Die unvollständige Regression der Normalfunktion

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 19. Oktober 2021 – Letzte Revision: 20. Oktober 2021

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

[Dip] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. (Polynom)Regression von Datenpunkten.

1 Die Regression der Normalfunktion

1.1 Methode

Gegeben ist die Normalfunktion: [001]ff.

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Dabei beschreibt μ die Lage des Maximums und σ die Breite der Funktion.

Die Aufgabe ist es, eine Regressionsvorschrift zu finden. Dafür wird taylorisiert:

$$f(x)_T = 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{(x-\mu)^4}{\sigma^4}-\frac{1}{48}\cdot\frac{(x-\mu)^6}{\sigma^6}+\ldots = 1+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^i}{\prod\limits_{j=1}^{i} 2\cdot j}\cdot\frac{(x-\mu)^{2\cdot i}}{\sigma^{2\cdot i}}\right)$$

Bedingt durch die Symmetrie reicht der quadratische Ausdruck für $i = 1\cdots 1$.

$$f(x)_T \equiv 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}$$

$\Rightarrow$

$$f(x)_T = -\frac{1}{2\cdot\sigma^2}\cdot x^2+\frac{\mu}{\sigma^2}\cdot x+\frac{2\cdot\sigma^2-\mu^2}{2\cdot\sigma^2}$$

$\Leftarrow$

$$P(x) = a_3\cdot x^3+a_2\cdot x^2+a_1\cdot x+a_0$$

Damit ist festgestellt, dass eine kubische Polynomregression die Parameter der Normalfunktion bestimmen kann. Für die Koeffizienten gilt:

$$a_3 = 0 \qquad a_2 = -\frac{1}{2\cdot\sigma^2} \qquad a_1 = \frac{\mu}{\sigma^2} \qquad a_0 = \frac{2\cdot\sigma^2-\mu^2}{2\cdot\sigma^2}$$

Dabei kann als Kontrolle genutzt werden:

$$a_3 = 0 \qquad a_2 < 0$$

1.2 Ermittlung der Koeffizienten

Für die Notation siehe [Dip].

1.2.1 Koeffizient a_3

$$a_3 = 0 = \frac{T}{S}$$

$\Rightarrow$

$$T = 0 = \frac{O}{M} - \frac{R}{P}$$

$\Rightarrow$

$$R \cdot M = O \cdot P$$

Mit:

$$R = \frac{D}{A} - \frac{L}{I} \qquad M = \frac{B}{A} - \frac{F}{E} \qquad O = \frac{D}{A} - \frac{H}{E} \qquad P = \frac{B}{A} - \frac{J}{I}$$

Mit:

$$A = V - \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \qquad B = W - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \qquad D = U - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}}$$

$$E = V - \frac{\{x^3\}}{\{x^2\}} \qquad F = W - \frac{\{x^4\}}{\{x^2\}} \qquad H = U - \frac{\{x^2 \cdot y\}}{\{x^2\}}$$

$$I = V - \frac{\{x^4\}}{\{x^3\}} \qquad J = W - \frac{\{x^5\}}{\{x^3\}} \qquad L = U - \frac{\{x^3 \cdot y\}}{\{x^3\}}$$

Mit:

$$U = \frac{\{y\}}{n} \qquad V = \frac{\{x\}}{n} \qquad W = \frac{\{x^2\}}{n}$$

Im eigentlichen Sinne würde eine quadratische Regression ausreichen, jedoch ist mit $a_3 = 0$ bzw. $T = 0$ bei der kubischen Regression eine Kontrollmöglichkeit definiert.

1.2.2 Koeffizient a_2

$$a_2 = \frac{O}{M} - \frac{N}{M} \cdot a_3 = -\frac{1}{2 \cdot \sigma_*^2} < 0$$

Da $a_3 = 0$ gegeben ist, gilt:

$$a_2 = \frac{O}{M} < 0$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_*^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{M}{O}$$

Mit:

$$M = \frac{B}{A} - \frac{F}{E} \qquad O = \frac{D}{A} - \frac{H}{E}$$

Mit:

$$A = V - \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \qquad B = W - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \qquad D = U - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}}$$

$$E = V - \frac{\{x^3\}}{\{x^2\}} \qquad F = W - \frac{\{x^4\}}{\{x^2\}} \qquad H = U - \frac{\{x^2 \cdot y\}}{\{x^2\}}$$

Mit:

$$U = \frac{\{y\}}{n} \qquad V = \frac{\{x\}}{n} \qquad W = \frac{\{x^2\}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B}{A} < \frac{F}{E}$$

1.2.3 Koeffizient a_1

$$a_1 = \frac{D}{A} - \frac{B}{A} \cdot a_2 - \frac{C}{A} \cdot a_3 = \frac{\mu}{\sigma^2}$$

