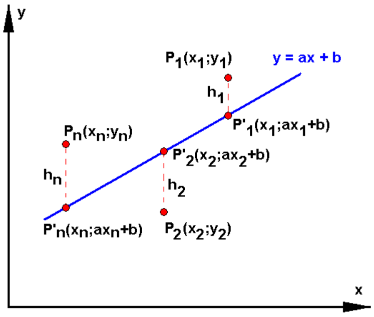
Die Kreisregression als ein Sonderfall der Elliptischen Regression



Circular regression as a special case of elliptic regression

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 16. Februar 2015 – Letzte Revision: 23. Juli 2025

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

[Dipa] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten - Prinzip HKA. www.Zenithpoint.de.

[Dipb] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten - Prinzip MKQ. www.Zenithpoint.de.

[Rol] Roland Weingärtner, Leon Schiller, Alexander Kinstler, Richard Neumann, Frank Brunner, Eldad Bahat Treidel, Enrico Brusaterra, Matthias Marx, Sven Besendörfer. Impact of Dislocation Networks on Leakage Currents of GaN-on-GaN pn-Diodes: A Statistical Approach Comparing X-Ray Topography with Electrical Characteristics.

1 Methode MKQ

1.1 Einleitung.

In „Elliptische Regression von Datenpunkten“ ist eine Möglichkeit der Elliptischen Regression entwickelt worden. Mit Hilfe der dort gefundenen Arbeitsgleichung lässt sich auch eine Kreisregression entwickeln als Sonderfall. Die vorliegende Datei wird sich im folgenden Verlauf ein wenig mit dieser Thematik beschäftigen. Übergang

1.1.1 Kreisregression für die ungekippte Ellipse

[001]ff. Der Übergang von der Ellipse zum Kreis ist gegeben mit der Transformation

$$e^2 = f^2 \to r^2$$

über die allgemeine Ellipsengleichung der ungekippten Ellipse.

$$\frac{(y - y_M)^2}{e^2} + \frac{(x - x_M)^2}{f^2} = 1$$

$\Rightarrow$

$$(y - y_M)^2 + (x - x_M)^2 = r^2$$

Da dies sofort der Kreisgleichung entspricht, ist der Übergang von der Elliptischen Regression zur Kreisregression ohne weitere Randbedingungen erlaubt und möglich.

1.1.2 Kreisregression für die gekippte Ellipse

Dann erweitert sich die regressierte Ellipsenfunktion zu:[1]

$$\frac{\left((x-x_M)\cdot\cos\varphi+(y-y_M)\cdot\sin\varphi\right)^2}{f^2}+\frac{\left((y-y_M)\cdot\cos\varphi-(x-x_M)\cdot\sin\varphi\right)^2}{e^2}=1$$

⇒

$$(y-y_M)^2+(x-x_M)^2=r^2$$

⇒

$$y=y_M\pm\sqrt{r^2-(x-x_M)^2}$$

Mit:

$$A=r^2 \qquad B=0$$

Die A- und B- Koeffizienten aus der Elliptischen Regression.

$$A=\frac{e^2\cdot a^2+f^2}{1+a^2} \qquad B=a\cdot\frac{f^2-e^2}{1+a^2}$$

⇒

$$\frac{B}{A}=a\cdot\frac{f^2-e^2}{e^2\cdot a^2+f^2}$$

Die goniometrischen Parameter.

$$\sin^2\varphi=\sin^2\arctan a=\frac{a^2}{1+a^2}$$
$$\cos^2\varphi=\cos^2\arctan a=\frac{1}{1+a^2}$$
$$\cos\varphi\cdot\sin\varphi=\cos\arctan a\cdot\sin\arctan a=\frac{a}{1+a^2}$$

Der Anstieg der Hauptachse lässt sich über den Korrelationskoeffizienten ρ_{XY} darstellen.

$$\rho_{XY}=a\cdot\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$$

Für den Kreis muss gelten:

$$\rho_{XY}=0 \qquad \sigma_X=\sigma_Y$$

⇒

$$0=a$$

Der Anstieg der Nebenachse ist über den festgelegten Zusammenhang zwischen a und c zu zeigen.

$$a\cdot c=-1$$

⇒

$$c=-\infty$$

[1] Für die Herleitung der Arbeitsgleichung der Elliptischen Regression siehe [Dipb]

1.1.3 Kreismittelpunkt

Der Kreismittelpunkt ist weiterhin gemäß der Vorschrift aus der Elliptischen Regression definiert.

$$x_{MP} = \frac{\{x_i\}}{n} \qquad y_{MP} = \frac{\{y_i\}}{n}$$

Wobei im folgenden $\{\bullet\}$ die Summe der einzelnen Werte entspricht.

1.2 Reduzierung der Relationen

Es sind daher die Grenzwerte zu bilden.

reduzierte Relationen

1.2.1 Anstiege

Verschiedene Darstellungsformen des Anstiegs a:

$$\tan\varphi = \frac{B}{A - e^2} = \frac{0}{r^2 - r^2} = \frac{0}{0} = \text{n.def.}$$

Verschiedene Darstellungsformen des Anstiegs c:

$$-\cot\varphi = \frac{e^2 - A}{B} = \frac{r^2 - r^2}{0} = \frac{0}{0} = \text{n.def.}$$

Vereinfachung von a:

$$\frac{B + e^2 \cdot a}{A} = a$$

$\Rightarrow$

$$\frac{0 + r^2 \cdot 0}{r^2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$0 = 0$$

Vereinfachung von c:

$$\frac{-A}{B + e^2 \cdot a} = c$$

$\Rightarrow$

$$\frac{-r^2}{0 + r^2 \cdot 0} = -\infty$$

$\Rightarrow$

$$\frac{-r^2}{0} = -\infty$$

Zusammenhang zwischen den Anstiegen a und c:[2]

$$a \cdot c = -1$$

$\Rightarrow$

$$0 \cdot (-\infty) = -1$$

[2]Hier und nur hier als Grenzwert gültig

1.2.2 Winkel

Der sin des Winkels φ:

$$\frac{a^2}{1+a^2} = \frac{A \cdot a^2 \cdot f^2}{(B \cdot a + A)^2 + e^2 \cdot f^2 \cdot a^2} = \frac{A \cdot a^2}{f^2 + e^2 \cdot a^2} = \sin^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{0^2}{1+0^2} = \frac{r^2 \cdot 0^2 \cdot r^2}{(0 \cdot 0 + r^2)^2 + r^2 \cdot r^2 \cdot 0^2} = \frac{r^2 \cdot 0^2}{r^2 + r^2 \cdot 0^2} = \sin^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{0^2}{1+0^2} = \sin^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$0 = \varphi$$

