

# Die Biegelinie und deren Ableitungen

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

[www.Zenithpoint.de](http://www.Zenithpoint.de)

Erstellt: 28. November 2012 – Letzte Revision: 30. Juli 2024

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
1.1	Ableitungsets . . . . .	3
1.2	Einheiten . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Herleitungen</b>	<b>5</b>
2.1	Biegelinie I . . . . .	5
2.2	Biegelinie II . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Anhang</b>	<b>7</b>
3.1	Maximale Auslenkung . . . . .	7
3.2	Biegelinie III . . . . .	8
3.3	Gleichungsets . . . . .	9
3.4	Beispiel und Darstellung . . . . .	11

---

## Literatur

[Zin24] Björnstjerne Zindler. Die Verformungstheorien I., II. und III. Ordnung, 2024.

---

☞ Das hier vorliegende Arbeitsblatt ist eher eine akademische Betrachtung als ingenieurtechnische Vorgehensweise. Daher wird an verschiedenen Stellen vom gewohnten Wege aus DINs, ISOs und ENs abgewichen. Die Berechnungsgrundlagen vorhandener Regelwerke werden **nicht** hergeleitet. ☞



# 1 Einleitung

## 1.1 Ableitungsets

Als Fortsetzung von „Die Verformungstheorie I., II. und III. Ordnung“ soll im Folgenden ein wenig **Einleitung** auf das Wesen und die Erscheinung der Biegelinie und dessen Ableitungen eingegangen werden. Unabhängig von der Ordnung der Theorie gilt grundsätzlich:

- **0. Ableitung**

*Biegelinie*<sup>1</sup>

$$w = w(x) = {}_{I,II,III}w(x)$$

- **1. Ableitung**

*Neigung der Stabachse*

$$w' = \varphi(x) = {}_{I,II,III}w'(x)$$

- **2. Ableitung**

*Momentenlinie*

$$w'' = -\frac{M(x)}{E \cdot I} = {}_{I,II,III}w''(x)$$

- **3. Ableitung**

*Querkraftlinie*

$$w''' = -\frac{V(x)}{E \cdot I} = {}_{I,II,III}w'''(x)$$

- **4. Ableitung**

*Belastungsfunktion*

$$w'''' = \frac{g(x)}{E \cdot I} = {}_{I,II,III}w''''(x)$$

Aus [Zin24] sind die 0. Ableitungen der Biegelinie für die Ordnungen I. bis III. bekannt, die im weiteren Verlauf ausgewertet werden sollen.

<sup>1</sup>Formelzeichen mit einer Vorfußnote der Form  ${}_{I,II,III}$ • beziehen sich auf die Berechnungsgrundlagen von [Zin24].

## 1.2 Einheiten

### Einheiten

Durch das Differenzieren nach  $\frac{d}{dx}$  ergibt sich folgende Einheitenkette.

$$[w(x)] = \text{mm}^1$$

$\Rightarrow$

$$[w'(x)] = \text{mm}^0$$

$\Rightarrow$

$$[w''(x)] = \text{mm}^{-1}$$

$\Rightarrow$

$$[w'''(x)] = \text{mm}^{-2}$$

$\Rightarrow$

$$[w''''(x)] = \text{mm}^{-3}$$

Die Schnittgrößen und die Belastungsfunktion erhalten damit folgende Einheiten.

$$[M(x)] = [-w''(x) \cdot E \cdot I] = \text{mm}^{-1} \cdot \text{Nmm}^{-2} \cdot \text{mm}^4 = \text{Nmm}$$

Und:

$$[V(x)] = [-w'''(x) \cdot E \cdot I] = \text{mm}^{-2} \cdot \text{Nmm}^{-2} \cdot \text{mm}^4 = \text{N}$$

Sowie:

$$[g(x)] = [w''''(x) \cdot E \cdot I] = \text{mm}^{-3} \cdot \text{Nmm}^{-2} \cdot \text{mm}^4 = \text{Nmm}^{-1}$$

## 2 Herleitungen

[Zin24]

### 2.1 Biegelinie I

Auf die Herleitung wird nicht noch einmal eingegangen, ebenso auf die Bedeutung der Formelzeichen hier im Kontext. Sie ist/sind in oben genannter Abhandlung nachzulesen. Zusammengefasst genannt gilt:

**Biegelinie**

$$Iw(x) = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{F \cdot e}{E \cdot I}$$

⇒

$$IIw(x) = II\chi \cdot \varepsilon \cdot \left( \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{x}{II\chi \cdot \varepsilon} - \tan\left(\frac{e}{II\chi \cdot \varepsilon}\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - 1\right) \right)$$

Mit:

