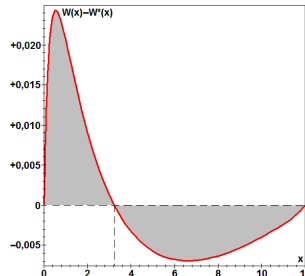


# Die Approximation der positiven oberen Lambert W-Funktion



## The approximation of the positive upper Lambert $W$ function

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

[www.Zenithpoint.de](http://www.Zenithpoint.de)

Erstellt: 25. Oktober 2024 - Letzte Revision: 13. Februar 2026

### Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundfunktion <math>W^*(x)</math></b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Koeffizienten <math>a</math> und <math>b</math></b>	<b>5</b>
2.1	Definition . . . . .	5
2.2	Berechnung . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Anhang</b>	<b>9</b>
3.1	Zusammenfassung . . . . .	9
3.2	Grafische Darstellungen . . . . .	10

---

### Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---



## 1 Grundfunktion $W^*(x)$

Gegeben ist die Funktion

$$W(x)$$

Grundfunktion

die Lambert W-Funktion, speziell hier im ersten Quadranten. Daher:

[001]

$$x \geq 0$$

Gesucht ist ein einfacher analytischer Ausdruck, welcher die Werte der Lambert W-Funktion im genannten Intervall hinreichend approximiert. Da für große  $x$ -Werte bereits Lösungen existieren, wird vorliegen folgende Einschränkung festgelegt.

$$0 \leq x \leq 12$$

Aus dem Wesen der Lambert W-Funktion ist zu vermuten, dass die Funktion  $W^*(x)$  mit den enthaltenden Koeffizienten  $a$  und  $b$

$$W^*(x) = a \cdot \ln(b \cdot x + 1)$$

die Lambert W-Funktion genügend genau nachbilden kann. Im Folgendem soll  $a$  und  $b$  definiert werden.



## 2 Koeffizienten $a$ und $b$

Koeffizienten  
 $a$  und  $b$

### 2.1 Definition

Gesucht ist das Flächenintegral.

$$\int_0^m W(m) = \int_0^m W(x) \cdot dx \quad \text{für} \quad 0 < m \leq 12$$

Ebenfalls das Flächenintegral der Ersatzfunktion, für das es eine analytische Lösung gibt.

$$\int W^*(m) = a \cdot \int_0^m \ln(b \cdot x + 1) \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$\int W^*(m) = \frac{a}{b} \cdot (b \cdot m \cdot \ln(b \cdot m + 1) + \ln(b \cdot m + 1) - b \cdot m)$$

Die Minimalfläche  $F_{MIN}$  beider Integrale wird benötigt,

$$F_{MIN} = \int W(m) - \int W^*(m) \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$

$$0 = \int W(m) - \frac{a}{b} \cdot (b \cdot m \cdot \ln(b \cdot m + 1) + \ln(b \cdot m + 1) - b \cdot m)$$

Damit ist  $a$  definiert.

$$a = \frac{b}{b \cdot m \cdot \ln(b \cdot m + 1) + \ln(b \cdot m + 1) - b \cdot m} \cdot \int W(m)$$

Der Wert für  $b$  kann ermittelt werden mit der Forderung, dass  $F_{MIN}$  abgeschlossen ist, also gilt.

$$W(0) = 0 \quad \text{und} \quad W^*(0) = 0$$

Diese Forderung „links am Rande“ des betrachteten Intervalls ist „von Hause aus“ immer erfüllt. Bleibt der rechte Intervallrand. Für die Forderung

$$W(m) = W^*(m)$$

$\Rightarrow$

$$W(m) = a \cdot \ln(b \cdot m + 1)$$

gilt also

$$W(m) = \frac{b \cdot \ln(b \cdot m + 1)}{b \cdot m \cdot \ln(b \cdot m + 1) + \ln(b \cdot m + 1) - b \cdot m} \cdot \int W(m)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{b \cdot \ln(b \cdot m + 1)}{b \cdot m \cdot \ln(b \cdot m + 1) + \ln(b \cdot m + 1) - b \cdot m} = \frac{W(m)}{\int W(m)}$$

Damit ist  $b$  definiert, da obige Gleichung Lösungen liefert.

Berechnung

**2.2 Berechnung**Das Berechnen der konkreten Werte von  $a$  und  $b$  ist trivial. Zuerst der Term

$$\frac{W(m)}{\int W(m)}$$

⇒

$m$	$W(m)$	$\frac{1}{\int W(m)}$	$\frac{W(m)}{\int W(m)}$
1	0,567	3,027	1,717
2	0,853	0,952	0,811
3	1,050	0,498	0,523
4	1,202	0,319	0,383
5	1,327	0,227	0,301
6	1,432	0,173	0,248
7	1,524	0,138	0,210
8	1,605	0,113	0,182
9	1,679	0,095	0,160
10	1,746	0,082	0,143
11	1,807	0,072	0,129
12	1,863	0,063	0,118

Damit ist im linken Term der Wert  $b$  ermittelbar.