Der cos des Winkels φ:

$$\frac{1}{1+a^2} = \frac{A \cdot f^2}{(B \cdot a + A)^2 + e^2 \cdot f^2 \cdot a^2} = \frac{A \cdot e^2}{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2} = \frac{A}{f^2 + e^2 \cdot a^2} = \cos^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{1+0^2} = \frac{r^2 \cdot r^2}{(0 \cdot 0 + r^2)^2 + r^2 \cdot r^2 \cdot 0^2} = \frac{r^2 \cdot r^2}{r^2 \cdot r^2 + (0 - r^2 \cdot 0)^2} = \frac{r^2}{r^2 + r^2 \cdot 0^2} = \cos^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{1+0^2} = \cos^2 \varphi$$

$\Rightarrow$

$$0 = \varphi$$

Das Produkt von sin und cos:

$$\frac{a}{1+a^2} = \frac{1}{a-c} = \frac{A \cdot a}{f^2 + e^2 \cdot a^2} = \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

$\Rightarrow$

$$\frac{0}{1+0^2} = \frac{1}{0+\infty} = \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

$\Rightarrow$

$$0 = \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

Sonstige Zusammenhänge und Vereinfachungen:

$$\frac{1-a}{1+a^2} = \cos^2 \varphi - \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \cos \varphi \cdot (\cos \varphi - \sin \varphi)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1-0}{1+0^2} = \cos^2 \varphi - 0 = \cos \varphi \cdot (\cos \varphi - 0)$$

$\Rightarrow$

$$0 = \varphi$$

1.2.3 Koeffizienten

Müssen sich per Definition zu 0 oder r^{2n} reduzieren.

Verschiedene Darstellungsformen des Koeffizienten A:

$$\frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{B + e^2 \cdot a}{a} = f^2 - B \cdot a = e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi = A$$

$\Rightarrow$

$$\frac{r^2 \cdot 0^2 + r^2}{1 + 0^2} = \frac{0 + r^2}{1} = r^2 - 0 \cdot 0 = r^2 \cdot \sin^2 \varphi + r^2 \cdot \cos^2 \varphi = r^2$$

$\Rightarrow$

$$r^2 = r^2$$

Verschiedene Darstellungsformen des Koeffizienten B:

$$a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = a \cdot \left(A - e^2\right) = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = B$$

$\Rightarrow$

$$0 = 0$$

Summe von A und B:

$$\left(e^2 + f^2\right) \cdot \left(e^2 - f^2\right) \cdot \sin^2 \varphi + f^4 = e^4 \cdot \sin^2 \varphi + f^4 \cdot \cos^2 \varphi = \frac{e^4 \cdot a^2 + f^4}{1 + a^2} = A^2 + B^2$$

$\Rightarrow$

$$\left(r^2 + r^2\right) \cdot \left(r^2 - r^2\right) \cdot \sin^2 \varphi + r^4 = r^4 \cdot \sin^2 \varphi + r^4 \cdot \cos^2 \varphi = \frac{r^4 \cdot 0^2 + r^4}{1 + 0^2} = r^4 + 0$$

$\Rightarrow$

$$r^4 = r^4$$

Produkt von A und B:

$$\left(e^2 \cdot a^2 + f^2\right) \cdot \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sin \varphi \cdot \cos^3 \varphi = A \cdot B$$

$\Rightarrow$

$$\left(r^2 \cdot 0^2 + r^2\right) \cdot \left(r^2 - r^2\right) \cdot \sin \varphi \cdot \cos^3 \varphi = r^2 \cdot 0$$

$\Rightarrow$

$$0 = 0$$

Produkt von A und B mit dem Anstieg a:

$$\left(e^2 \cdot a^2 + f^2\right) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi = A \cdot a$$

$\Rightarrow$

$$\left(r^2 \cdot 0^2 + r^2\right) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi = r^2 \cdot 0$$

$\Rightarrow$

$$r^2 \cdot 0 = r^2 \cdot 0$$

Sowie:

$$\left(f^2 - e^2\right) \cdot \sin^2 \varphi = B \cdot a$$

$\Rightarrow$

$$\left(r^2 - r^2\right) \cdot \frac{0^2}{1 + 0^2} = 0 \cdot a$$

$\Rightarrow$

$$0 = 0$$

Quotient von A und B:

$$a \cdot \frac{f^2 - e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2} = \frac{B}{A}$$

⇒
$$0 \cdot \frac{r^2 - r^2}{r^2 \cdot 0^2 + r^2} = \frac{0}{r^2}$$
⇒
$$0 = 0$$
Sowie:
$$\frac{f^2}{B} - a = \frac{A}{B}$$
⇒
$$\frac{r^2}{0} - 0 = \frac{r^2}{0} = \text{n.def.}$$
Verschiedene Zusammenhänge und Vereinfachungen:
$$A \cdot a - B = e^2 \cdot a$$
⇒
$$r^2 \cdot 0 - 0 = r^2 \cdot 0$$
⇒
$$r^2 \cdot 0 = r^2 \cdot 0$$
Sowie:
$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} = \frac{A}{B} + a + c$$
⇒
$$\frac{0^2 + r^2 \cdot r^2}{r^2 \cdot 0} = \frac{r^2}{0} + 0 - \frac{1}{0}$$
⇒
$$\frac{r^2}{0} = \frac{r^2}{0} = \text{n.def.}$$
Sowie:
$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A} = f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi$$
⇒
$$\frac{0^2 + r^2 \cdot r^2}{r^2} = r^2 \cdot \sin^2\varphi + r^2 \cdot \cos^2\varphi$$
⇒
$$r^2 = r^2$$
Sowie:
$$\frac{B^2 \cdot A}{B^2 + f^2 \cdot e^2} = \left(f^2 - e^2\right)^2 \cdot \frac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}$$
⇒
$$\frac{0^2 \cdot r^2}{0^2 + r^2 \cdot r^2} = \left(r^2 - r^2\right)^2 \cdot \frac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{r^2 \cdot \sin^2\varphi + r^2 \cdot \cos^2\varphi}$$
⇒
$$0 = 0$$
Sowie:
$$\frac{A}{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2} = \frac{1}{e^2} \cdot \cos^2\varphi$$
⇒
$$\frac{r^2}{r^2 \cdot r^2 + (0 - r^2 \cdot 0)^2} = \frac{1}{r^2} \cdot \cos^2\varphi$$
⇒
$$0 = \varphi$$

1.2.4 Sonstige Relationen

Vereinfachung von e:

$$\frac{A \cdot a - B}{a} = \frac{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2}{A} \cdot \cos^2 \varphi = e^2$$

$\Rightarrow$

$$\frac{r^2 - 0}{1} = \frac{r^2 \cdot r^2 + \left(0 - r^2 \cdot 0\right)^2}{r^2} \cdot \frac{1}{1 + 0^2} = r^2$$

