des aktuellen Standes sei φ . Für diesen Winkel soll ein Definitionsbereich gelten von:

$$\varphi \geq 0^\circ \equiv 0 [\text{rad}]$$

Die Drehachse der Kurbelwelle sei (vorerst) genau im Koordinatenursprung $P_0(x_0; y_0) \rightarrow x_0 = 0, y_0 = 0$ gelagert.

Die Länge der Kurbelwange sei mit R bezeichnet. Damit ist der Punkt $P_1(x_1; y_1)$ definiert, welcher einen Kreis um P_0 beschreibt. Aus Gründen der gewählten Drehrichtung der Kurbelwelle unterscheidet sich das Vorzeichen der goniometrischen Funktion in y_1 !

$$x_1 = x_0 + R \cdot \cos \varphi \quad y_1 = y_0 - R \cdot \sin \varphi$$

\Rightarrow

$$x_1 = R \cdot \cos \varphi \quad y_1 = -R \cdot \sin \varphi$$

Der Pleuel verbindet die Punkte P_1 und P_2 (Kolbenbolzen) über die Länge L .

$$L = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Wobei aus einsichtigen Gründen¹ der Wert von x_2 gleich dem von $x_0 = 0$ sein muss.

$$L^2 = x_1^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Aus thematischen Gründen ist y_2 von Interesse.

$$y_2 = y_1 \pm \sqrt{L^2 - x_1^2}$$

Beide noch fehlenden Punkte sind bereits definiert und brauchen nur noch eingesetzt werden.

$$y_2 = -R \cdot \sin \varphi \pm \sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

¹Eine Koordinate (hier x) muss fix sein, sonst wäre das Modell unterbestimmt im Koordinatensystem „gelagert“, y stellt dann den Freiheitsgrad des Kolben(bolzen)s dar. Das hindert nicht an der Tatsache einer später betrachteten Exzentrizität.

2.1 Die Relationen **ohne** Exzentrizitäten

Relationen **ohne**

2.1.1 Die Weg- Zeit- Relation - (WZR)

Aus gewählten Gründen, dass der Kolben oberhalb der Kurbelwelle sitzt, ist das Vorzeichen der Wurzel positiv und die Berechnungsgrundlage von y_2 definiert.

$$y_2(\varphi) = \sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2 \varphi} - R \cdot \sin \varphi$$

Für die weiteren Betrachtungen ist die Abhängigkeit von φ nicht allzu günstig. Eine zeitliche Abhängigkeit wird angestrebt. Der Winkel φ kann beschrieben werden über die Drehzahl der Kurbelwelle.

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot t$$

Wobei n die Drehzahl der Kurbelwelle darstellt. Dahingehend ändert sich y_2

$$y_2(t) = \sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)} - R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)$$

Das ist die Weg- Zeit- Relation unseres Hubkolbenmotor für den Kolben(bolzen).

WZR

Eine, mache Fachleute, störende Eigenschaft ist, dass der Graf bei $y_2(0)$ nicht im Koordinatenursprung beginnt und eine Wurzel enthält. Deshalb wird hier informativ so umgestellt, wie ein praxiserfahrener Technologe es mag.

$$y_2(t) = \sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)} - R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)$$

⇒

$$\tilde{y}_2(t) = \sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)} - R \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

⇒

$$\tilde{y}_2(t) = \sqrt{L^2 + R^2 \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)} - R \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)$$

Weiter:

$$\tilde{y}_2(t) = \sqrt{L^2 + R^2 \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)} - R \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)$$

⇒

$$\tilde{y}_2(t) = -\sqrt{L^2 + R^2 \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)} - R \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)$$

Zusätzlich:

$$\tilde{y}_2(t) = R + L - \sqrt{L^2 + R^2 \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)} - R \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)$$

⇒

$$\tilde{y}_2(t) = R \cdot (1 - \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)) + L \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}\right)$$

Eine weitere Eigenschaft dieser technologiefreundlichen Gleichung ist, dass nun das sogenannte „Schubstangenverhältnis“ mit auftritt.

$$\Lambda = \frac{R}{L}$$

Wobei 0,25 für Diesel- und 0,35 für Benzinmotoren gebräuchliche Werte sind.

Ein anderer Vorteil ist, dass man den Wurzelausdruck mittels Taylorisierung eliminieren kann. Für die ersten zwei Glieder gilt:

$$\sqrt{1 - x^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2$$

⇒

$$\tilde{y}_2(t) = R \cdot (1 - \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)) + L \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L^2} \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)$$

⇒

$$\tilde{y}_2(t) = R \cdot \left[1 - \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)\right]$$

\Rightarrow ²

$$\tilde{y}_2(t) = R \cdot \left[1 - \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{L} \cdot \frac{1 - \cos(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{2} \right]$$

\Rightarrow

$$\tilde{y}_2(t) = R \cdot \left[1 - \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \frac{R}{4 \cdot L} \cdot (1 - \cos(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)) \right]$$

WZR

²Es gilt: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2 \cdot x)}{2}$

2.1.2 Die Geschwindigkeit- Zeit- Relation - (GZR)

Die allgemeine Berechnungsgrundlage dieser Relation ist bekannt:

$$\dot{y}_2(t) = \omega \cdot \frac{d}{dt} \cdot y_2(t) = \frac{d}{dt} \cdot \varphi \cdot \frac{d}{dt} \cdot y_2(t)$$

⇒

$$\tilde{y}_2(t) = \frac{d}{dt} \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot t \cdot \frac{d}{dt} \cdot R \cdot \left[1 - \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \frac{R}{4 \cdot L} \cdot (1 - \cos(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)) \right]$$

⇒

$$\tilde{y}_2(t) = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot R \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \frac{R \cdot \pi \cdot n}{L} \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \right)$$

⇒

$$\tilde{y}_2(t) = 4 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot R \cdot \left(\sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \frac{R}{2 \cdot L} \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \right)$$

Mit der exakten Formel ist das selbstverständlich ebenfalls durchführbar. Jedoch ist der dann ermittelte Ausdruck recht komplex. GZR

$$\dot{y}_2(t) = \frac{d}{dt} \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot t \cdot \frac{d}{dt} \cdot \left(\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)} - R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \right)$$

⇒

$$\dot{y}_2(t) = 4 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot R \cdot \left(\frac{R \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}} - \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \right)$$

Als Probe stellen wir den exakten Ausdruck um und verschieben den Anfang wieder in den Koordinatenursprung. WZR

$$\tilde{y}_2(t) = 4 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot R \cdot \begin{cases} + R \cdot \frac{\cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot (t - \frac{1}{4 \cdot n})) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot (t - \frac{1}{4 \cdot n}))}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot (t - \frac{1}{4 \cdot n}))}} \\ - \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot (t - \frac{1}{4 \cdot n})) \end{cases}$$