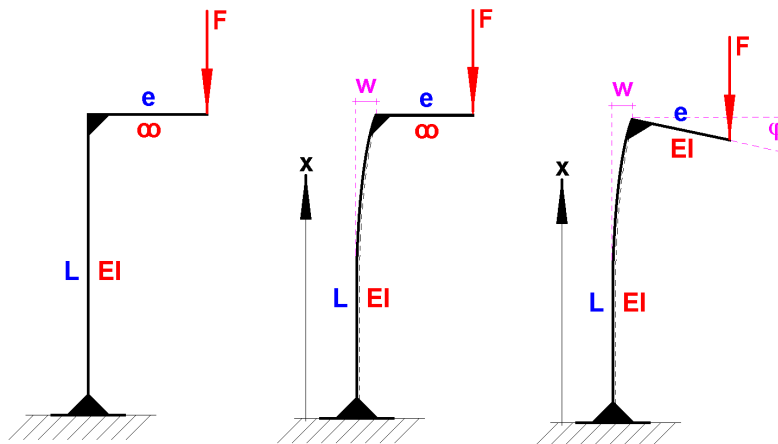
$$II\chi = \sqrt{\frac{e}{e + \omega_0}} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{E \cdot I}{F}}$$

⇒

$$IIIw(x) = III\chi \cdot \varepsilon \cdot \left( \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \frac{x}{III\chi \cdot \varepsilon} - \tan\left(\frac{e}{III\chi \cdot \varepsilon}\right) \cdot \left(\cos\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - 1\right) \right)$$

Mit:<sup>2</sup>

$$III\chi = \sqrt{\frac{e \cdot \cos \varphi}{e \cdot \cos \varphi + \omega_0}} \quad \varphi = \frac{e}{\varepsilon^2} \cdot \frac{2 \cdot L + e}{2} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{E \cdot I}{F}}$$



Das Modell zwecks Berechnung der Schnittgrößen nach Verformungstheorie I., II. und III. Ordnung aus „Die Verformungstheorie I., II. und III. Ordnung“

<sup>2</sup>Beim Übergang von der Theorie II. zu Theorie III. Ordnung wird laut [Zin24] die Exzentrizität  $e$  durch  $e \cdot \cos \varphi$  substituiert. In der Berechnungsgrundlage von  $\varphi$  selbst ist  $e$  ebenfalls enthalten, wurde jedoch dort nicht ersetzt. Der Grund ist der Erhalt der analytischen Berechenbarkeit der Theorie III. Ordnung. Der Einsatz eines  $III\varphi$  hätte eine transzendente Gleichung induziert, welche numerische Methoden erfordert hätte. Hier wurde bewusst aus methodischen Gründen auf die Substitution von  $e$  verzichtet mit all ihren Konsequenzen.

## 2.2 Biegelinie II

### Taylor

Die Taylorisierten Berechnungsgrundlagen für  $w$  bei einem Startwert von  $x = 0$ :

- **Theorie I. Ordnung**

$$Iw(x)_T = \frac{1}{2} \cdot \frac{F \cdot e}{E \cdot I} \cdot x^2$$

- **Theorie II. Ordnung**

$$IIw(x)_T = (II\chi - 1) \cdot x + \frac{II\chi}{2 \cdot \varepsilon} \cdot \tan \frac{e}{II\chi \cdot \varepsilon} \cdot x^2 - \frac{II\chi}{6 \cdot \varepsilon^2} \cdot x^3 - \frac{II\chi}{24 \cdot \varepsilon^3} \cdot \tan \frac{e}{II\chi \cdot \varepsilon} \cdot x^4 + \dots$$

Für ein  $\tan \frac{e}{II\chi \cdot \varepsilon} \approx \frac{e}{II\chi \cdot \varepsilon}$  vereinfacht sich:

$$IIw(x)_T = (II\chi - 1) \cdot x + \frac{e}{2 \cdot \varepsilon^2} \cdot x^2 - \frac{II\chi}{6 \cdot \varepsilon^2} \cdot x^3 - \frac{e}{24 \cdot \varepsilon^4} \cdot x^4 + \dots$$

Für kleine Auslenkungen reichen zwei Glieder

$$IIw(x)_T = (II\chi - 1) \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{F \cdot e}{E \cdot I} \cdot x^2$$

Für ein  $\omega_0 = 0 \rightarrow II\chi = 1$  geht  $IIw(x)_T$  in  $Iw(x)_T$  über.