$\Rightarrow$

$$r^2 = r^2$$

Vereinfachung von f:

$$A + B \cdot a = f^2$$

$\Rightarrow$

$$r^2 + 0 \cdot 0 = r^2$$

$\Rightarrow$

$$r^2 = r^2$$

Zusammenhang zwischen e und f:

$$A^2 - B^2 + \frac{a^2 - 1}{a} \cdot A \cdot B = A \cdot \left(f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi\right) - B^2 = e^2 \cdot f^2$$

$\Rightarrow$

$$r^4 - 0^2 + \frac{0 - 1}{1} \cdot r^2 \cdot 0 = r^2 \cdot \left(r^2 \cdot \sin^2 \varphi + r^2 \cdot \cos^2 \varphi\right) - 0^2 = r^2 \cdot r^2$$

$\Rightarrow$

$$r^4 = r^4$$

1.3 Ermittlung des Radiuses

Radius r

Wie aber nun den Radius r berechnen? Die Berechnungsgrundlage steckt in der allgemeinen Kreisgleichung selbst.

$$(y - y_M)^2 + (x - x_M)^2 = r^2$$

Da es sich um eine Regression handelt wird der Radius berechnet aus:

$$\frac{\left\{(y - y_M)^2\right\}}{n} + \frac{\left\{(x - x_M)^2\right\}}{n} = r^2$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_Y^2 + \sigma_X^2 = r^2$$

Wobei die Klammerwerte $\{\bullet\}$ die Summe aller Einzelwerte darstellt.

Beispiel

x_i	y_i	i	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$	r_i^2
128	100	1	321 489	121 627	443 116
256	250	2	192 721	39 502	232 223
440	510	3	65 025	3 752	68 777
640	160	4	3 025	83 376	86 401
768	400	5	5 329	2 377	7 706
896	520	6	40 401	5 077	45 478
1152	750	7	208 849	90 752	299 601
1280	900	8	342 225	203 627	545 852
5 560	3 590	8	1 179 064	550 090	1 729 154

Damit ist gegeben:

$$x_M = \frac{5560}{8} = 695 \qquad y_M = \frac{3590}{8} = 448,75$$

Und:

$$r^2 = \frac{1729154}{8} = 216144,25$$

$\Rightarrow$

$$r = 464,9$$

Wobei vor dem Übergang galt:

$$f^2 = \frac{1179064}{8} = 147383 \qquad e^2 = \frac{550090}{8} = 68761,25$$

$\Rightarrow$

$$f = 383,9 \qquad e = 262,22$$

Aus der Definition von e^2, f^2 und r^2 ist ersichtlich, dass im kartesischen Koordinaten gelten muss:

$$x \perp y$$

$\Rightarrow$

$$r^2 = e^2 + f^2$$

$\Rightarrow$

$$464,9^2 \stackrel{?}{=} 262,22^2 + 383,9^2$$

$\Rightarrow$

$$216144 \stackrel{!}{=} 216144$$

Sowie:

$$r \leq e + f$$

$\Rightarrow$

$$464,9 \stackrel{?}{\leq} 262,22 + 383,9$$

$\Rightarrow$

$$464,9 \stackrel{!}{<} 646,12$$

1.4 Reduzierung der Punktdefinitionen

1.4.1 MP = Mittelpunkt

$$x_{MP} = \frac{\{x_i\}}{n}$$

reduzierte Punktdefinitionen

Sowie:

$$y_{MP} = \frac{\{y_i\}}{n}$$

1.4.2 WB = Westlicher Brennpunkt

Die lineare Exzentrizität ε_L ist definiert.

$$\varepsilon_L = \sqrt{|\{e^2\} - \{f^2\}|} = \sqrt{|\{r^2\} - \{r^2\}|} = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{WB} = x_{MP} - \varepsilon_L \cdot \cos\varphi$$

$\Rightarrow$

$$x_{WB} = x_{MP}$$

Sowie:

$$y_{WB} = y_{MP} - \varepsilon_L \cdot \sin\varphi$$

$\Rightarrow$

$$y_{WB} = y_{MP}$$

1.4.3 OB = Östlicher Brennpunkt

$$x_{OB} = x_{MP} + \varepsilon_L \cdot \cos\varphi$$

$\Rightarrow$

$$x_{OB} = x_{MP}$$

Sowie:

$$y_{OB} = y_{MP} + \varepsilon_L \cdot \sin\varphi$$

$\Rightarrow$

$$y_{OB} = y_{MP}$$

1.4.4 SZ = Scheinbarer Zenit

$$y_{SZ} = y_{MP} + e \cdot \cos\varphi = y_{MP} + r \cdot \cos 0$$

$\Rightarrow$

$$y_{SZ} = y_{MP} + r$$

Sowie:

$$x_{SZ} = x_{MP} - e \cdot \sin\varphi = x_{MP} - r \cdot \sin 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{SZ} = x_{MP}$$

1.4.5 SN = Scheinbarer Nadir

$$y_{SN} = y_{MP} - e \cdot \cos\varphi = y_{MP} - r \cdot \cos 0$$

$\Rightarrow$

$$y_{SN} = y_{MP} - r$$

Sowie:

$$x_{SN} = x_{MP} + e \cdot \sin\varphi = x_{MP} + r \cdot \sin 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{SN} = x_{MP}$$

1.4.6 WZ = Wahrer Zenit

$$
\begin{aligned}
x_{WZ} &= x_{MP} + \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}} \\
&= x_{MP} + \left(r^2 - r^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 0 \cdot \cos^2 0}{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$x_{WZ} = x_{MP}$$

Sowie:

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi} = y_{MP} + \sqrt{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WZ} = y_{MP} + r$$

1.4.7 WN = Wahrer Nadir

$$\begin{aligned}
x_{WN} &= x_{MP} - \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}} \\
&= x_{MP} - \left(r^2 - r^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 0 \cdot \cos^2 0}{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$x_{WN} = x_{MP}$$

Sowie:

$$y_{WN} = y_{MP} - \sqrt{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi} = y_{MP} - \sqrt{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WN} = y_{MP} - r$$

1.4.8 OS = Östlicher scheinbarer Scheitelpunkt

$$x_{OS} = x_{MP} + f \cdot \cos\varphi = x_{MP} + r \cdot \cos 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{OS} = x_{MP} + r$$

Sowie:

$$y_{OS} = y_{MP} + f \cdot \sin\varphi = y_{MP} + r \cdot \sin 0$$

$\Rightarrow$

$$y_{OS} = y_{MP}$$

1.4.9 WS = Westlicher scheinbarer Scheitelpunkt

$$x_{WS} = x_{MP} - f \cdot \cos\varphi = x_{MP} - r \cdot \cos 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{WS} = x_{MP} - r$$

Sowie:

$$y_{WS} = y_{MP} - f \cdot \sin\varphi = y_{MP} - r \cdot \sin 0$$

$\Rightarrow$

$$y_{WS} = y_{MP}$$

1.4.10 OW = Östlicher wahrer Scheitelpunkt

$$x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} = x_{MP} + \sqrt{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}$$