$m$	$b$
1	1,737
2	1,618
3	1,541
4	1,485
5	1,440
6	1,403
7	1,372
8	1,345
9	1,322
10	1,300
11	1,282
12	1,264

Für  $b = 1,403$  wird festgelegt:

$$b_{m=6} \approx \sqrt{2}$$

Für  $a$  folgt dann:

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \ln(\sqrt{2} \cdot 6 + 1) + \ln(\sqrt{2} \cdot 6 + 1) - \sqrt{2} \cdot 6} \cdot 5,783188774 = 0,636$$

⇒

$$a_{m=6} \approx \frac{2}{\pi}$$

Was letztendlich zu  $W^*(x)$  führt:

$$W^*(x)_{m=6} = \frac{2}{\pi} \cdot \ln(\sqrt{2} \cdot x + 1)$$

Informativ folgend, die Werte von  $a$  in Abhängigkeit von  $m$  und  $b$ .

$m$	$b$	$a$
1	1,737	0,563
2	1,618	0,591
3	1,541	0,608
4	1,485	0,621
5	1,440	0,631
6	1,403	0,636
7	1,372	0,646
8	1,345	0,652
9	1,322	0,657
10	1,300	0,661
11	1,282	0,665
12	1,264	0,670

Für  $m = 12$  ergibt sich dann ein  $W^*(x)$  von:

$$W^*(x)_{m=12} = e^{-\frac{2}{5}} \cdot \ln(\sqrt[3]{2} \cdot x + 1)$$

Die Wahl von  $m$  entscheidet über den Approximationsfehler im Intervall  $0 \leq x \leq m$ .



## 3 Anhang

Anhang

### 3.1 Zusammenfassung

Zusammenfassung

#### • Approximation

Gegeben ist die Lambert W-Funktion  $W(x)$ , die durch eine Ersatzfunktion  $W^*(x)$  im Intervall  $0 \leq x \leq 12$  approximiert wird. Zur Optimierung des Ergebnisses kann das maximal zur Verfügung stehende Intervall eingeschränkt werden mit Hilfe der oberen Intervallschranke  $0 < m \leq 12$ .

Damit ergibt sich die Approximationsfunktion

$$W^*(x)_m = a(m) \cdot \ln(b(m) \cdot x + 1)$$

mit den von  $m$  abhängigen Koeffizienten  $a$  und  $b$ . Nutzbare Werte sind im Abschnitt „Berechnung“ aufgeführt. Für  $m = 6$  und  $m = 12$  sind zwei spezielle  $W^*(x)$  aufgezeigt.

$$W^*(x)_{m=6} = \frac{2}{\pi} \cdot \ln(\sqrt{2} \cdot x + 1) \quad W^*(x)_{m=12} = e^{-\frac{2}{3}} \cdot \ln(\sqrt[3]{2} \cdot x + 1)$$

#### • Derivate

Aus den Berechnungsgrundlagen für  $a$  und  $b$  folgt:

$$a = \frac{b}{b \cdot m \cdot \ln(b \cdot m + 1) + \ln(b \cdot m + 1) - b \cdot m} \cdot f W(m)$$

$$W(m) = \ln(b \cdot m + 1) \cdot \frac{b}{b \cdot m \cdot \ln(b \cdot m + 1) + \ln(b \cdot m + 1) - b \cdot m} \cdot f W(m)$$

⇒

$$a \cdot \ln(b \cdot m + 1) = W(m)$$

Mit der Definition von  $m$  gilt dann auch die Allgemeingültigkeit für  $x$ .

Ein spezieller Punkt ist bekannt:

$$W(e^1) = 1 \quad W^*(e^1)_{m=6} = 1,004451 \dots \quad W^*(e^1)_{m=12} = 1,057623 \dots$$

Für  $x = 1$  lässt sich über die Lambert W-Funktion die Omegakonstante ermitteln:

$$W(1) = 0,56714329 \dots \quad W^*(1)_{m=6} = 0,56109985 \dots \quad W^*(1)_{m=12} = 0,54653196 \dots$$

Die erste Ableitung:

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x \cdot (1 + W(x))} \quad \text{mit } x \neq 0 \quad W^{*'}(x) = \frac{a \cdot b}{b \cdot x + 1}$$

Die zweite Ableitung:

$$W''(x) = -\frac{W^2(x)}{x^2 \cdot (1 + W(x))^3} \cdot (W(x) + 2) \quad \text{mit } x \neq 0 \quad W^{*''}(x) = -\frac{a \cdot b^2}{(b \cdot x + 1)^2}$$

