Wir basteln uns einen Donner

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 15. Juni 2016 – Letzte Revision: 11. September 2020

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

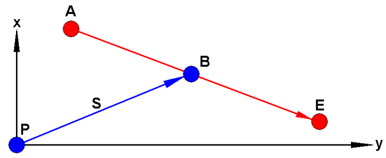
1 Allgemeines

Was ein Blitz ist, wissen die meisten Menschen. Spätestens in der heißen Jahreszeit werden wir wieder daran erinnert. Die Begleiterscheinung der Donner, welcher für einige Menschen bedrohlicher erscheint als der Blitz selbst, ist in seiner Erklärung so bunt wie die Menschheit. Hier wird nicht die [001]ff.
Fragestellung sein, warum der Donner (der ursprünglich ein Knall ist) zum Donner wird auf seinem Wege an das Ohr des Beobachters. Nein, hier geht es darum, eine einfache, mathematische Grundlage zu schaffen, um einen Donner definieren zu können (wobei es einen "Deutschen Normblitz" schon gibt, also mit Sicherheit auch einen "Deutschen Normdonner").

2 Grundlagen

2.1 Die Entfernung $S\left(x\right)$ eines Blitzes

Mit dem Standort einer Person im Ursprung des Koordinatensystems $P\left(0;0\right)$, dem Blitzanfangspunkt $A\left(x_A;y_A\right)$, dem Blitzendpunkt $E\left(x_E;y_E\right)$ und dem Bezugspunkt $B\left(x;y\right)$, welcher auf der Blitzfunktion liegt.



⇒

$$S\left(x\right)=\sqrt{x^2+y^2}$$

⇒

$$S\left(x\right)=\sqrt{x^2+F_B\left(x\right)^2}$$

Wobei $F_B\left(x\right)$ die Blitzfunktion darstellt.

2.2 Die Blitzfunktion $F_B\left(x\right)$

Eine lineare Funktion soll für die Blitzfunktion genüge tun (hier wird schließlich nur das Prinzip erläutert), dann gilt:

$$F_B\left(x\right) = \frac{y_A - y_E}{x_A - x_E} \cdot x - \frac{y_A - y_E}{x_A - x_E} \cdot x_A + y_A$$

2.3 Die Blitzfunktion $F_B(n)$

Für den weiteren Verlauf ist es günstig den gesuchten Wert S unabhängig von x zu machen, da festgelegt ist:

$$x_A \leq x \leq x_E$$

Daher wird definiert:

$$\Delta x = x_E - x_A$$

$\Rightarrow$

$$\Delta x^{(n)} = \frac{x_E - x_A}{n_{MAX}} = \frac{\Delta x}{n_{MAX}}$$

$\Rightarrow$

$$x = x_A + \Delta x^{(n)} \cdot n$$

Mit $0 \leq n \leq n_{MAX}$ ergibt sich dann für $F_B(n)$:

$$F_B(n) = \frac{y_A - y_E}{x_A - x_E} \cdot \left(x_A + \Delta x^{(n)} \cdot n\right) - \frac{y_A - y_E}{x_A - x_E} \cdot x_A + y_A$$

$\Rightarrow$

$$F_B(n) = \frac{y_A - y_E}{x_A - x_E} \cdot \Delta x^{(n)} \cdot n + y_A$$

2.4 Die Entfernung $S(n)$ eines Blitzes

Durch Substituieren schnell errechnet:

$$S(x) = \sqrt{x^2 + F_B(x)^2}$$

$\Rightarrow$

$$S(n) = \sqrt{\left(x_A + \Delta x^{(n)} \cdot n\right)^2 + F_B(n)^2}$$

2.5 Der kleinste Weg $S\left(n\right)_{MIN}$ zum Betrachter

Das Minimum von $S\left(n\right)$ wird mittels Differenzierung ermittelt.

$$S\left(n\right)' = \left(\sqrt{\left(x_A + \Delta x^{(n)} \cdot n\right)^2 + F_B\left(n\right)^2}\right)' = 0$$

Der Weg $S\left(n\right)$ ist dann minimal, wenn gilt:

$$n_{MIN} = \frac{x_A \cdot \left(x_E - x_A\right) + y_A \cdot \left(y_E - y_A\right)}{\left(x_E - x_A\right)^2 + \left(y_E - y_A\right)^2} \cdot \frac{x_A - x_E}{\Delta x^{(n)}}$$

Das damit errechnete n_{MIN}, eingesetzt in $S\left(n\right)$ ergibt den Wert für $S\left(n\right)_{MIN}$.