$\Rightarrow$

$$x_{OW} = x_{MP} + r$$

Sowie:

$$\begin{aligned} y_{OW} &= y_{MP} + \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi}} \\ &= y_{MP} + \left(r^2 - r^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 0 \cdot \cos^2 0}{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$y_{OW} = y_{MP}$$

1.4.11 WW = Westlicher wahrer Scheitelpunkt

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi} = x_{MP} - \sqrt{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}$$

$\Rightarrow$

$$x_{WW} = x_{MP} - r$$

Sowie:

$$\begin{aligned} y_{WW} &= y_{MP} - \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi}} \\ &= y_{MP} - \left(r^2 - r^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 0 \cdot \cos^2 0}{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WW} = y_{MP}$$

1.5 Reduzierung der Achsdefinitionen

1.5.1 Hauptachse

$$y_H = a \cdot x_H + b$$

$\Rightarrow$

$$y_H = 0 \cdot x_H + b$$

reduzierte Achsdefinitionen

$\Rightarrow$

$$y_H = b$$

1.5.2 Nebenachse

$$y_N = c \cdot x_N + d$$

$\Rightarrow$

$$y_N = -\infty \cdot \operatorname{sgn} x_N + d$$

1.5.3 Scheitelachse

$$y_S = \frac{B}{A} \cdot x_S + \frac{e^2 \cdot a}{A} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{0}{r^2} \cdot x_S + \frac{r^2 \cdot 0}{r^2} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = b$$

Oder:

$$y_S = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_S + e^2 \cdot \frac{\tan\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \left(r^2 - r^2\right) \cdot \frac{\sin 0 \cdot \cos 0}{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0} \cdot x_S + r^2 \cdot \frac{\tan 0}{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = b$$

Oder:

$$y_S = \frac{f^2 - e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2} \cdot a \cdot x_S + \frac{e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2} \cdot a \cdot \left(1 + a^2\right) \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{r^2 - r^2}{r^2 \cdot 0^2 + r^2} \cdot 0 \cdot x_S + \frac{r^2}{r^2 \cdot 0^2 + r^2} \cdot 0 \cdot \left(1 + 0^2\right) \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = b$$

1.5.4 Extremaachse

$$y_E = \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} \cdot x_E + e^2 \cdot \frac{a \cdot B - f^2}{A \cdot B} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{0^2 + r^2 \cdot r^2}{r^2 \cdot 0} \cdot x_E + r^2 \cdot \frac{0 \cdot 0 - r^2}{r^2 \cdot 0} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \infty \cdot \operatorname{sgn}(x_E - x_{MP}) + b$$

Oder:

$$y_E = \frac{f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi}{(f^2 - e^2) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi} \cdot x_E - \frac{e^2}{(f^2 - e^2) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{r^2 \cdot \sin^2 0 + r^2 \cdot \cos^2 0}{(r^2 - r^2) \cdot \sin 0 \cdot \cos 0} \cdot x_E - \frac{r^2}{(r^2 - r^2) \cdot \sin 0 \cdot \cos 0} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \infty \cdot \operatorname{sgn}(x_E - x_{MP}) + b$$

Oder:

$$y_E = \frac{f^2 \cdot a^2 + e^2}{f^2 - e^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot x_E - \frac{e^2}{f^2 - e^2} \cdot \frac{1 + a^2}{a} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \infty \cdot \operatorname{sgn}(x_E - x_{MP}) + b$$

1.6 Reduzierung der Winkelrelationen

1.6.1 Winkel und Achsen

Erfolgt mit den betreffenden Anstieg m nach der Berechnungsgrundlage: reduzierte Winkel

$$\tan\alpha = m$$

$\tan\alpha =$	y_H	y_N	y_S	y_E
Koeffizientendarst.	$\frac{B}{A-e^2}$	$\frac{e^2-A}{B}$	$\frac{B}{A}$	$\frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B}$
Achsendarstellung	a	$-\frac{1}{a}$	$\frac{f^2-e^2}{e^2\cdot a^2+f^2}\cdot a$	$\frac{f^2\cdot a^2+e^2}{f^2-e^2}\cdot\frac{1}{a}$
Goniometrische Darst.	$\tan\varphi$	$-\cot\varphi$	$\frac{(f^2-e^2)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{e^2\cdot\sin^2\varphi+f^2\cdot\cos^2\varphi}$	$\frac{f^2\cdot\sin^2\varphi+e^2\cdot\cos^2\varphi}{(f^2-e^2)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}$

$\Rightarrow$

$\tan\alpha =$	y_H	y_N	y_S	y_E
Koeffizientendarst.	n.def.	n.def.	0	∞
Achsendarstellung	0	$-\infty$	0	∞
Goniometrische Darst.	n.def.	n.def.	0	∞

1.6.2 Winkel

Erfolgt mit den betreffenden Anstiegen m_1 und m_2 nach der Berechnungsgrundlage:

$$\tan\beta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$$

$\Rightarrow$

Koeffizientendarstellung

$\tan\beta =$	y_H	y_N	y_S	y_E
y_H	0	∞	$\left\lvert\frac{B-A\cdot a}{A+B\cdot a}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{B\cdot(B-A\cdot a)+e^2\cdot f^2}{B\cdot(A+B\cdot a)+a\cdot e^2\cdot f^2}\right\rvert$
y_N	∞	0	$\left\lvert\frac{A+B\cdot a}{B-A\cdot a}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{B\cdot(A+B\cdot a)+a\cdot e^2\cdot f^2}{B\cdot(B-A\cdot a)+e^2\cdot f^2}\right\rvert$
y_S	$\left\lvert\frac{e^2}{f^2}\cdot\tan\varphi\right\rvert$	$\left\lvert\frac{f^2}{e^2}\cdot\cot\varphi\right\rvert$	0	$\left\lvert\frac{A}{B}\cdot\frac{e^2\cdot f^2}{A^2+B^2+e^2\cdot f^2}\right\rvert$
y_E	$\left\lvert\frac{e^2}{f^2}\cdot\cot\varphi\right\rvert$	$\left\lvert\frac{f^2}{e^2}\cdot\tan\varphi\right\rvert$	$\left\lvert\frac{e^2\cdot f^2}{e^4-f^4}\cdot\sin^{-1}\varphi\cdot\cos^{-1}\varphi\right\rvert$	0

Goniometrische Darstellung
$\Rightarrow$

$\tan\beta =$	y_H	y_N	y_S	y_E
y_H	0	∞	0	∞
y_N	∞	0	∞	0
y_S	n.def.	n.def.	0	∞
y_E	n.def.	n.def.	∞	0