Da $a_3 = 0$ und $a_2 = -\frac{1}{2 \cdot \sigma_*^2}$ und gegeben ist, gilt:

$$\mu = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \sigma_*^2 \cdot D + B}{A}$$

Mit:

$$A = V - \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \qquad B = W - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \qquad D = U - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}}$$

Mit:

$$U = \frac{\{y\}}{n} \qquad V = \frac{\{x\}}{n} \qquad W = \frac{\{x^2\}}{n}$$

1.2.4 Koeffizient a_0

Für den Koeffizienten a_0 gibt es drei Berechnungsmöglichkeiten. Daher auch die Unterscheidung von σ^2, σ_*^2 und σ_{**}^2.

Möglichkeit 1:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \cdot \left\{ (x-\mu)^2 \right\} = \frac{\left\{x^2\right\}}{n} - 2 \cdot \mu \cdot \frac{\{x\}}{n} + \mu^2$$

$\Rightarrow$

$$\sigma^2 = W - 2 \cdot \mu \cdot V + \mu^2$$

Mit:

$$V = \frac{\{x\}}{n} \qquad W = \frac{\left\{x^2\right\}}{n}$$

Möglichkeit 2:

$$\sigma_*^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{M}{O}$$

$\Rightarrow$

$$a_0^* = \frac{2 \cdot \sigma_*^2 - \mu^2}{2 \cdot \sigma_*^2}$$

Möglichkeit 3:

$$a_0^{**} = U - V \cdot a_1 - W \cdot a_2$$

Mit:

$$U = \frac{\{y\}}{n} \qquad V = \frac{\{x\}}{n} \qquad W = \frac{\left\{x^2\right\}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_{**}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu^2}{1 - a_0^{**}}$$

2 Zusammenfassung

Der Mittelwert wird berechnet:

$$\mu = V = \frac{\{x\}}{n}$$

Die Standardabweichung lässt sich ermitteln nach - **Möglichkeit 1**:

$$\sigma^2 = W - V^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\left\{ x^2 \right\} \cdot n - \{x\}^2 \right)$$

$\Rightarrow$

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$\Rightarrow$

$$f(x)_T = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}$$

Die Standardabweichung lässt sich ermitteln nach - **Möglichkeit 2**:

$$\sigma_*^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{M}{O}$$

$\Rightarrow$

$$f(x)_T = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-\mu)^2}{\sigma_*^2}$$

Die Standardabweichung lässt sich ermitteln nach - **Möglichkeit 3**:

$$a_2 = \frac{O}{M} \qquad a_1 = \frac{D}{A} - \frac{B}{A} \cdot a_2 \qquad a_0 = U - V \cdot a_1 - W \cdot a_2$$

$\Rightarrow$

$$P(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$\Rightarrow$

$$P(x) = -\frac{1}{2 \cdot \sigma_*^2} \cdot x^2 + \frac{\mu}{\sigma_*^2} \cdot x + \frac{2 \cdot \sigma_{**}^2 - \mu^2}{2 \cdot \sigma_{**}^2}$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_{**}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu^2}{1 - a_0}$$

Kontrolle über alles:

$$T = 0 \qquad a_2 < 0$$

3 Beispiel

Die Datenpaare folgen einer Normalfunktion, da gilt $T = 0$ und $a_2 = -0,0282 < 0$ [1].

n	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1
3	2	4	8	16	32	64
4	3	9	27	81	243	729
5	4	16	64	256	1 024	4 096
6	5	25	125	625	3 125	15 625
7	6	36	216	1 296	7 776	46 656
8	7	49	343	2 401	16 807	117 649
9	8	64	512	4 096	32 768	262 144
10	9	81	729	6 561	59 049	531 441
11	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
11	**55**	**385**	**3 025**	**25 333**	**220 825**	**1 978 405**
n	$x^0 \cdot f(x)$	$x^1 \cdot f(x)$	$x^2 \cdot f(x)$	$x^3 \cdot f(x)$		
1	0, 286 505	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000		
2	0, 449 329	0, 449 329	0, 449 329	0, 449 329		
3	0, 637 628	1, 275 256	2, 550 513	5, 101 025		
4	0, 818 731	2, 456 192	7, 368 577	22, 105 730		
5	0, 951 229	3, 804 918	15, 219 671	60, 878 683		
6	1, 000 000	5, 000 000	25, 000 000	125, 000 000		
7	0, 951 229	5, 707 377	34, 244 259	205, 465 556		
8	0, 818 731	5, 731 115	40, 117 807	280, 824 648		
9	0, 637 628	5, 101 025	40, 808 202	326, 465 614		
10	0, 449 329	4, 043 961	36, 395 646	327, 560 815		
11	0, 286 505	2, 865 048	28, 650 480	286, 504 797		
11	**7, 286 844**	**36, 434 221**	**230, 804 483**	**1 640, 356 197**		

