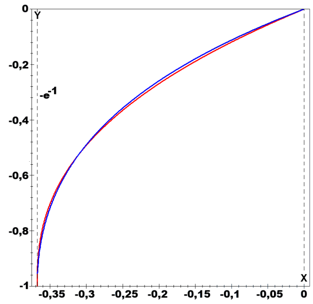
Die Approximation der negativen oberen Lambert W-Funktion



The approximation of the negative upper Lambert W function

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 2. März 2026 - Letzte Revision: 3. März 2026

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Grundfunktion $W^*(x)$

Grundfunktion

Gegeben ist die Funktion

$$W(x)$$

die Lambertsche W-Funktion, speziell hier im dritten Quadranten. Mit [001]

$$-e^{-1} < x \leq 0 \qquad -1 < y \leq 0$$

Gesucht ist ein einfacher analytischer Ausdruck, welcher die Werte der Lambertschen W-Funktion im genannten Intervall hinreichend approximiert. Aus dem Wesen der Lambertschen W-Funktion ist zu vermuten, dass die Funktion

$$W^*(x) = e^{-n} \cdot \left(x + e^{-1}\right)^{-n} - 1$$

die Lambertsche W-Funktion genügend genau nachbilden kann. Im Folgenden soll n ermittelt werden.

2 Variable n

Variable n

Gesucht ist das Flächenintegral.

$$\int W(x) = \int_{-e^{-1}}^{0} W(x) \cdot \mathrm{d}x$$

Ebenfalls das Flächenintegral der Ersatzfunktion.

$$\int W^{*}(x) = \int_{-e^{-1}}^{0} \left(e^{-n} \cdot \left(x + e^{-1}\right)^{-n} - 1 \right) \cdot \mathrm{d}x$$

Die Minimalfläche F_{MIN} beider Integrale wird benötigt,

$$F_{MIN} = \int W(x) - \int W^{*}(x) \to 0$$

$\Rightarrow$

$$0 = F_{MIN} = \frac{2 \cdot e^{-1} + \left(3 \cdot e^{-1} - 1\right) \cdot n - 1}{1 + n}$$

Damit ist n definiert.

$$\frac{1 - 2 \cdot e^{-1}}{3 \cdot e^{-1} - 1} = n \approx 2,55$$

3 Anhang

3.1 Zusammenfassung

Zusammenfassung

- Die Ersatzfunktion

$$W^*(x) = e^{-n} \cdot \left(x + e^{-1}\right)^{-n} - 1$$

mit

$$n = \frac{1 - 2 \cdot e^{-1}}{3 \cdot e^{-1} - 1}$$

ersetzt die Lambertsche W-Funktion in den Intervallen

$$-e^{-1} < x \leq 0 \qquad\qquad -1 < y \leq 0$$

im hinreichenden Maße.

- Die ersten zwei Ableitungen.

$$W^*(x) = e^{-n} \cdot \left(x + e^{-1}\right)^{-n} - 1$$

$$W^*(x) \approx 0,078 \cdot \left(x + e^{-1}\right)^{-2{,}55} - 1$$

$\Rightarrow$

$$W^{*\prime}(x) = n^{-1} \cdot e^{-n} \cdot \left(x + e^{-1}\right)^{\frac{1-n}{n}}$$

$$W^{*\prime}(x) \approx 0,031 \cdot \left(x + e^{-1}\right)^{-0{,}608}$$

$\Rightarrow$

$$W^{*\prime\prime}(x) = -n^{-2} \cdot (n-1) \cdot e^{-n} \cdot \left(x + e^{-1}\right)^{\frac{1-2n}{n}}$$

$$W^{*\prime\prime}(x) \approx 0,019 \cdot \left(x + e^{-1}\right)^{-1{,}608}$$

- Die erste Aufleitung.

$$\int W^*(x) = \frac{n}{1+n} \cdot e^{-n} \cdot \left(x + e^{-1}\right)^{\frac{1+n}{n}} - x$$

$$\int W^*(x) \approx 0,056 \cdot \left(x + e^{-1}\right)^{1{,}392} - x$$

$\Rightarrow$

$$\int_{-e^{-1}}^{0} W^*(x) = \int_{-e^{-1}}^{0} W(x) = -\frac{e^{-1}}{1+n}$$

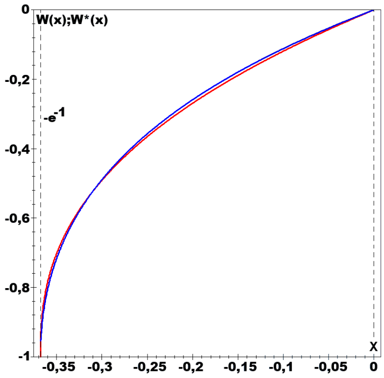
$$\int_{-e^{-1}}^{0} W^*(x) = \int_{-e^{-1}}^{0} W(x) = 1 - 3 \cdot e^{-1}$$

$$\int_{-e^{-1}}^{0} W^*(x) = \int_{-e^{-1}}^{0} W(x) \approx -0,104$$

3.2 Grafische Darstellungen

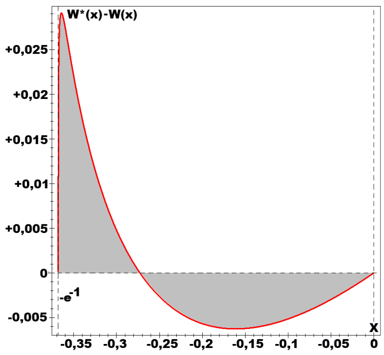
Grafische Darstellung

- Die Funktion $W\left(x\right)$ und $W^{*}\left(x\right)$



Darstellung von $W\left(x\right)$ und $W^{*}\left(x\right)$

- Die Differenz $W\left(x\right)-W^{*}\left(x\right)$



Die Differenz $W^{*}\left(x\right)-W\left(x\right)$.
Grau eingezeichnet die Minimalfläche F_{MIN}

$\LaTeX\ 2_{\varepsilon}$