1.6.3 Zusammenhang Korrelationskoeffizient und Winkel

In [Dipb] wurde der lineare Korrelationskoeffizient ρ_{XY} definiert. Mit dessen Hilfe ist der Schnittwinkel β ebenfalls beschreibbar, so gilt:

$$\rho_{XY} = a \cdot \sqrt{\frac{f^2}{e^2}} = a \cdot \sqrt{\frac{r^2}{r^2}} = a = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{f^2}{e^2} = \rho_{XY}^2 \cdot \cot^2\varphi \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{e^2}{f^2} = \frac{\tan^2\varphi}{\rho_{XY}^2}$$

$\Rightarrow$[3]

$$\frac{r^2}{r^2} = 0^2 \cdot \text{ n.def} \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{r^2}{r^2} = \frac{\text{n.def.}}{0^2}$$

$\Rightarrow$

$$1 = \text{ n.def.} \qquad \leftrightarrow \qquad 1 = \text{ n.def.}$$

$\Rightarrow$

$\tan\beta =$	y_H	y_N	y_S
y_S	$\rho_{XY}^{-2} \cdot \left\|\tan^3\varphi\right\|$	$\rho_{XY}^{+2} \cdot \left\|\cot^3\varphi\right\|$	-
y_E	$\rho_{XY}^{-2}\left\|\tan\varphi\right\|$	$\rho_{XY}^{+2} \cdot \left\|\cot\varphi\right\|$	$\left\|\frac{\rho_{XY}^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{\sin^4\varphi - \rho_{XY}^4 \cdot \cos^4\varphi}\right\|$

$\Rightarrow$

$\tan\beta =$	y_H	y_N	y_S
y_S	n.def.	n.def.	-
y_E	n.def.	n.def.	n.def.

$\Rightarrow$

$\rho_{XY}^2 =$	y_H	y_N	y_S
y_S	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2\varphi$	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2\varphi$	-
y_E	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2\varphi$	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2\varphi$	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2\varphi$

$\Rightarrow$

[3] Nur hier so gültig

$\rho^2_{XY} =$	y_H	y_N	y_S
y_S	n.def.	n.def.	-
y_E	n.def.	n.def.	n.def.

Der Korrelationskoeffizient ρ_{XY} ist nur über obig erstgenannte Berechnungsgrundlage definiert.

1.7 Vergleich zur Kreisregression nach MKQ

Für die Berechnung der Mittelpunktkoordinaten und des Radius nach der allgemein bekannten Methode der Kreisregression werden Koeffizienten benötigt. Vergleich

$$A = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \left(n \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) \qquad B = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \left(n \cdot x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

$$C = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \left(n \cdot y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \right) \qquad D = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \left(n \cdot y_i - \sum_{i=1}^{n} y_i \right)$$

$$E = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \left(n \cdot x_i^2 + n \cdot y_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)$$

$$F = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \left(n \cdot x_i^2 + n \cdot y_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)$$

Aus den Koeffizienten ergeben sich die Mittelpunktskoordinaten.

$$x_{MP} = \frac{D \cdot E - C \cdot F}{A \cdot D - B \cdot C} \qquad y_{MP} = \frac{A \cdot F - B \cdot E}{A \cdot D - B \cdot C}$$

Sowie der Radius.

$$r^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left((x_i - x_{MP})^2 + (y_i - y_{MP})^2 \right)$$

Mit den im Beispiel angegebenen Datenpaaren ergeben sich folgende Werte.

$$A = 18.865.024 \qquad B = 11.162.720 \qquad C = 11.162.720$$
$$D = 8.801.400 \qquad E = 18.844.156.512 \qquad F = 12.651.783.800$$

$\Rightarrow$

$$x_{MP} = 594,38 \qquad y_{MP} = 683,63$$

$\Rightarrow$

$$r^2 = 281434,11$$

$\Rightarrow$

$$r = 530,50$$

Ein tabellarischer Vergleich beider Methoden.

	Reduktionsmethode	Kleinste- Quadrate-Methode	Relative Abweichung in %
x_{MP}	695,00	594,38	16,93
y_{MP}	448,75	683,63	34,36
r	464,90	530,50	12,37

Warum diese Abweichungen obwohl beide Verfahren nach der Methode der kleinsten Quadrate entwickelt wurden. Die Antwort liegt in den Randbedingungen. Wurde im vorliegenden Fall für die Anstiege der Haupt- a und Nebenachse c festgelegt

$$a \cdot c = -1$$

$\Rightarrow$

$$a = 0 \qquad c \rightarrow -\infty$$

und dann je eine Fehlerfunktion (für die Haupt- und Nebenachse separat) minimiert, so liegt in der fremden Methode nur eine Fehlerfunktion vor

$$\sum_{i=1}^{n} \left(r^2 - (x_i - x_{MP})^2 - (y_i - y_{MP})^2 \right)^2 \rightarrow MIN$$

ohne Beachtung des Winkels zwischen Haupt- und Nebenachse. Was auch verständlich ist, da bei einer Kreisregression dies ursächlich nicht von Interesse ist.

Für die Berechnung des Kreismittelpunktes sind Vorgaben bekannt.

Kleinste- Quadrate:

$$x_{MP} = \frac{D \cdot E - C \cdot F}{A \cdot D - B \cdot C} \qquad y_{MP} = \frac{A \cdot F - B \cdot E}{A \cdot D - B \cdot C}$$

Reduktionsmethode:

$$x_{MP} = \frac{d - b}{a - c} \qquad y_{MP} = \frac{d \cdot a - c \cdot b}{a - c}$$

Aus diesen beiden Berechnungsgrundlagen können die Anstiege der Haupt- und Nebenachse für die Methode „Kleinste- Quadrate“ ermittelt werden. So sind folgende Äquivalenzen extrahierbar.

$$a - c = A \cdot D - B \cdot C \qquad d - b = D \cdot E - C \cdot F \qquad d \cdot a - c \cdot b = A \cdot F - B \cdot E$$

Das c wird substituiert durch $c = -\frac{1}{a}$.

$$a + \frac{1}{a} = A \cdot D - B \cdot C \qquad d - b = D \cdot E - C \cdot F \qquad d \cdot a + \frac{1}{a} \cdot b = A \cdot F - B \cdot E$$

Das $\frac{1}{a}$ der linken Gleichung wird in die rechte eingesetzt und umgestellt.

$$d - b = D \cdot E - C \cdot F \qquad d \cdot a + (A \cdot D - B \cdot C - a) \cdot b = A \cdot F - B \cdot E$$

$\Rightarrow$

$$d - b = D \cdot E - C \cdot F \qquad (d - b) \cdot a + (A \cdot D - B \cdot C) \cdot b = A \cdot F - B \cdot E$$

Der Ausdruck $d - b$ wird von links nach rechts ersetzt.

$$(D \cdot E - C \cdot F) \cdot a + (A \cdot D - B \cdot C) \cdot b = A \cdot F - B \cdot E$$

Der rechte Term ist ersetzbar.