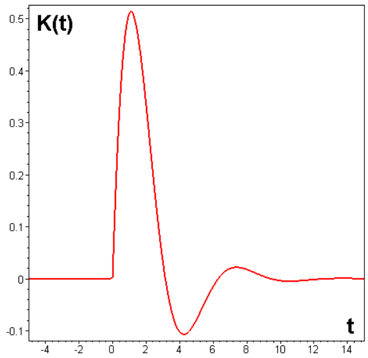
2.6 Die Knallfunktion $K(t)$

Was ein Knall ist und wie man diesen funktional beschreiben kann, ist in vielerlei Literatur nachlesbar. Hier wird mit einer sehr einfachen Knallfunktion vorlieb genommen.

$$K(t) = H(t) \cdot \sin(t) \cdot e^{-\frac{t}{2}}$$

Die Heavisidefunktion $H(t)$ ermöglicht es, den Einsatzzeitpunkt des Knalles festzulegen, $\sin(t)$ als harmonische Funktion ist der eigentliche Kern der Knallfunktion und $e^{-\frac{t}{2}}$ wird gebraucht, um ein kurzes Fronting und langes Tailing zu ermöglichen, kurz das, was einen typischen Knall ausmacht.

Grafisch dargestellt.



2.7 Die Donnerfunktion $D(t)$

Ein Donner ist nichts weiter (unter anderen) als eine Summe von Knallfunktionen die durch unterschiedliche Laufzeiten zeitlich auseinander gezogen werden. Daher ist $D(t)$ modellierbar durch:

$$D(t) = \sum_{n=0}^{n_{MAX}} A(n) \cdot K(t)$$

Dabei ist $A(n)$ die Amplitude der entsprechenden Knallfunktion $K(n)$ infolge Lauflängenunterschiede für unterschiedliche n.

2.8 Die Abschätzung der Amplitude $A(n)$

Die Abschätzung der Amplitude erfolgt über der Grundlage:

$$A(n) = V \cdot \frac{S(n)_{MIN}}{S(n)}$$

$\Rightarrow$

$$D(t) = V \cdot S(n)_{MIN} \cdot \sum_{n=0}^{n_{MAX}} \frac{K(t)}{S(n)}$$

Wobei V einen frei wählbaren Skalierfaktor darstellt.

2.9 Die erweiterte Knallfunktion $K(t, n)$

Die Knallfunktion $K(t)$ ist letztendlich nicht nur von der Zeit abhängig, sondern auch vom Ort von der Schall aus dem Blitzkanal emittiert wird. Diese Abhängigkeit kann simuliert werden, indem man n mit in $K(t)$ nimmt zu $K(t, n)$.

Praktisch günstig erscheint folgender Zusammenhang.

$$K(t, n) = H(t - n) \cdot \sin\left(\frac{n}{10} \cdot (t - n)\right) \cdot e^{\frac{n-t}{2}}$$

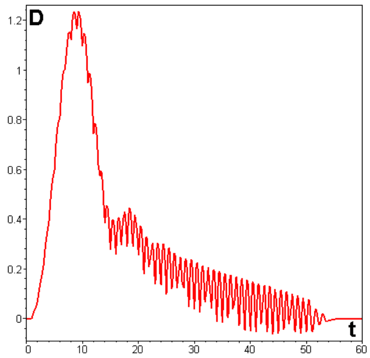
3 Beispiele

3.1 Beispiel 1

Als erstes Beispiel soll eine Donnerfunktion $D\left(t,n\right)$ ohne Beachtung von Anfangs- und Endpunkt erfolgen, sowie sonstiger Randbedingungen. Ein Modell für $D\left(t,n\right)$ könnte folgendermaßen aussehen:

$$D\left(t,n\right)=\sum_{n=0}^{50}\frac{1}{50}\cdot\left(50-\frac{9}{10}\cdot n\right)\cdot H\left(t-n\right)\cdot\sin\left(\frac{n}{10}\cdot\left(t-n\right)\right)\cdot e^{\frac{n-t}{2}}$$