⇒

$$\tilde{y}_2(t) = 4 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot R \cdot \left(- \frac{R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}} - \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \right)$$

Weiterhin:

$$\tilde{y}_2(t) = 4 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot R \cdot \left(\sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \frac{R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}} \right)$$

⇒

$$\tilde{y}_2(t) = 4 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot R \cdot \left(\sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \frac{R}{L} \cdot \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}} \right)$$

⇒³

$$\tilde{y}_2(t) = 4 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot R \cdot \left(\sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \frac{R}{L} \cdot \frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L^2} \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)} \right)$$

Zusätzlich $\sin x \cdot \cos y = 1/2 \cdot [\sin(x - y) + \sin(x + y)]$:

$$\tilde{y}_2(t) = 4 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot R \cdot \left(\sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \frac{R}{2 \cdot L} \cdot \frac{\sin(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L^2} \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)} \right)$$

³ $\sqrt{1 - x^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2$

Technologen mögen es einfach und sehen sofort, dass der Term

$$1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L^2} \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)$$

nur an den Extrema des Grafen ($\sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \rightarrow 1$) einen Einfluss hat. Mit den praxisnahen Werten des Schubstangenverhältnisses (0,25 ... 0,35) gilt dann:

$$1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L^2} \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \approx 1$$

\Rightarrow

$$\tilde{y}_2(t) = 4 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot R \cdot \left(\sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \frac{R}{2 \cdot L} \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \right)$$

2.1.3 Die Beschleunigung- Zeit- Relation - (BZR)

Die allgemeine Berechnungsgrundlage dieser Relation ist bekannt:

$$\ddot{y}_2(t) = \omega^2 \cdot \frac{d}{dt} \cdot \dot{y}_2(t) = \left(\frac{d}{dt} \cdot \varphi \right)^2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \cdot y_2(t)$$

⇒

$$\tilde{\ddot{y}}_2(t) = \left(\frac{d}{dt} \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot t \right)^2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \cdot R \cdot \left[1 - \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \frac{R}{4 \cdot L} \cdot (1 - \cos(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)) \right]$$

⇒

$$\tilde{\ddot{y}}_2(t) = 16 \cdot \pi^4 \cdot n^4 \cdot R \cdot \left[\cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \frac{R}{L} \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \right]$$

Mit der exakten Formel ist das selbstverständlich ebenfalls durchführbar. Jedoch ist der dann ermittelte Ausdruck recht komplex. BZR

$$\ddot{y}_2(t) = \left(\frac{d}{dt} \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot t \right)^2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \cdot \left(\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)} - R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \right)$$

⇒

$$\ddot{y}_2(t) = 4 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \cdot \left(\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)} - R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \right)$$

⇒

$$\ddot{y}_2(t) = 16 \cdot \pi^4 \cdot n^4 \cdot R \cdot \left\{ \begin{array}{l} + \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ + R \cdot \frac{\cos(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}} \\ - \frac{R^3}{4} \cdot \frac{1 + \cos^2(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}^3} \end{array} \right.$$

Als Probe stellen wir den exakten Ausdruck um und verschieben. BZR

$$\tilde{\ddot{y}}_2(t) = 16 \cdot \pi^4 \cdot n^4 \cdot R \cdot \left\{ \begin{array}{l} + \sin\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot \left(t - \frac{1}{4 \cdot n}\right)\right) \\ + R \cdot \frac{\cos\left(4 \cdot \pi \cdot n \cdot \left(t - \frac{1}{4 \cdot n}\right)\right)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot \left(t - \frac{1}{4 \cdot n}\right)\right)}} \\ - \frac{R^3}{4} \cdot \frac{1 + \cos^2\left(4 \cdot \pi \cdot n \cdot \left(t - \frac{1}{4 \cdot n}\right)\right)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot \left(t - \frac{1}{4 \cdot n}\right)\right)}^3} \end{array} \right.$$

⇒

$$\tilde{\ddot{y}}_2(t) = 16 \cdot \pi^4 \cdot n^4 \cdot R \cdot \left\{ \begin{array}{l} + \sin\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \\ + R \cdot \frac{\cos\left(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t - \pi\right)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)}} \\ - \frac{R^3}{4} \cdot \frac{1 + \cos^2\left(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t - \pi\right)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)}^3} \end{array} \right.$$

⇒

$$\tilde{\ddot{y}}_2(t) = 16 \cdot \pi^4 \cdot n^4 \cdot R \cdot \left\{ \begin{array}{l} - \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ - R \cdot \frac{\cos(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}} \\ - \frac{R^3}{4} \cdot \frac{1 + \cos^2(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}^3} \end{array} \right.$$

Weiterhin:

$$\tilde{y}_2(t) = 16 \cdot \pi^4 \cdot n^4 \cdot R \cdot \begin{cases} + \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ + \frac{R}{L} \cdot \frac{\cos(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}} \\ + \frac{R^3}{4 \cdot L^3} \cdot \frac{1 + \cos^2(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{1 - \frac{R^2}{L^2} \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}^3} \end{cases}$$

\Rightarrow ⁴

$$\tilde{y}_2(t) = 16 \cdot \pi^4 \cdot n^4 \cdot R \cdot \begin{cases} + \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ + \frac{R}{L} \cdot \frac{\cos(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L^2} \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)} \\ + \frac{R^3}{4 \cdot L^3} \cdot \frac{1 + \cos^2(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L^2} \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)\right)^3} \end{cases}$$

Technologen mögen es einfach und sehen sofort, dass der Term

$$1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L^2} \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)$$

nur an den Extrema des Grafen ($\sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \rightarrow 1$) einen Einfluss hat. Mit den praxisnahen Werten des Schubstangenverhältnisses (0,25 ... 0,35) gilt dann:

$$1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L^2} \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \approx 1$$

\Rightarrow

$$\tilde{y}_2(t) = 16 \cdot \pi^4 \cdot n^4 \cdot R \cdot \left(\cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \frac{R}{L} \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \frac{R^3}{4 \cdot L^3} \cdot (1 + \cos^2(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)) \right)$$

Noch eine „kleine“ Vereinfachung. Mit den praxisnahen Werten des Schubstangenverhältnisses (0,25 ... 0,35) gilt auch und letztendlich:

$$\frac{R^3}{4 \cdot L^3} \approx 0$$

\Rightarrow

$$\tilde{y}_2(t) = 16 \cdot \pi^4 \cdot n^4 \cdot R \cdot \left[\cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \frac{R}{L} \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \right]$$

⁴ $\sqrt{1 - x^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2$

2.1.4 Die Ruck- Zeit- Relation - (RZR)

Die allgemeine Berechnungsgrundlage dieser Relation ist bekannt:

$$\ddot{y}_2(t) = \omega^3 \cdot \frac{d}{dt} \cdot \ddot{y}_2(t) = \left(\frac{d}{dt} \cdot \varphi \right)^3 \cdot \frac{d^3}{dt^3} \cdot y_2(t)$$