- **Theorie III. Ordnung**

Erfolgt analog zur Theorie II. Ordnung, da nur  $\chi$  eine erweiterte Berechnung erfährt.

$$IIIw(x)_T = (III\chi - 1) \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \frac{F \cdot e}{E \cdot I} \cdot \cos \varphi \cdot x^2$$

### 3 Anhang

#### 3.1 Maximale Auslenkung

Gegeben sind die Ausdrücke der maximalen Auslenkung  $f_{max}$  aus den Herleitungen:

**Auslenkung**

$$\begin{aligned}
 I f_{max}(L) &= \frac{L^2}{2} \cdot \frac{e}{\varepsilon^2} \\
 II f_{max}(L) &= \frac{L^2}{2} \cdot \frac{e}{\varepsilon^2} + L \cdot \left( \sqrt{\frac{e}{e + \omega_0}} - 1 \right) \\
 III f_{max}(L) &= \frac{L^2}{2} \cdot \frac{e}{\varepsilon^2} \cdot \cos \varphi + L \cdot \left( \sqrt{\frac{e \cdot \cos \varphi}{e \cdot \cos \varphi + \omega_0}} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

Es sei erinnert, dass der Wert  $\omega_0$  die Imperfektion repräsentiert und  $e$  eine geplante Außermitteigkeit der angreifenden Kraft.

Wobei  $I f_{max}(L)$  limitierend wirkt:

$$\frac{L^2}{2} \cdot F \leq L$$

$\Rightarrow$

$$L \leq \frac{2}{F} \quad \Leftrightarrow \quad F \leq \frac{2}{L}$$

Die Wurzelausdrücke von  $II f_{max}(L)$  oder  $III f_{max}(L)$  definieren  $\omega_0$ :

$$\sqrt{\bullet} \geq 1$$

$\Rightarrow$

$$e \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$\left. \begin{array}{l} -e \quad \text{für } II f_{max} \\ -e \cdot \cos \varphi \quad \text{für } III f_{max} \end{array} \right\} < \omega_0 \leq 0$$

Letztendlich muss nun noch gelten:

$$\sqrt{\frac{e}{e + \omega_0}} < \sqrt{\frac{e \cdot \cos \varphi}{e \cdot \cos \varphi + \omega_0}}$$

$\Rightarrow$

$$\cos \varphi \leq 1$$

Was im Rahmen der Konventionen der Theorie III. Ordnung abgedeckt ist.

### 3.2 Biegelinie III

**Biegelinie**

Gegeben sind die polynomisierten Ausdrücke der Biegelinie  $\omega(x)$  aus den Herleitungen:

$$\omega(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0$$

$\Rightarrow$ <sup>3</sup>

$$I\omega(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{\varepsilon^2} \cdot x^2$$

$$II\omega(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{\varepsilon^2} \cdot x^2 + (II\chi - 1) \cdot x$$

$$III\omega(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{\varepsilon^2} \cdot \cos \varphi \cdot x^2 + (III\chi - 1) \cdot x$$

Mit:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{E \cdot I}{F}}$$

Und:

$$II\chi = \sqrt{\frac{e}{e + \omega_0}}$$

Oder:

$$III\chi = \sqrt{\frac{e \cdot \cos \varphi}{e \cdot \cos \varphi + \omega_0}}$$

---

<sup>3</sup>Für kleine tan-Werte gilt:  $\frac{1}{2} \cdot \frac{\chi}{\varepsilon} \cdot \tan \frac{e}{\chi \cdot \varepsilon} \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{\varepsilon^2}$



### 3.3 Gleichungssets

Für das vorliegende, vereinfachte und zugeschnittene Modell kann ein Set an Berechnungsgrundlagen zusammengestellt werden. **Gleichungsset**

- **Konventionen, gewählte**

$e$  = geplante Außermittigkeit

$\omega_0$  = Imperfektion

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{E \cdot I}{F}}$$

- **Randbedingungen**

$$e \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} -e \quad \text{für } II f_{\max} \\ -e \cdot \cos \varphi \quad \text{für } III f_{\max} \end{array} \right\} < \omega_0 \leq 0$$

je nach Theorie  $< \cos \varphi \leq 1$

- **Konventionen, abhängige**

$$II\chi = \sqrt{\frac{e}{e + \omega_0}}$$

$$III\chi = \sqrt{\frac{e \cdot \cos \varphi}{e \cdot \cos \varphi + \omega_0}}$$

- **Biegelinie**

$$I\omega(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{\varepsilon^2} \cdot x^2$$

$$II\omega(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{\varepsilon^2} \cdot x^2 + (II\chi - 1) \cdot x$$

$$III\omega(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{\varepsilon^2} \cdot \cos \varphi \cdot x^2 + (III\chi - 1) \cdot x$$