$$A \cdot F - B \cdot E = d \cdot a - c \cdot b$$

$\Rightarrow$

$$(D \cdot E - C \cdot F) \cdot a + (A \cdot D - B \cdot C) \cdot b = d \cdot a - c \cdot b$$

Damit ist c und d bekannt.

$$c = B \cdot C - A \cdot D \qquad d = D \cdot E - C \cdot F$$

Somit auch a und b.

$$a = A \cdot D - B \cdot C + c \qquad b = C \cdot F - D \cdot E + d$$

$\Rightarrow$

$$a = 0 \qquad b = 0$$

Als kleine Probe kann gelten.

$$a - c = A \cdot D - B \cdot C \qquad d - b = D \cdot E - C \cdot F \qquad d \cdot a - c \cdot b = A \cdot F - B \cdot E$$

$\Rightarrow$

$$-c = A \cdot D - B \cdot C \qquad d - = D \cdot E - C \cdot F \qquad 0 = A \cdot F - B \cdot E$$

$\Rightarrow$

$$-(B \cdot C - A \cdot D) = A \cdot D - B \cdot C \qquad D \cdot E - C \cdot F = D \cdot E - C \cdot F$$

Insbesondere:

$$A \cdot F - B \cdot E = 0$$

Mit den berechneten Werten von c und d ist ablesbar, dass die Bedingung

$$c = -\infty$$

nicht erfüllt ist. Für vorliegendes Beispiel ist $c_{\text{Kleinste- Quadrate}}$

$$c_{\text{K-Q}} = -41.432.304.435.200 \neq -\infty$$

Sowie:

$$d_{\text{K-Q}} = 24.626.639.064.780.800$$

Und:

$$A \cdot F - B \cdot E = 28.324.162.250.178.560 \neq 0$$

Letztendlich ist es Sinn einer Kreisregression, dass der Ausdruck F wahr wird.

$$F = \sum_{i=1}^{n} \left(r^2 - (x_i - x_{MP})^2 - (y_i - y_{MP})^2 \right) = 0$$

Für das Verfahren nach der Reduktionsmethode.

$$r^2 = 216144,25$$

x_i	y_i	i	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$	F
128	100	1	321 489	121 627	-226 971, 75
256	250	2	192 721	39 502	-16 078, 75
440	510	3	65 025	3 752	+147 367, 25
640	160	4	3 025	83 376	+129 743, 25
768	400	5	5 329	2 377	+208 438, 25
896	520	6	40 401	5 077	+170 666, 25
1152	750	7	208 849	90 752	-83 456, 75
1280	900	8	342 225	203 627	-329 707, 75
5 560	3 590	8	1 179 064	550 090	**0**

Muss auch so sein, da letztendlich r^2 ermittelt wurde über:

$$\frac{\left\{ (y - y_M)^2 \right\}}{n} + \frac{\left\{ (x - x_M)^2 \right\}}{n} = r^2$$

Für das Verfahren nach Kleinste- Quadrate.

$$x_{MP} = 594,38 \qquad y_{MP} = 683,63 \qquad r^2 = 281434,11$$

x_i	y_i	i	$(x_i - x_{MP})^2$	$(y_i - y_{MP})^2$	F
128	100	1	217 510	340 624	-276 700
256	250	2	114 501	188 035	-21 102
440	510	3	23 833	30 147	+227 454
640	160	4	2 081	274 188	+ 5 165
768	400	5	30 144	80 446	+170 844
896	520	6	90 975	26 775	+163 684
1152	750	7	310 940	4 405	-33 911
1280	900	8	470 075	46 816	-235 457
5 560	3 590	8	1 260 059	991 436	**0**

Beide Verfahren sind infolge des Ergebnisses **Null** gleichberechtigte Kreisregressionen.

2 Methode HKA

Über die Berechnungsgrundlagen für die Formfaktoren A und B aus der Elliptischen Regression nach MKQ ist eine Kreisreduktion auch über HKA möglich. So gilt:

$$A = \frac{1}{n} \cdot \frac{V_{XX} \cdot C^2 + V_{YY} \cdot (V_{YY} - \lambda_H)^2}{C^2 + (V_{YY} - \lambda_H)^2} \qquad B = \frac{C}{n} \cdot \frac{(V_{YY} - \lambda_H) \cdot (V_{XX} - V_{YY})}{C^2 + (V_{YY} - \lambda_H)^2}$$

• Die Reduktion über $V_{XX} = V_{YY} = V$ ergibt:

$$A = \frac{V}{n} \qquad B = 0$$

Was mit den Konvertierungsregeln für die Ellipse übereinstimmt.[4]

• Die Reduktion über $C = 0$ ergibt:

$$A = \frac{V_{YY}}{n} \qquad B = 0$$

• Eine Reduktion über die Eigenwerte ist ebenfalls möglich. Dann muss gelten $\lambda_H = \lambda_N = \lambda$.

$$\lambda = \frac{V_{XX} + V_{YY}}{2} = V$$

Mit der Notwendigkeit von:

$$(V_{XX} - V_{YY})^2 + 4 \cdot C^2 = 0$$

Was letztendlich die obigen Reduktionen erfordert.

• Die Reduktion der Ellipsengleichung aus HKA. Die Berechnungsgrundlage der Ellipsenfunktion ist definiert:

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot (X - \bar{X}) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - (X - \bar{X})^2}$$

Die Reduktion $C^{(\varphi)} = 0$ und $V_{XX} = V_{YY} = V$ sowie $V_{YY}^{(\varphi)} = V^{(\varphi)}$ ergibt umgestellt in die allgemeine Funktionsgleichung des Kreises:

$$n^2 \cdot \frac{V^{2(\varphi)}}{V^2} \cdot \left(Y^{(\varphi)} - \bar{Y}\right)^2 + (X - \bar{X})^2 = V^{(\varphi)}$$

Die Berechnungsgrundlage von $V^{(\varphi)}$

$$V^{(\varphi)} = \frac{V}{n} \cdot \cos^2\varphi + \frac{V}{n} \cdot \sin^2\varphi = \frac{V}{n}$$

ergibt:

$$\left(Y^{(\varphi)} - \bar{Y}\right)^2 + (X - \bar{X})^2 = \frac{V}{n}$$

Wobei anstelle für die Hauptachsen e^2 und f^2 einer Ellipse der Radius r^2 eines Kreises kommt.

$$\frac{V}{n} = e^2 = f^2 = R^2$$

$\Rightarrow$

$$(Y - \bar{Y})^2 + (X - \bar{X})^2 = R^2$$

Die Kreisregression ist durchgeführt.