⇒

$$\tilde{\ddot{y}}_2(t) = \left(\frac{d}{dt} \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot t \right)^3 \cdot \frac{d^3}{dt^3} \cdot R \cdot \left[1 - \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \frac{R}{4 \cdot L} \cdot (1 - \cos(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)) \right]$$

⇒

$$\tilde{\ddot{y}}_2(t) = -64 \cdot \pi^6 \cdot n^6 \cdot R \cdot \left[\sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + 2 \cdot \frac{R}{L} \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \right]$$

Mit der exakten Formel ist das selbstverständlich ebenfalls durchführbar. Jedoch ist der dann ermittelte Ausdruck überaus komplex. RZR

$$\ddot{y}_2(t) = \left(\frac{d}{dt} \cdot 2 \cdot \pi \cdot n \cdot t \right)^3 \cdot \frac{d^3}{dt^3} \cdot \left(\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)} - R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \right)$$

⇒

$$\ddot{y}_2(t) = 8 \cdot \pi^3 \cdot n^3 \cdot \frac{d^3}{dt^3} \cdot \left(\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)} - R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \right)$$

⇒

$$\ddot{y}_2(t) = 64 \cdot \pi^6 \cdot n^6 \cdot R \cdot \left\{ \begin{array}{l} + \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ + \frac{3}{8} \cdot R^5 \cdot \frac{\sin^3(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}^5} \\ - \frac{3}{4} \cdot R^3 \cdot \frac{\sin(8 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}^3} \\ - 2 \cdot R \cdot \frac{\sin(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}} \end{array} \right.$$

Als Probe stellen wir den exakten Ausdruck um und verschieben. RZR

$$\tilde{\ddot{y}}_2(t) = 64 \cdot \pi^6 \cdot n^6 \cdot R \cdot \left\{ \begin{array}{l} + \cos\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot \left(t - \frac{1}{4 \cdot n}\right)\right) \\ + \frac{3}{8} \cdot R^5 \cdot \frac{\sin^3\left(4 \cdot \pi \cdot n \cdot \left(t - \frac{1}{4 \cdot n}\right)\right)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot \left(t - \frac{1}{4 \cdot n}\right)\right)}^5} \\ - \frac{3}{4} \cdot R^3 \cdot \frac{\sin\left(8 \cdot \pi \cdot n \cdot \left(t - \frac{1}{4 \cdot n}\right)\right)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot \left(t - \frac{1}{4 \cdot n}\right)\right)}^3} \\ - 2 \cdot R \cdot \frac{\sin\left(4 \cdot \pi \cdot n \cdot \left(t - \frac{1}{4 \cdot n}\right)\right)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot \left(t - \frac{1}{4 \cdot n}\right)\right)}} \end{array} \right.$$

⇒

$$\tilde{\ddot{y}}_2(t) = 64 \cdot \pi^6 \cdot n^6 \cdot R \cdot \left\{ \begin{array}{l} + \cos\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \\ + \frac{3}{8} \cdot R^5 \cdot \frac{\sin^3\left(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t - \pi\right)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)}^5} \\ - \frac{3}{4} \cdot R^3 \cdot \frac{\sin\left(8 \cdot \pi \cdot n \cdot t - 2 \cdot \pi\right)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)}^3} \\ - 2 \cdot R \cdot \frac{\sin\left(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t - \pi\right)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2\left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)}} \end{array} \right.$$

⇒

$$\tilde{y}_2(t) = 64 \cdot \pi^6 \cdot n^6 \cdot R \cdot \left\{ \begin{array}{l} + \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ - \frac{3}{8} \cdot R^5 \cdot \frac{\sin^3(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}^5} \\ - \frac{3}{4} \cdot R^3 \cdot \frac{\sin(8 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}^3} \\ + 2 \cdot R \cdot \frac{\sin(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}} \end{array} \right.$$

Weiterhin:

$$\tilde{y}_2(t) = 64 \cdot \pi^6 \cdot n^6 \cdot R \cdot \left\{ \begin{array}{l} - \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ + \frac{3}{8} \cdot R^5 \cdot \frac{\sin^3(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}^5} \\ + \frac{3}{4} \cdot R^3 \cdot \frac{\sin(8 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}^3} \\ - 2 \cdot R \cdot \frac{\sin(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}} \end{array} \right.$$

⇒⁵

$$\tilde{y}_2(t) = 64 \cdot \pi^6 \cdot n^6 \cdot R \cdot \left\{ \begin{array}{l} - \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ + \frac{3}{8} \cdot \frac{R^5}{L^5} \cdot \frac{\sin^3(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L^2} \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}^5} \\ + \frac{3}{4} \cdot \frac{R^3}{L^3} \cdot \frac{\sin(8 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L^2} \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}^3} \\ - 2 \cdot \frac{R}{L} \cdot \frac{\sin(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L^2} \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}} \end{array} \right.$$

Technologen mögen es einfach und sehen sofort, dass der Term

$$1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L^2} \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)$$

nur an den Extrema des Grafen ($\sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \rightarrow 1$) einen Einfluss hat. Mit den praxisnahen Werten des Schubstangenverhältnisses (0,25 ... 0,35) gilt dann:

$$1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{L^2} \cdot \sin^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \approx 1$$

⇒

$$\tilde{y}_2(t) = -64 \cdot \pi^6 \cdot n^6 \cdot R \cdot \left\{ \begin{array}{l} + \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) - \frac{3}{8} \cdot \frac{R^5}{L^5} \cdot \sin^3(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ - \frac{3}{4} \cdot \frac{R^3}{L^3} \cdot \sin(8 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + 2 \cdot \frac{R}{L} \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \end{array} \right.$$

Noch eine „kleine“ Vereinfachung. Mit den praxisnahen Werten des Schubstangenverhältnisses (0,25 ... 0,35) gilt auch und letztendlich:

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{R^5}{L^5} \approx 0 \quad \frac{3}{4} \cdot \frac{R^3}{L^3} \approx 0$$

⇒

$$\tilde{y}_2(t) = -64 \cdot \pi^6 \cdot n^6 \cdot R \cdot \left(\sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + 2 \cdot \frac{R}{L} \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \right)$$

⁵ $\sqrt{1-x^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2$

2.2 Die Relationen mit Exzentrizitäten

Relationen mit

Im folgenden wird auf die ausführliche Darstellung der Umstellungsoperationen verzichtet. Im Prinzip sind es die gleichen wie im letzten Abschnitt schon gezeigt.