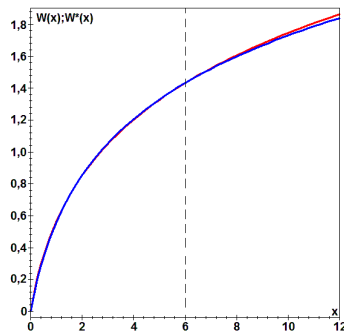
Ein spezielles Integral:

$$\int_0^{+\infty} \frac{W(x)}{x\sqrt{x}} \cdot dx = \sqrt{8\pi} \approx 5,01326$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{W^*(x)_{m=6}}{x\sqrt{x}} \cdot dx \approx 4,75683 \quad \int_0^{+\infty} \frac{W^*(x)_{m=12}}{x\sqrt{x}} \cdot dx \approx 4,72752$$

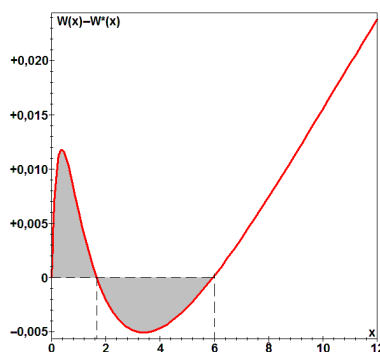
### 3.2 Grafische Darstellungen

- Funktion  $W(x)$  und  $W^*(x)_{m=6}$



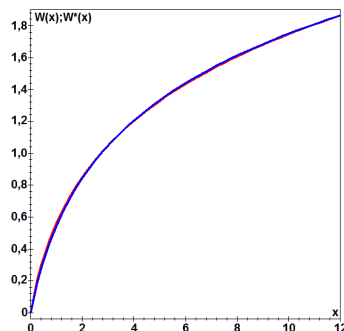
Darstellung von  $W(x)$  und  $W^*(x)_{m=6}$  für das Intervall  $0 \leq x \leq 12$ .

- Differenz  $W(x) - W^*(x)_{m=6}$



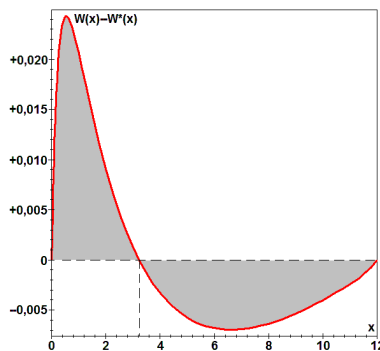
Die Differenz  $W(x) - W^*(x)_{m=6}$  für das Intervall  $0 \leq x \leq 12$ .  
Grau eingezeichnet die Minimalfläche  $F_{MIN}$  für  $m = 6$ .

- Funktion  $W(x)$  und  $W^*(x)_{m=12}$



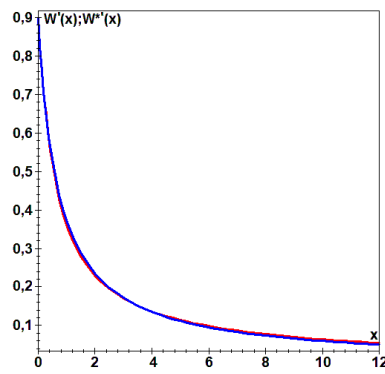
Darstellung von  $W(x)$  und  $W^*(x)_{m=12}$  für das Intervall  $0 \leq x \leq 12$ .

- Differenz  $W(x) - W^*(x)_{m=12}$

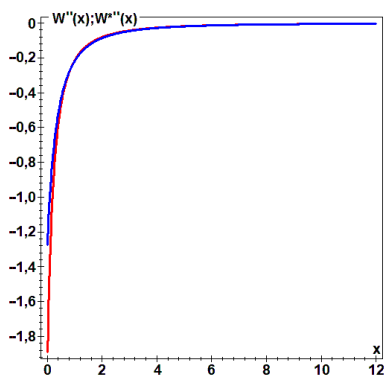


Die Differenz  $W(x) - W^*(x)_{m=12}$  für das Intervall  $0 \leq x \leq 12$ .  
Grau eingezeichnet die Minimalfläche  $F_{MIN}$  für  $m = 12$ .

## • Erste Ableitung

Darstellung von  $W'(x)$  und  $W^{*'}(x)_{m=6}$  für das Intervall  $0 \leq x \leq 12$ .

## • Zweite Ableitung

Darstellung von  $W''(x)$  und  $W^{*''}(x)_{m=6}$  für das Intervall  $0 \leq x \leq 12$ .

LaTeX 2<sub>ε</sub>