[4]Konvertierungsregeln für die Methoden nach [Dipa] und [Dipb] je nach betrachteter Ellipse, hier:

$$A = V_{YY} \qquad B = -C \qquad \frac{e^2 \cdot f^2}{A} = \frac{V_{XX}}{n^2}$$

3 Zusammenfassung

- **MKQ**

Die Kreisregression ist ein Sonderfall der Elliptischen Regression und kann daher aus dieser gebildet werden. Die Arbeitsgleichung ist gegeben mit: Zusammenfassung

$$(y - y_{MP})^2 + (x - x_{MP})^2 = r^2$$

Wobei sich die Außermittigkeiten y_{MP} und x_{MP} durch den Mittelwert der Datenpaare ergeben.

$$y_M = \frac{\{y_i\}}{n} \qquad x_M = \frac{\{x_i\}}{n}$$

Der Radius r des regressierten Kreises ist ermittelbar über die Arbeitsgleichung.

$$\frac{\left\{(y - y_M)^2\right\} + \left\{(x - x_M)^2\right\}}{n} = r^2$$

Wobei n die maximale Anzahl der Datenpaare darstellt.

Sie, die Kreisregression vorgestellter Art, erfüllt die Minimierung der Fehlerfunktion F.

$$F_{MKQ} = \sum_{i=1}^{n} \left(r^2 - (x_i - x_{MP})^2 - (y_i - y_{MP})^2 \right) = 0$$

- **HKA**

Die Kreisregression ist ein Sonderfall der Elliptischen Regression und kann daher aus dieser gebildet werden. Die Arbeitsgleichung ist gegeben mit:

$$\left(Y - \bar{Y}\right)^2 + \left(X - \bar{X}\right)^2 = r^2$$

Wobei sich die Außermittigkeiten y_{MP} und x_{MP} durch den Mittelwert der Datenpaare ergeben.

$$\bar{Y} = \frac{\{Y_i\}}{n} \qquad \bar{Y} = \frac{\{Y_i\}}{n}$$

Der Radius r des regressierten Kreises ist ermittelbar über die Arbeitsgleichung.

$$\frac{\left\{\left(Y - \bar{Y}\right)^2\right\} + \left\{\left(X - X^2\right)^2\right\}}{n} = R^2$$

Wobei n die maximale Anzahl der Datenpaare darstellt.

Sie, die Kreisregression vorgestellter Art, erfüllt die Minimierung der Fehlerfunktion F.

$$F_{HKA} = \sum_{i=1}^{n} \left(R^2 - \left(X_i - \bar{X}\right)^2 - \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 \right) = 0$$

4 Beispiel

[Rol]

4.1 Elliptische Regression

Beispiel entnommen aus [Dipb].

i	X_i	Y_i	$(X_i - X_M) \cdot (Y_i - Y_M)$
1	+0, 192 2	-6, 340 0	+0, 123 957
2	+0, 014 9	-7, 213 8	-0, 058 961
3	-0, 208 7	-6, 511 2	-0, 022 972
4	-0, 001 9	-6, 610 3	+0, 015 107
5	+0, 031 8	-6, 565 2	+0, 026 216
6	-0, 008 3	-6, 662 1	+0, 008 872
7	-0, 320 6	-6, 644 1	-0, 021 696
8	-0, 592 7	-7, 436 8	+0, 331 369
8	-0, 893 3	-53, 983 5	+0, 401 892

$X_i \cdot X_i$	$X_i \cdot Y_i$	$(X_i - X_M)^2$	$(Y_i - Y_M)^2$
+0, 036 941	-1, 218 548	+0, 092 333	+0, 166 413
+0, 000 222	-0, 107 486	+0, 016 018	+0, 217 027
+0, 043 556	+1, 358 889	+0, 009 416	+0, 056 045
+0, 000 004	+0, 012 560	+0, 012 048	+0, 018 944
+0, 001 011	-0, 208 773	+0, 020 582	+0, 033 393
+0, 000 069	+0, 055 295	+0, 010 684	+0, 007 368
+0, 102 784	+2, 130 098	+0, 043 655	+0, 010 782
+0, 351 293	+4, 407 791	+0, 231 397	+0, 474 531
+0, 535 880	+6, 429 826	+0, 436 133	+0, 984 503

Woraus sich folgende Werte ergeben:

$$\bar{X} = \frac{\{X_i\}}{n} = -\frac{0,8933}{8} = -0,112 \qquad \bar{Y} = \frac{\{Y_i\}}{n} = -\frac{53,9835}{8} = -6,748$$

$$\begin{aligned} V_{XX} &= +0,436133 \\ C = C_{XY} = C_{YX} &= +0,401892 \\ V_{YY} &= +0,984503 \end{aligned}$$

$$e^2 = \frac{V_{YY}}{8} = \frac{0,984503}{8} = 0,123$$

$\Rightarrow$

$$e = 0,351$$

Und:

$$f^2 = \frac{V_{XX}}{8} = \frac{0,436133}{8} = 0,055$$

$\Rightarrow$

$$f = 0,233$$

$$\rho_{XY} = C \cdot \frac{V_{YY}}{V_{XX}} \cdot \frac{f}{e} = C \cdot \sqrt{\frac{V_{YY}}{V_{XX}}} = 0,401892 \cdot \sqrt{\frac{0,984503}{0,436133}} = 0,604$$

$$2 \cdot \lambda_{1;2} = V_{XX} + V_{YY} \pm \sqrt{\left(V_{XX} - V_{YY}\right)^2 + 4 \cdot C^2}$$

$\Rightarrow$

$$2 \cdot \lambda_{1;2} = 0,436133 + 0,984503 \pm \sqrt{\left(0,436133 - 0,984503\right)^2 + 4 \cdot 0,401892^2}$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1 = 1,197 \qquad \lambda_2 = 0,224$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,421 = V_{XX} + V_{YY}$$

$$\frac{V_{YY} - \lambda_1}{C} = \frac{0,984503 - 1,197}{0,401892} = -0,529$$

Und:

$$\frac{V_{YY} - \lambda_2}{C} = \frac{0,984503 - 0,224}{0,401892} = +1,892$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{YY} - \lambda_1}{C} \cdot \frac{V_{YY} - \lambda_2}{C} = -1 = -0,529 \cdot 1.892$$

$$Y_{1;2}\left(X\right) = \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot X + \bar{Y} - \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot \bar{X}$$

$\Rightarrow$

$$Y_1\left(X\right) = -0,529 \cdot X - 6,807$$
$$Y_2\left(X\right) = +1,892 \cdot X - 6,536$$

- Fall $a = +1,892$

$$\sin^2\varphi = \frac{a^2}{1+a^2} = \frac{1,892^2}{1+1,892^2} = 0,782$$
$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+a^2} = \frac{1}{1+1,892^2} = 0,218$$
$$\sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{a}{1+a^2} = \frac{1,892}{1+1,892^2} = 0,413$$