2.2.1 Die Weg- Zeit- Relation - (WZRe)

Gegeben ist aus den vergangenen Abschnitten die Berechnungsgrundlage für L .

$$L = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Der Kolbenbolzen soll keine Exzentrizität erleiden.⁶ Daher ist $x_2 = 0$.

$$L = \sqrt{x_1^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Aus thematischen Gründen ist y_2 von Interesse.

$$y_2 = y_1 \pm \sqrt{L^2 - x_1^2}$$

Aus gewählten Gründen, dass der Kolben oberhalb der Kurbelwelle sitzt, ist das Vorzeichen der Wurzel positiv und die Berechnungsgrundlage von y_2 definiert.

$$y_2 = y_1 + \sqrt{L^2 - x_1^2}$$

Mit:

$$x_1 = x_0 + R \cdot \cos \varphi \quad y_1 = y_0 - R \cdot \sin \varphi$$

⇒

$$y_2(\varphi) = y_0 - R \cdot \sin \varphi + \sqrt{L^2 - (x_0 + R \cdot \cos \varphi)^2}$$

Mit:

$$\varphi = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot t$$

⇒

$$y_2(t) = y_0 - R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \sqrt{L^2 - (x_0 + R \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t))^2}$$

Es wird wieder in eine technologiefreundliche Form umgestellt.

WZRe

$$\tilde{y}_2(t) = R + L - \left(y_0 - R \cdot \sin \left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t - \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{L^2 - \left(x_0 + R \cdot \cos \left(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t - \frac{\pi}{2} \right) \right)^2} \right)$$

⇒

$$\tilde{y}_2(t) = R - R \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + L - \sqrt{L^2 - (x_0 + R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t))^2} - y_0$$

Der Wurzelausdruck wird mittels Taylorisierung eliminiert.

$$\tilde{y}_2(t) = R - R \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + L - L \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{L^2} \cdot (x_0 + R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t))^2} - y_0$$

⇒⁷

$$\tilde{y}_2(t) = R \cdot (1 - \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)) + \frac{1}{2 \cdot L} \cdot (x_0 + R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t))^2 - y_0$$

Für den Sonderfall der zentrierten Kurbelwelle $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ ergibt sich die bekannte Berechnungsgrundlage aus „Die Relationen ohne Exzentrizitäten“.

WZRe

Abweichungen allein durch y_0 sind relativ uninteressant (es verschiebt sich nur der obere und untere Totpunkt des Kolbens), Abweichungen allein durch x_0 oder zusammen mit y_0 haben Konsequenzen.

⁶Warum das so sein muss, wurde schon im Abschnitt „... ohne Exzentrizitäten“ erläutert. Der Wert von x_0 bezieht sich daher im weiteren Verlauf allein auf eine Außermittigkeit der Kurbelwelle.

⁷ $\sqrt{1 - x^2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2$

2.2.2 Die Geschwindigkeit- Zeit- Relation - (GZRe)

Um diese Relation zu ermitteln wird differenziert nach der Zeit.

$$\tilde{y}_2(t) = \omega \cdot \frac{d}{dt} \cdot \tilde{y}_2(t) = \frac{d}{dt} \cdot \varphi \frac{d}{dt} \cdot \tilde{y}_2(t)$$

⇒

$$\tilde{y}_2(t) = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \frac{d}{dt} \cdot \left(R \cdot (1 - \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)) + \frac{1}{2 \cdot L} \cdot (x_0 + R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t))^2 - y_0 \right)$$

⇒

$$\tilde{y}_2(t) = 4 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot R \cdot \begin{cases} + \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ + \frac{R}{2 \cdot L} \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ + \frac{x_0}{L} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \end{cases}$$

GZRe

2.2.3 Die Beschleunigung- Zeit- Relation - (BZRe)

Um diese Relation zu ermitteln wird differenziert nach der Zeit.

$$\ddot{\tilde{y}}_2(t) = \omega^2 \cdot \frac{d}{dt} \cdot \tilde{y}(t) = \left(\frac{d}{dt} \cdot \varphi \right)^2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \cdot \tilde{y}(t)$$

⇒

$$\ddot{\tilde{y}}_2(t) = 4 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot \frac{d^2}{dt^2} \cdot \left(R \cdot (1 - \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)) + \frac{1}{2 \cdot L} \cdot (x_0 + R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t))^2 - y_0 \right)$$

⇒

$$\ddot{\tilde{y}}_2(t) = 16 \cdot \pi^4 \cdot n^4 \cdot R \cdot \begin{cases} + \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ + \frac{R}{L} \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ - \frac{x_0}{L} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \end{cases}$$

BZRe

2.2.4 Die Ruck- Zeit- Relation - (RZRe)

Um diese Relation zu ermitteln wird differenziert nach der Zeit.

$$\tilde{\ddot{y}}_2(t) = \omega^3 \cdot \frac{d}{dt} \cdot \tilde{y}_2(t) = \left(\frac{d}{dt} \cdot \varphi \right)^3 \cdot \frac{d^3}{dt^3} \cdot \tilde{y}_2(t)$$

⇒

$$\tilde{\ddot{y}}_2(t) = \frac{d^3}{dt^3} \cdot \left(R \cdot (1 - \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)) + \frac{1}{2 \cdot L} \cdot (x_0 + R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t))^2 - y_0 \right)$$

⇒

$$\tilde{\ddot{y}}_2(t) = -64 \cdot \pi^6 \cdot n^6 \cdot R \cdot \begin{cases} + \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ + 2 \cdot \frac{R}{L} \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ + \frac{x_0}{L} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \end{cases}$$

RZRe

3 Ermittlung der Oszillationen des Kolbenbolzens

Kolben(bolzen) und Pleuel führen periodische Hubbewegungen aus. Beide besitzen eine Masse. Somit treten Massekräfte auf, welche aufgrund ihrer Periodizität einen Oszillator darstellen. Die Massenkräfte sind definiert durch:

$$F = m \cdot a$$

Oszillationen

Es sollen nur Proportionalitäten in weiteren Verlauf betrachtet werden, die Masse m wird Eins gesetzt. Die Beschleunigung a ist bekannt.

$$F \propto \ddot{y}_2(t)$$

Über eine Fourier- Entwicklung sollen die Amplituden der Grundfrequenz und deren Harmonischen verglichen werden. Die Fourier- Entwicklung erfolgt mittels eines Computeralgebrasystems⁸. Obwohl dort Routinen zur Berechnung bereits mitgeliefert werden, wurde hier ein eigener Algorithmus geschrieben. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, dass man/frau weiß, was frau/man macht und was zu erwarten ist. Berechnungsgrundlage ist eine periodische Funktion der Form $f(x) = f(x + k \cdot 2\pi)$. Damit ist die Funktion definiert nach Fourier mit:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cdot \cos(i \cdot x) + b_i \cdot \sin(i \cdot x))$$

Wobei die ersten 10 Koeffizienten genügen sollen, welche berechenbar sind durch:⁹