Grafisch kann nun der Donner veranschaulicht werden:

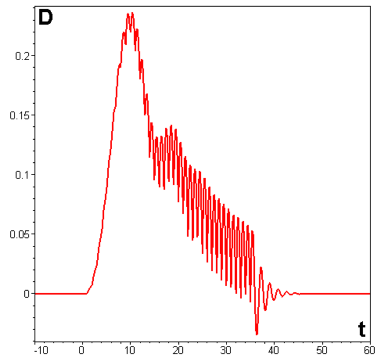


3.2 Beispiel 2

Ein Blitz zwischen zwei Wolken mit $n = 35$.

$$\begin{array}{ll} x_A = -10 & x_E = +10 \\ y_A = +10 & y_E = +10 \end{array}$$

$\Rightarrow$

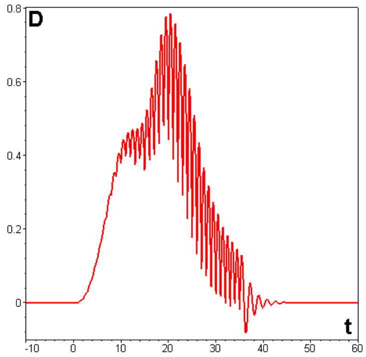


3.3 Beispiel 3

Ein Blitz über den Betrachter hinweg auf die Erde mit $n = 35$.

$$\begin{array}{ll} x_A = -10 & x_E = +10 \\ y_A = +10 & y_E = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$

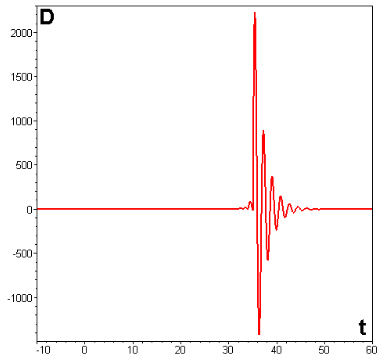


3.4 Beispiel 4

Ein entfernter Blitz zum Betrachter mit $n = 35$.

$$\begin{array}{ll} x_A = -10 & x_E = 0 \\ y_A = +10 & y_E = +0,1 \end{array}$$

$\Rightarrow$

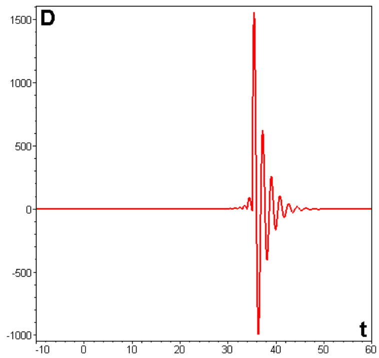


3.5 Beispiel 5

Ein naher Blitz zum Betrachter mit $n = 35$.

$$\begin{array}{ll} x_A = -0,1 & x_E = 0 \\ y_A = +10 & y_E = +0,1 \end{array}$$

$\Rightarrow$



4 Zusammenfassung

Er ist nicht perfekt bis in das kleinste Detail, jedoch scheint es ein guter Weg zu sein einen Donner simulieren zu wollen mit $n_{MAX} \approx 35$ und:

$$D\left(t,n\right) = V \cdot S\left(n\right)_{MIN} \cdot \sum_{n=0}^{n_{MAX}} \frac{K\left(t,n\right)}{S\left(n\right)}$$

Sowie:

$$K\left(t,n\right) = H\left(t-n\right) \cdot \sin\left(\frac{n}{10} \cdot \left(t-n\right)\right) \cdot e^{\frac{n-t}{2}}$$

$\LaTeX\,2_{\varepsilon}$