$\Rightarrow$

$$\mu = \frac{\{x\}}{n} = \frac{55}{11} = 5$$

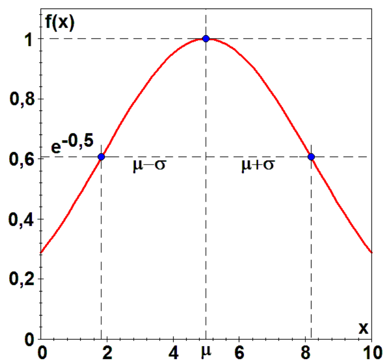
$\Rightarrow$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\{x^2\} \cdot n - \{x\}^2 \right) = \frac{1}{11^2} \cdot \left(385 \cdot 11 - 55^2 \right) = 10$$

$\Rightarrow$

$$f(x) = e^{-\frac{1}{20} \cdot (x-5)^2}$$

$\Rightarrow$

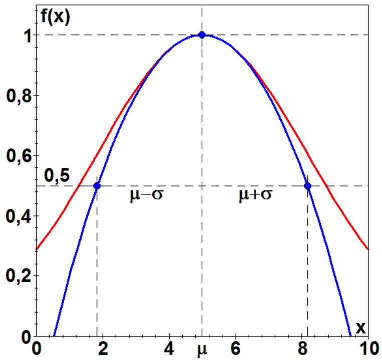


$\Rightarrow$

$$f(x)_T = 1 - \frac{1}{20} \cdot (x-5)^2$$

$\Rightarrow$

[1] Berechnung dazu siehe Maple©-Classic-Worksheet auf www.ZenithPoint.de

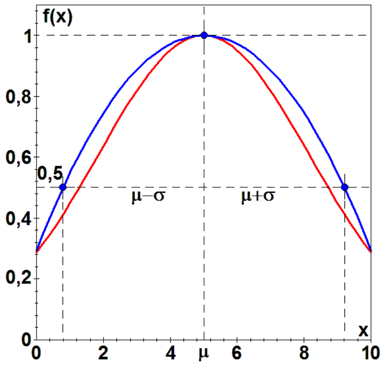


⇒

$$\sigma_*^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{M}{O} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{-0,780}{0{,}022} = 17,702$$

⇒

$$f(x)_T = 1 - \frac{1}{35,403} \cdot (x-5)^2$$



⇒

$$a_2 = \frac{O}{M} = \frac{0,022}{-0,780} = -0,0282 < 0$$
$$a_1 = \frac{D}{A} - \frac{B}{A} \cdot a_2 = \frac{0}{-2} - \frac{-20}{-2} \cdot (-0,0282) = 0,282$$
$$a_0 = U - V \cdot a_1 - W \cdot a_2 = 0,662 - 5 \cdot 0,282 - 35 \cdot (-0,0282) = 0,239$$

⇒

$$P(x) = -0,0282 \cdot x^2 + 0,282 \cdot x + 0,239$$

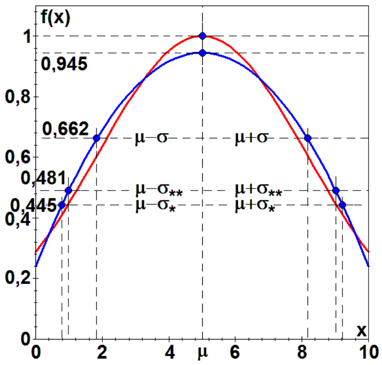
⇒

$$P(x) = -\frac{1}{2 \cdot \sigma_*^2} \cdot x^2 + \frac{\mu}{\sigma_*^2} \cdot x + \frac{2 \cdot \sigma_{**}^2 - \mu^2}{2 \cdot \sigma_{**}^2}$$

⇒

$$\sigma_{**}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu^2}{1 - a_0^{**}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{1 - 0,239} = 16,42$$

⇒



4 Zusatz

4.1 Mittelwert μ

$$f\left(\mu\right) = e^{-\frac{1}{20}\cdot\left(\mu-5\right)^2} = 1$$

Sowie:

$$f\left(\mu\right)_T = 1 - \frac{1}{20}\cdot\left(\mu-5\right)^2 = 1$$

Sowie:

$$f\left(\mu\right)_T = 1 - \frac{1}{35,403}\cdot\left(\mu-5\right)^2 = 1$$

Sowie:

$$P\left(\mu\right) = -0,0282\cdot\mu^2 + 0,282\cdot\mu + 0,239 = 0,945$$

4.2 Standardabweichung σ

$$e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;2} = \mu \pm \sigma$$

Sowie:

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;2} = \mu \pm \sigma$$

Sowie:

$$P(\mu \pm \sigma_*) = a_2 \cdot (\mu \pm \sigma_*)^2 + a_1 \cdot (\mu \pm \sigma_*) + a_0$$

$\Rightarrow$

$$P(\mu \pm \sigma_*) = -\frac{1}{2\cdot\sigma_*^2}\cdot(\mu \pm \sigma_*)^2 + \frac{\mu}{\sigma_*^2}\cdot(\mu \pm \sigma_*) + \frac{2\cdot\sigma_{**}^2 - \mu^2}{2\cdot\sigma_{**}^2}$$

$\Rightarrow$

$$P(\mu \pm \sigma_*) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{\mu^2}{\sigma_*^2} - \frac{\mu^2}{\sigma_{**}^2}\right)$$

$\Rightarrow$

$$P(\mu \pm \sigma_*) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{25}{17,702} - \frac{25}{16,42}\right) = 0,445$$

Oder:

$$P(\mu \pm \sigma_{**}) = -\frac{1}{2\cdot\sigma_*^2}\cdot(\mu \pm \sigma_{**})^2 + \frac{\mu}{\sigma_*^2}\cdot(\mu \pm \sigma_{**}) + \frac{2\cdot\sigma_{**}^2 - \mu^2}{2\cdot\sigma_{**}^2}$$

$\Rightarrow$

$$P(\mu \pm \sigma_{**}) = \frac{1}{2\cdot\sigma_*^2}\cdot\left(\frac{\sigma_{**}^2 - \sigma_*^2}{\sigma_{**}^2}\cdot\mu^2 + 2\cdot\sigma_*^2 - \sigma_{**}^2\right)$$

$\Rightarrow$

$$P(\mu \pm \sigma_{**}) = \frac{1}{2\cdot 17,702}\cdot\left(\frac{16,42 - 17,702}{16,42}\cdot 25 + 2\cdot 17,702 - 16,42\right) = 0,481$$

Oder:

$$P(\mu \pm \sigma) = -\frac{1}{2\cdot\sigma_*^2}\cdot(\mu \pm \sigma)^2 + \frac{\mu}{\sigma_*^2}\cdot(\mu \pm \sigma) + \frac{2\cdot\sigma_{**}^2 - \mu^2}{2\cdot\sigma_{**}^2}$$

$\Rightarrow$

$$P(\mu \pm \sigma) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\mu^2 - \sigma^2}{\sigma_*^2} + \frac{2\cdot\sigma_{**}^2 - \mu^2}{\sigma_{**}^2}\right)$$

$\Rightarrow$

$$P(\mu \pm \sigma) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{25 - 10}{17,702} + \frac{2\cdot 16,42 - 25}{16,42}\right) = 0,662$$

Sowie:

$$\frac{1}{2}\cdot P(\mu) = -\frac{1}{2\cdot\sigma_*^2}\cdot x^2 + \frac{\mu}{\sigma_*^2}\cdot x + \frac{2\cdot\sigma_{**}^2 - \mu^2}{2\cdot\sigma_{**}^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2\cdot\sigma_*^2}\cdot\mu^2 + \frac{\mu}{\sigma_*^2}\cdot\mu + \frac{2\cdot\sigma_{**}^2 - \mu^2}{2\cdot\sigma_{**}^2}\right) = -\frac{1}{2\cdot\sigma_*^2}\cdot x^2 + \frac{\mu}{\sigma_*^2}\cdot x + \frac{2\cdot\sigma_{**}^2 - \mu^2}{2\cdot\sigma_{**}^2}$$

$\Rightarrow$

$$x^2 - 2\cdot\mu\cdot x + \frac{\mu^2\cdot\sigma_*^2 - 2\cdot\sigma_*^2\cdot\sigma_{**}^2 + \mu^2\cdot\sigma_{**}^2}{2\cdot\sigma_{**}^2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;2} = \mu \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{2}\cdot\left(1 - \frac{\sigma_*^2}{\sigma_{**}^2}\right) + \sigma_*^2} = \mu \pm \sigma_{eff}$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;2} = 5 \pm \sqrt{\frac{25}{2} \cdot \left(1 - \frac{17,702}{16,42}\right) + 17,702} = 5 \pm 4,09$$

$\Rightarrow$

$$x_1 = 0,910 \qquad x_2 = 9,09$$

Mit:

$$P\left(x_{1;2}\right) = 0,472 = \frac{1}{2} \cdot P\left(\mu\right) = \frac{1}{2} \cdot 0,945$$

$\LaTeX\,2_\varepsilon$