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot dx \quad a_i = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \cos(i \cdot x) \cdot dx$$

Sowie:

$$b_i = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \sin(i \cdot x) \cdot dx$$

Die Amplituden sind damit definiert.

$$A_0 = \sqrt{(a_0)^2} \quad A_i = \sqrt{a_0^2 + b_0^2}$$

Als Bezeichner werden benutzt:

- I** Fourier- Entwicklung über vereinfachtes $\ddot{y}_2(t)$, zentriert $x_0 = 0 \quad y_0 = 0$
- II** Fourier- Entwicklung über vereinfachtes $\ddot{y}_2(t)$, unzentriert $x_0 \neq 0 \quad y_0 \neq 0$
- III** Fourier- Entwicklung über genaues $\ddot{y}_2(t)$, zentriert $x_0 = 0 \quad y_0 = 0$
- IV** Fourier- Entwicklung über genaues $\ddot{y}_2(t)$, unzentriert $x_0 \neq 0 \quad y_0 \neq 0$

Eine globale Übersicht der ermittelten Werte folgend.

Gesamt

Fourier I			Fourier II			Fourier III			Fourier IV		
a ₀ = 0		A ₀ = 0	a ₀ = 0		A ₀ = 0	a ₀ = 0,079		A ₀ = 0,079	a ₀ = 0		A ₀ = 0
a ₁ = 0	b ₁ = 0	A ₁ = 0	a ₁ = 0	b ₁ = 0	A ₁ = 0	a ₁ = 0	b ₁ = 0	A ₁ = 0	a ₁ = 0	b ₁ = 0	A ₁ = 0
a ₂ = -1	b ₂ = 0	A ₂ = 1	a ₂ = -1	b ₂ = 0,25	A ₂ = 1,031	a ₂ = 0	b ₂ = -1	A ₂ = 1	a ₂ = -0,293	b ₂ = -1	A ₂ = 1,042
a ₃ = 0	b ₃ = 0	A ₃ = 0	a ₃ = 0	b ₃ = 0	A ₃ = 0	a ₃ = 0	b ₃ = 0	A ₃ = 0	a ₃ = 0	b ₃ = 0	A ₃ = 0
a ₄ = 0,5	b ₄ = 0	A ₄ = 0,5	a ₄ = -0,5	b ₄ = 0	A ₄ = 0,5	a ₄ = -0,523	b ₄ = 0	A ₄ = 0,523	a ₄ = -0,612	b ₄ = 0	A ₄ = 0,612
a ₅ = 0	b ₅ = 0	A ₅ = 0	a ₅ = 0	b ₅ = 0	A ₅ = 0	a ₅ = 0	b ₅ = 0	A ₅ = 0	a ₅ = 0	b ₅ = 0	A ₅ = 0
a ₆ = 0	b ₆ = 0	A ₆ = 0	a ₆ = 0	b ₆ = 0	A ₆ = 0	a ₆ = 0	b ₆ = 0	A ₆ = 0	a ₆ = -0,117	b ₆ = 0	A ₆ = 0,117
a ₇ = 0	b ₇ = 0	A ₇ = 0	a ₇ = 0	b ₇ = 0	A ₇ = 0	a ₇ = 0	b ₇ = 0	A ₇ = 0	a ₇ = 0	b ₇ = 0	A ₇ = 0
a ₈ = 0	b ₈ = 0	A ₈ = 0	a ₈ = 0	b ₈ = 0	A ₈ = 0	a ₈ = 0,001	b ₈ = 0	A ₈ = 0,001	a ₈ = -0,071	b ₈ = 0	A ₈ = 0,071
a ₉ = 0	b ₉ = 0	A ₉ = 0	a ₉ = 0	b ₉ = 0	A ₉ = 0	a ₉ = 0	b ₉ = 0	A ₉ = 0	a ₉ = 0	b ₉ = 0	A ₉ = 0
a ₁₀ = 0	b ₁₀ = 0	A ₁₀ = 0	a ₁₀ = 0	b ₁₀ = 0	A ₁₀ = 0	a ₁₀ = 0	b ₁₀ = 0	A ₁₀ = 0	a ₁₀ = -0,024	b ₁₀ = 0	A ₁₀ = 0,024

Mit numerisch bedingten Abweichungen war/ist zu rechnen.

⁸Entsprechendes Worksheet unter <http://www.Nadirpoint.de/Dokumentenserver.html#ATM>

⁹Der Buchstabe i bezeichnet hier den Lauffaktor und nicht die imaginäre Zahl i .

Oszillationen ohne

3.1 Die Oszillationen **ohne** Exzentrizitäten

Die schon im Verlauf genutzten Beispielswerte.

$$R = 1 \quad L = 2 \quad n = 100 \quad x_0 = 0 \quad y_0 = 0$$

Praxislösungen:

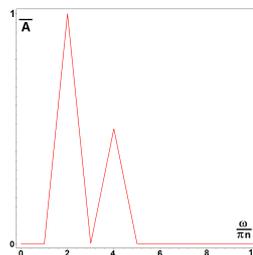
Die Berechnungsgrundlage $\tilde{y}_2(t)$ ist schon im Format von $f(x)$ vorliegend und man kann direkt die Amplituden ablesen.

$$\tilde{y}_2(t) \propto 1 \cdot \cos(200\pi \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \cos(400\pi \cdot t)$$

⇒

Fourier I		
$a_0 = 0$		$A_0 = 0$
$a_1 = 0$	$b_1 = 0$	$A_1 = 0$
$a_2 = 1$	$b_2 = 0$	$A_2 = 1$
$a_3 = 0$	$b_3 = 0$	$A_3 = 0$
$a_4 = 0,5$	$b_4 = 0$	$A_4 = 0,5$
$a_5 = 0$	$b_5 = 0$	$A_5 = 0$
$a_6 = 0$	$b_6 = 0$	$A_6 = 0$
$a_7 = 0$	$b_7 = 0$	$A_7 = 0$
$a_8 = 0$	$b_8 = 0$	$A_8 = 0$
$a_9 = 0$	$b_9 = 0$	$A_9 = 0$
$a_{10} = 0$	$b_{10} = 0$	$A_{10} = 0$

⇒



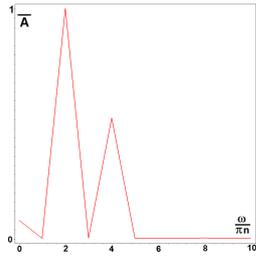
Exakte Lösungen:

$$\tilde{y}_2(t) \propto 1 \cdot \sin(200\pi \cdot t) + 1 \cdot \frac{\cos(400\pi \cdot t)}{\sqrt{4 - 1 \cdot \cos^2(200\pi \cdot t)}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + \cos^2(400\pi \cdot t)}{\sqrt{4 - 1 \cdot \cos^2(200\pi \cdot t)^3}}$$