- **Maximale Auslenkung**

$$I f_{\max}(L) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{\varepsilon^2} \cdot L^2$$

$$II f_{\max}(L) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{\varepsilon^2} \cdot L^2 + (II\chi - 1) \cdot L$$

$$III f_{\max}(L) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{\varepsilon^2} \cdot \cos \varphi \cdot L^2 + (III\chi - 1) \cdot L$$

- **Biegemoment**

$$IM(x) = -e \cdot F$$

$$IIM(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{\varepsilon^2} \cdot F \cdot x^2 + (II\chi - 1) \cdot F \cdot x - (e + \omega_0) \cdot F$$

$$IIIM(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{\varepsilon^2} \cdot \cos \varphi \cdot F \cdot x^2 + (III\chi - 1) \cdot F \cdot x - (e \cdot \cos \varphi + \omega_0) \cdot F$$

- **Konsequenzen**

☞ Aus im Abschnitt 3.1.2 aufgezeigten Gründen, ist die Bedingung der Biegelinie  $I\omega'(0) = 0$  im vorliegenden Set **erfüllt**.

☞ Aus im Abschnitt 3.2.2 aufgezeigten Gründen, ist die Bedingung der Biegelinie  $II\omega'(0) \neq 0$  im vorliegenden Set **nicht erfüllt**.

☞ Aus im Abschnitt 3.3.1 aufgezeigten Gründen, ist die Bedingung der Biegelinie  $III\omega'(0) \neq 0$  im vorliegenden Set **nicht erfüllt**.

☞ Dadurch unberücksichtigt ist die Konstanz der Bogenlänge  $\int_0^{f_{\max}} \sqrt{1 + (\bullet\omega'(x))^2} dx = L$  für die Theorie II. und III. Ordnung.

### 3.4 Beispiel und Darstellung

Angenommen, für einen Druckstab gelte  $e = 1$ ,  $\omega = -0,5$  und der Winkel  $\varphi$  nur kleine Werte **Beispiel** annimmt  $\cos \varphi \rightarrow 1$ , ergeben sich weitere Vereinfachungen:

$$II\chi = \sqrt{2} \quad III\chi = \sqrt{\frac{\varphi}{\varphi - 0,5}}$$

Weiterhin gelte die Proportionalität  $\varepsilon \propto \sqrt{\frac{1}{F}}$  dann:

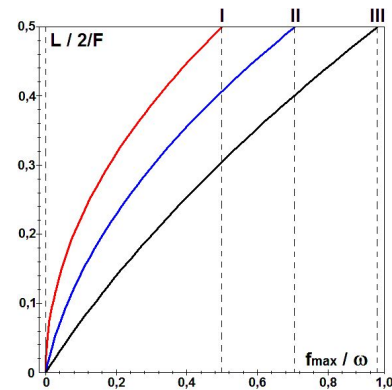
$$\frac{1}{\varepsilon^2} = F \quad \frac{e}{\varepsilon^2} = F$$

Damit lässt sich innerhalb der erläuterten Beschränkungen eine qualitative Darstellung des Gleichungssets erstellen.

- **Auslenkung**

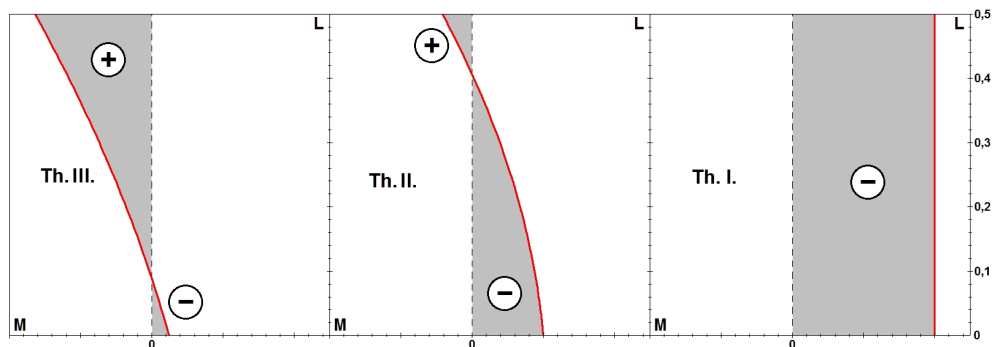
$$I f_{max}(L) = 0,50 \quad II f_{max}(L) = 0,71 \quad III f_{max}(L) = 0,94$$

⇒



Entwicklung des Werts  $f_{max}$  in Abhängigkeit von  $F$  für die Theorie I. bis III. Ordnung.

- **Moment**



Entwicklung des Momentenvorzeichens in Abhängigkeit von  $F$  für die Theorie I. bis III. Ordnung für eine betrachtete Stelle.

LaTeX 2<sub>ε</sub>