$\Rightarrow$

$$V_{YY}^{(\varphi)} = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi \qquad C^{(\varphi)} = \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \left(e^2 - f^2\right)$$
$$V_{YY}^{(\varphi)} = 0,123 \cdot 0,782 + 0,055 \cdot 0,218 \qquad C^{(\varphi)} = 0,413 \cdot (0,123 - 0,055)$$
$$V_{YY}^{(\varphi)} = 0,108 \qquad C^{(\varphi)} = 0,028$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$
$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = -6,748 - \frac{0,028}{0,108} \cdot \left(X + 0,112\right) \pm \frac{\sqrt{0,436133 \cdot 0,984503}}{8 \cdot 0,108} \cdot \sqrt{0,108 - \left(X + 0,112\right)^2}$$
$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = -6,748 - 0,259 \cdot \left(X + 0,112\right) \pm 0,759 \cdot \sqrt{0,108 - \left(X + 0,112\right)^2}$$

• Fall $a = -0,529$

$$\sin^2\varphi = \frac{a^2}{1+a^2} = \frac{0,529^2}{1+0,529^2} = 0,218$$
$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+a^2} = \frac{1}{1+0,529^2} = 0,782$$
$$\sin\varphi\cdot\cos\varphi = \frac{a}{1+a^2} = \frac{-0,529}{1+0,529^2} = -0,413$$

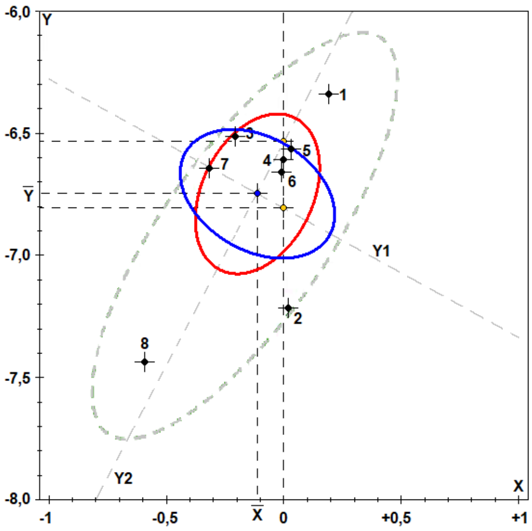
$\Rightarrow$

$$V_{YY}^{(\varphi)} = e^2\cdot\sin^2\varphi + f^2\cdot\cos^2\varphi \qquad C^{(\varphi)} = \sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\left(e^2-f^2\right)$$
$$V_{YY}^{(\varphi)} = 0,123\cdot 0,218 + 0,055\cdot 0,782 \qquad C^{(\varphi)} = -0,413\cdot(0,123-0,055)$$
$$V_{YY}^{(\varphi)} = 0,070 \qquad C^{(\varphi)} = -0,028$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}}\cdot\left(X-\bar{X}\right) \pm \frac{\sqrt{V_{XX}\cdot V_{YY}}}{n\cdot V_{YY}^{(\varphi)}}\cdot\sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - \left(X-\bar{X}\right)^2}$$
$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = -6,748 + \frac{0,028}{0,070}\cdot(X+0,112) \pm \frac{\sqrt{0,436133\cdot 0,984503}}{8\cdot 0,070}\cdot\sqrt{0,070-(X+0,112)^2}$$
$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = -6,748 + 0,4\cdot(X+0,112) \pm 1,17\cdot\sqrt{0,07-(X+0,112)^2}$$

In grafischer Darstellung:



Das Ergebnis der Elliptischen Regression am Beispiel.
Graue Ellipse, angegeben in [Dipb]

4.2 Kreisregression

Beispiel entnommen aus [Dipb].

i	X_i	Y_i	$(X_i - X_M) \cdot (Y_i - Y_M)$
1	+0, 192 2	-6, 340 0	+0, 123 957
2	+0, 014 9	-7, 213 8	-0, 058 961
3	-0, 208 7	-6, 511 2	-0, 022 972
4	-0, 001 9	-6, 610 3	+0, 015 107
5	+0, 031 8	-6, 565 2	+0, 026 216
6	-0, 008 3	-6, 662 1	+0, 008 872
7	-0, 320 6	-6, 644 1	-0, 021 696
8	-0, 592 7	-7, 436 8	+0, 331 369
8	-0, 893 3	-53, 983 5	+0, 401 892

$X_i \cdot X_i$	$X_i \cdot Y_i$	$(X_i - X_M)^2$	$(Y_i - Y_M)^2$
+0, 036 941	-1, 218 548	+0, 092 333	+0, 166 413
+0, 000 222	-0, 107 486	+0, 016 018	+0, 217 027
+0, 043 556	+1, 358 889	+0, 009 416	+0, 056 045
+0, 000 004	+0, 012 560	+0, 012 048	+0, 018 944
+0, 001 011	-0, 208 773	+0, 020 582	+0, 033 393
+0, 000 069	+0, 055 295	+0, 010 684	+0, 007 368
+0, 102 784	+2, 130 098	+0, 043 655	+0, 010 782
+0, 351 293	+4, 407 791	+0, 231 397	+0, 474 531
+0, 535 880	+6, 429 826	+0, 436 133	+0, 984 503

Woraus sich folgende Werte ergeben:

$$\bar{X} = \frac{\{X_i\}}{n} = -\frac{0,8933}{8} = -0,112 \qquad \bar{Y} = \frac{\{Y_i\}}{n} = -\frac{53,9835}{8} = -6,748$$

$$\begin{aligned} V_{XX} &= +0,436133 \\ C = C_{XY} = C_{YX} &= 0 \\ V_{YY} &= +0,984503 \end{aligned}$$

$$R^2 = \frac{V_{XX} + V_{YY}}{16} = \frac{0,436133 + 0,984503}{16} = 0,089$$

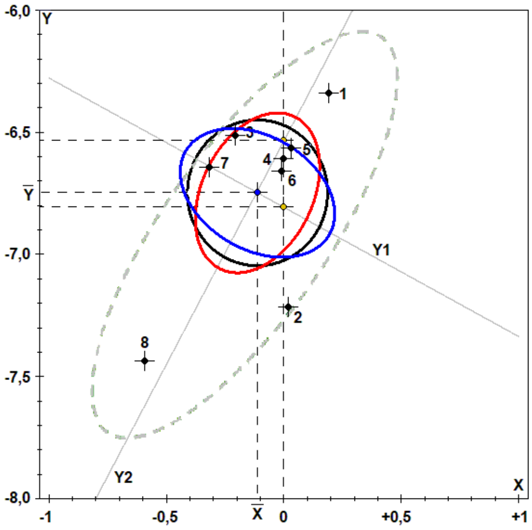
Damit ist die Kreisfunktionsgleichung bereits definiert.

$$Y = \bar{Y} \pm \sqrt{R^2 - (X - \bar{X})^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2} = -6,748 \pm \sqrt{0,089 - (X + 0,112)^2}$$

In grafischer Darstellung:



Das Ergebnis der Elliptischen Regression am Beispiel.
Graue Ellipse, angegeben in [Dipb].
Schwarz die Kreisregression.

LaTeX 2_ε