⇒

Fourier III		
$a_0 = 0,079$		$A_0 = 0,079$
$a_1 = 0$	$b_1 = 0$	$A_1 = 0$
$a_2 = 0$	$b_2 = 1$	$A_2 = 1$
$a_3 = 0$	$b_3 = 0$	$A_3 = 0$
$a_4 = 0,523$	$b_4 = 0$	$A_4 = 0,523$
$a_5 = 0$	$b_5 = 0$	$A_5 = 0$
$a_6 = 0$	$b_6 = 0$	$A_6 = 0$
$a_7 = 0$	$b_7 = 0$	$A_7 = 0$
$a_8 = 0,001$	$b_8 = 0$	$A_8 = 0,001$
$a_9 = 0$	$b_9 = 0$	$A_9 = 0$
$a_{10} = 0$	$b_{10} = 0$	$A_{10} = 0$

⇒



3.2 Die Oszillationen mit Exzentrizitäten

Die schon im Verlauf genutzten Beispielswerte. Zusätzlich die Exzentrizität.

$$R = 1 \quad L = 2 \quad n = 100 \quad x_0 = 0,5 \quad y_0 = 0,2$$

Praxislösungen:

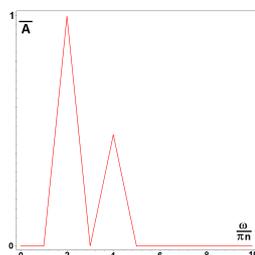
Die Berechnungsgrundlage $\ddot{y}_2(t)$ ist schon im Format von $f(x)$ vorliegend und man kann direkt die Amplituden ablesen.

$$\ddot{y}_2(t) \propto 1 \cdot \cos(200\pi \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \cos(400\pi \cdot t) - \frac{1}{4} \cdot \sin(200\pi \cdot t)$$

⇒

Fourier II		
a ₀ = 0		A ₀ = 0
a ₁ = 0	b ₁ = 0	A ₁ = 0
a ₂ = 1	b ₂ = -0,25	A ₂ = 1,031
a ₃ = 0	b ₃ = 0	A ₃ = 0
a ₄ = 0,5	b ₄ = 0	A ₄ = 0,5
a ₅ = 0	b ₅ = 0	A ₅ = 0
a ₆ = 0	b ₆ = 0	A ₆ = 0
a ₇ = 0	b ₇ = 0	A ₇ = 0
a ₈ = 0	b ₈ = 0	A ₈ = 0
a ₉ = 0	b ₉ = 0	A ₉ = 0
a ₁₀ = 0	b ₁₀ = 0	A ₁₀ = 0

⇒



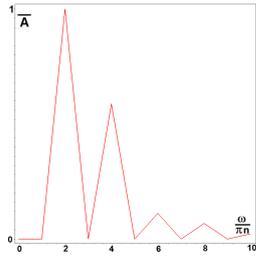
Exakte Lösungen:

$$\ddot{y}_2(t) \propto \frac{d^2}{dt^2} \cdot y_2(t) = \frac{d^2}{dt^2} \cdot \left(0,2 - 1 \cdot \sin(200\pi \cdot t) + \sqrt{4 - (0,5 + 1 \cdot \cos(200\pi \cdot t))^2} \right)$$

⇒

Fourier IV		
a ₀ = 0		A ₀ = 0
a ₁ = 0	b ₁ = 0	A ₁ = 0
a ₂ = 0,293	b ₂ = -1	A ₂ = 1,042
a ₃ = 0	b ₃ = 0	A ₃ = 0
a ₄ = 0,612	b ₄ = 0	A ₄ = 0,612
a ₅ = 0	b ₅ = 0	A ₅ = 0
a ₆ = 0,117	b ₆ = 0	A ₆ = 0,117
a ₇ = 0	b ₇ = 0	A ₇ = 0
a ₈ = 0,071	b ₈ = 0	A ₈ = 0,071
a ₉ = 0	b ₉ = 0	A ₉ = 0
a ₁₀ = 0,024	b ₁₀ = 0	A ₁₀ = 0,024

⇒



4 Zusammenfassung

4.1 Ermittelte Erkenntnisse

Auf den letzten Seiten wurden die

Relationen zwischen der Zeit versus Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Ruck

aufgezeigt und ermittelt. Dabei beachtenswert war der

Fall einer zentrierten und einer unzentrierten Kurbelwelle.

Im zentrierten Fall wurde jeweils eine

vereinfachte¹⁰ und eine exakte Berechnungsgrundlage¹¹

errechnet und deren Übergänge aufgezeigt.

Im weiteren Verlauf werden nochmals die ermittelten Gleichungen zusammengefasst (zur besseren Übersicht und zum Vergleich), sowie grafisch dargestellt mit den schon verwendeten Beispielparametern.

¹⁰technologische Gleichung

¹¹akademische Gleichung

4.2 Ermittelte Berechnungsgrundlagen

Lösungen ohne

4.2.1 Ohne Exzentrizitäten

Exakte Lösungen:

$$y_2(t) = \sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)} - R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)$$

WZR

⇒

$$\dot{y}_2(t) = 4 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot R \cdot \left(\frac{R \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}} - \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \right)$$

GZR

⇒

$$\ddot{y}_2(t) = 16 \cdot \pi^4 \cdot n^4 \cdot R \cdot \begin{cases} + \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ + R \cdot \frac{\cos(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}} \\ - \frac{R^3}{4} \cdot \frac{1 + \cos^2(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}^3} \end{cases}$$

BZR

⇒

$$\ddot{\tilde{y}}_2(t) = -64 \cdot \pi^6 \cdot n^6 \cdot R \cdot \begin{cases} - \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ - \frac{3}{8} \cdot R^5 \cdot \frac{\sin^3(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}^5} \\ + \frac{3}{4} \cdot R^3 \cdot \frac{\sin(8 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}^3} \\ + 2 \cdot R \cdot \frac{\sin(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}{\sqrt{L^2 - R^2 \cdot \cos^2(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)}} \end{cases}$$

RZR

Praxislösungen:

$$\tilde{y}_2(t) = R \cdot \left[1 - \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \frac{R}{4 \cdot L} \cdot (1 - \cos(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t)) \right]$$

WZR

⇒

$$\dot{\tilde{y}}_2(t) = 4 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot R \cdot \left(\sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \frac{R}{2 \cdot L} \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \right)$$

GZR

⇒

$$\ddot{\tilde{y}}_2(t) = 16 \cdot \pi^4 \cdot n^4 \cdot R \cdot \left[\cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \frac{R}{L} \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \right]$$

BZR

⇒

$$\ddot{\tilde{\tilde{y}}}_2(t) = -64 \cdot \pi^6 \cdot n^6 \cdot R \cdot \left[\sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + 2 \cdot \frac{R}{L} \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \right]$$

RZR

Lösungen mit

4.2.2 Mit Exzentrizitäten**Exakte Lösungen:**

$$y_2(t) = y_0 - R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) + \sqrt{L^2 - (x_0 + R \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t))^2}$$

WZRe

Praxislösungen:

$$\tilde{y}_2(t) = R \cdot (1 - \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t)) + \frac{1}{2 \cdot L} \cdot (x_0 + R \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t))^2 - y_0$$

WZRe

 \Rightarrow

$$\tilde{\ddot{y}}_2(t) = 4 \cdot \pi^2 \cdot n^2 \cdot R \cdot \begin{cases} + \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ + \frac{R}{2 \cdot L} \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ + \frac{x_0}{L} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \end{cases}$$

GZRe

 \Rightarrow

$$\tilde{\ddot{\ddot{y}}}_2(t) = 16 \cdot \pi^4 \cdot n^4 \cdot R \cdot \begin{cases} + \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ + \frac{R}{L} \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ - \frac{x_0}{L} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \end{cases}$$

BZRe

 \Rightarrow

$$\tilde{\ddot{\ddot{\ddot{y}}}}_2(t) = -64 \cdot \pi^6 \cdot n^6 \cdot R \cdot \begin{cases} + \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ + 2 \cdot \frac{R}{L} \cdot \sin(4 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \\ + \frac{x_0}{L} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot n \cdot t) \end{cases}$$

RZRe

5 Grafische Darstellungen

5.0.3 Ohne Exzentrizitäten

Grafiken

Mit:

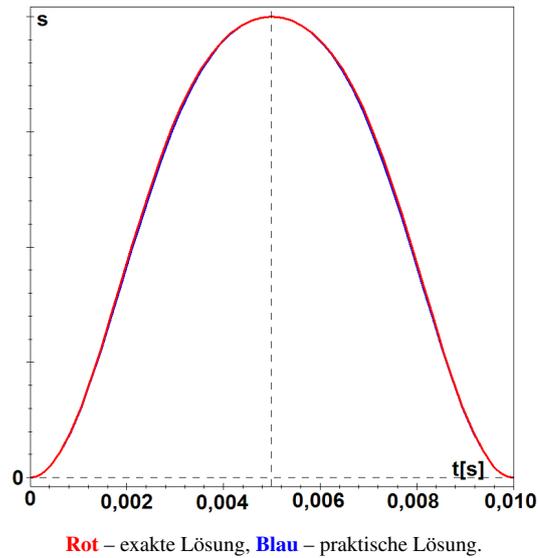
$$R = 1 \quad L = 2 \quad n = 100$$

Anzeigebereich:

$$0 \text{ [ms]} \leq t \leq 10 \text{ [ms]}$$

Weg- Zeit- Relation:

WZR

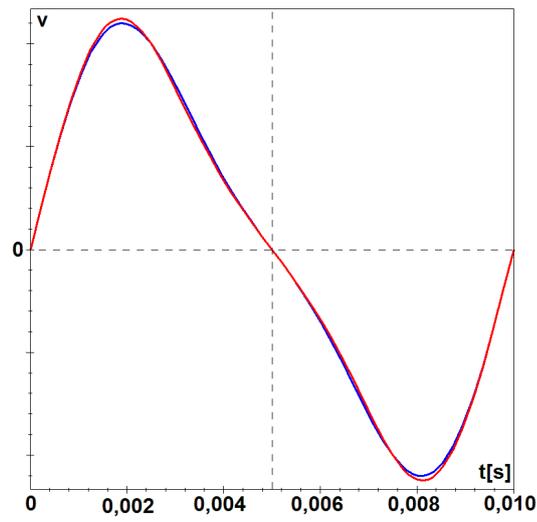


←

$$y_2(t) \propto \sqrt{4 - \cos^2(200\pi \cdot t)} - \sin(200\pi \cdot t)$$

$$\tilde{y}_2(t) \propto 1 - \cos(200\pi \cdot t) + \frac{1}{8} \cdot (1 - \cos(400\pi \cdot t))$$

GZR

Geschwindigkeit- Zeit- Relation:

Rot – exakte Lösung, **Blau** – praktische Lösung.

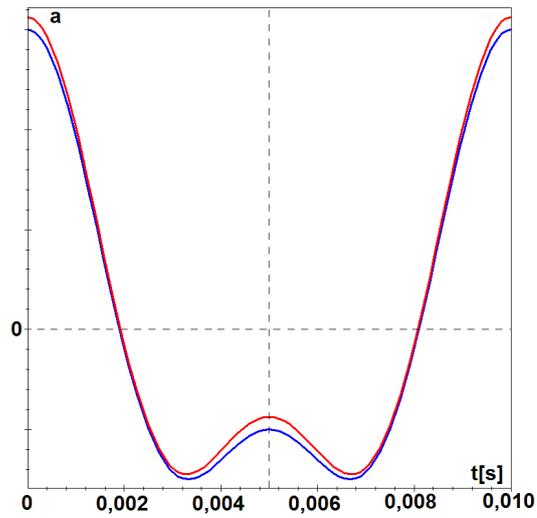
⇐

$$\dot{y}_2(t) \propto \frac{\cos(200\pi \cdot t) \cdot \sin(200\pi \cdot t)}{\sqrt{4 - \cos^2(200\pi \cdot t)}} - \cos(200\pi \cdot t)$$

$$\tilde{y}_2(t) \propto \sin(200\pi \cdot t) + \frac{1}{4} \cdot \sin(400\pi \cdot t)$$

Beschleunigung- Zeit- Relation:

BZR



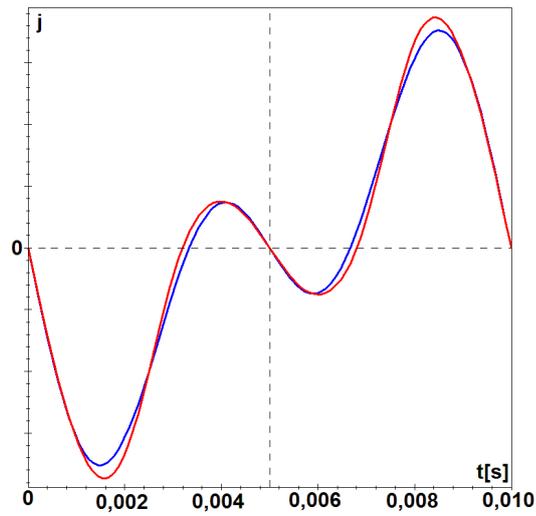
Rot – exakte Lösung, **Blau** – praktische Lösung.

⇐

$$\ddot{y}_2(t) \propto \sin(200\pi \cdot t) + \frac{\cos(400\pi \cdot t)}{\sqrt{4 - \cos^2(200\pi \cdot t)}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + \cos^2(400\pi \cdot t)}{\sqrt{4 - \cos^2(200\pi \cdot t)}^3}$$

$$\tilde{y}_2(t) \propto \cos(200\pi \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \cos(400\pi \cdot t)$$

RZR

Ruck- Zeit- Relation:

Rot – exakte Lösung, **Blau** – praktische Lösung.

⇐

$$\ddot{y}_2(t) \propto \cos(200\pi \cdot t) + \frac{3}{8} \cdot \frac{\sin^3(400\pi \cdot t)}{\sqrt{4 - \cos^2(200\pi \cdot t)}^5} - \frac{3}{4} \cdot \frac{\sin(800\pi \cdot t)}{\sqrt{4 - \cos^2(200\pi \cdot t)}^3} - 2 \cdot \frac{\sin(400\pi \cdot t)}{\sqrt{4 - \cos^2(200\pi \cdot t)}}$$

$$\tilde{\ddot{y}}_2(t) \propto -\sin(200\pi \cdot t) - \sin(400\pi \cdot t)$$

5.0.4 Mit Exzentrizitäten

Mit:

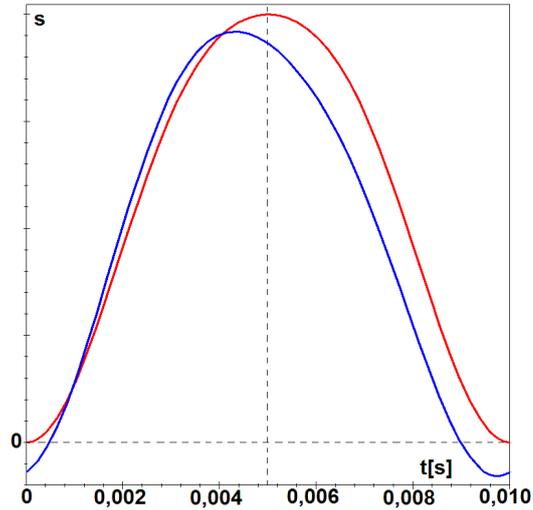
$$R = 1 \quad L = 2 \quad n = 100 \quad x_0 = 0,5 \quad y_0 = 0,2$$

Anzeigebereich:

$$0 \text{ [ms]} \leq t \leq 10 \text{ [ms]}$$

Weg- Zeit- Relation:

WZRe

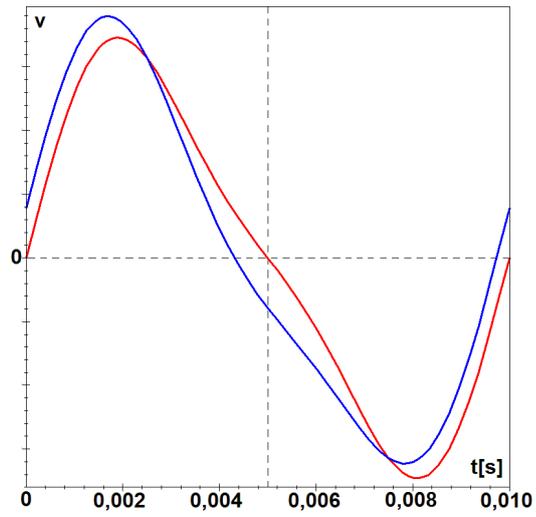


Rot – zentrierte Lösung, Blau – unzentrierte Lösung.

←

$$\tilde{y}_2(t) \propto 1 - \cos(200\pi \cdot t) + \frac{1}{4} \cdot (x_0 + \sin(200\pi \cdot t))^2 - y_0$$

GZRe

Geschwindigkeit- Zeit- Relation:

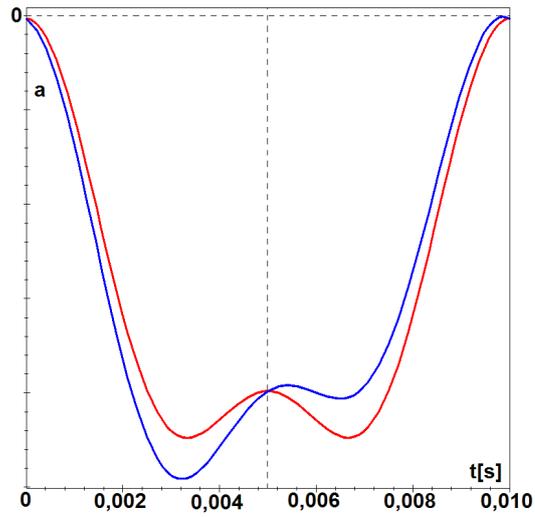
Rot – zentrierte Lösung, **Blau** – unzentrierte Lösung.

←

$$\tilde{y}_2(t) \propto 1 \cdot \begin{cases} + \sin(200\pi \cdot t) \\ + \frac{1}{4} \cdot \sin(400\pi \cdot t) \\ + \frac{x_0}{2} \cdot \cos(200\pi \cdot t) \end{cases}$$

Beschleunigung- Zeit- Relation:

BZRe

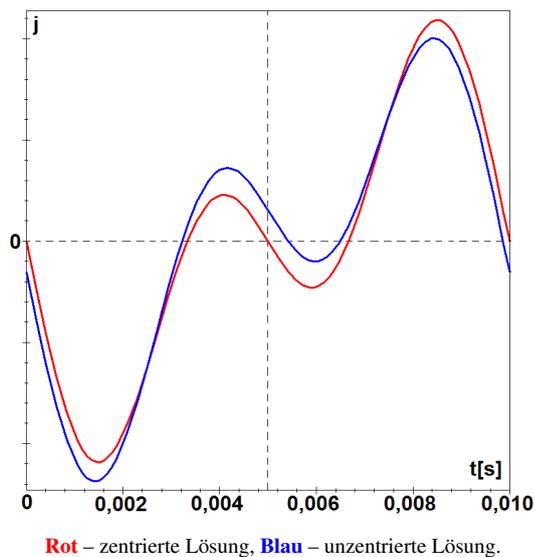


Rot – zentrierte Lösung, **Blau** – unzentrierte Lösung.

⇐

$$\tilde{y}_2(t) \propto 1 \cdot \begin{cases} + \cos(200\pi \cdot t) \\ + \frac{1}{2} \cdot \cos(400\pi \cdot t) \\ - \frac{x_0}{2} \cdot \sin(200\pi \cdot t) \end{cases}$$

RZRe

Ruck- Zeit- Relation:

←

$$\tilde{y}_2(t) \propto -1 \cdot \begin{cases} + \sin(200\pi \cdot t) \\ + \sin(400\pi \cdot t) \\ + \frac{x_0}{2} \cdot \cos(200\pi \cdot t) \end{cases}$$

L^AT_EX 2_ε