Die vollständige Regression der Normalfunktion

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 19. April 2023 – Letzte Revision: 14. Mai 2023

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[Dipa] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Die (Polynom)Regression von Datenpunkten. www.Zenithpoint.de.

[Dipb] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Die unvollständige Regression der Normalfunktion. www.Zenithpoint.de.

---

1 Herleitung

1.1 Grundlagen

[Dipb]

Gegeben ist die leicht modifizierte Normalfunktion:

$$N\left(x,\gamma,\omega_0\right)=e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\omega_0)^2}{\gamma^2\cdot\omega_0^2}}$$

In taylorisierter Schreibweise lässt sich diese Funktion allgemein darstellen durch:

$$N(x,\gamma,\omega_0)_T=1+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^i}{\prod_{j=1}^{i}2\cdot j}\cdot\left(\frac{x-\omega_0}{\omega_0\cdot\gamma}\right)^{2\cdot i}\right)$$

Die ersten drei Glieder sollen hier ausreichend sein.

$$N(x,\gamma,\omega_0)_T=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\omega_0)^2}{\omega_0^2\cdot\gamma^2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{(x-\omega_0)^4}{\omega_0^4\cdot\gamma^4}$$

Expandiert ergibt sich daraus ein biquadratisches Polynom.

$$N(x,\gamma,\omega_0)_T=\frac{1}{8\cdot\omega_0^4\cdot\gamma^4}\cdot x^4-\frac{4}{8\cdot\omega_0^3\cdot\gamma^4}\cdot x^3+\frac{6-4\cdot\gamma^2}{8\cdot\omega_0^2\cdot\gamma^4}\cdot x^2+\frac{8\cdot\gamma^2-4}{8\cdot\omega_0\cdot\gamma^4}\cdot x+\frac{1-4\cdot\gamma^2+8\cdot\gamma^4}{8\cdot\gamma^4}$$

Zum Zwecke der Ermittlung der Wendestellen, werden die ersten zwei Ableitungen ermittelt.

$$N(x,\gamma,\omega_0)_T{}'=\frac{4}{8\cdot\omega_0^4\cdot\gamma^4}\cdot x^3-\frac{12}{8\cdot\omega_0^3\cdot\gamma^4}\cdot x^2+\frac{12-8\cdot\gamma^2}{8\cdot\omega_0^2\cdot\gamma^4}\cdot x+\frac{8\cdot\gamma^2-4}{8\cdot\omega_0\cdot\gamma^4}$$

$\Rightarrow$

$$N(x,\gamma,\omega_0)_T{}''=\frac{12}{8\cdot\omega_0^4\cdot\gamma^4}\cdot x^2-\frac{24}{8\cdot\omega_0^3\cdot\gamma^4}\cdot x+\frac{12-8\cdot\gamma^2}{8\cdot\omega_0^2\cdot\gamma^4}=0$$

$\Rightarrow$

$$x^2-2\omega_0\cdot x+\frac{1}{3}\cdot\left(3-2\cdot\gamma^2\right)\cdot\omega_0^2=0$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung.

$$x_{1;2}=\omega_0\pm\omega_0\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\gamma$$

Der Wert ω_0 ist direkt ablesbar.

$$\sigma=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\omega_0\cdot\gamma$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sigma^2}{\omega_0^2}$$

Der Wert γ ist mit einer konstanten Abweichung belegt, das im Ergebnis ablesbar sein wird.

Die Ermittlung der Werte ist über eine biquadratische Regression vollständig durchführbar. Limitierend ist die Genauigkeit der biquadratischen Regression, besonders bei wenigen Daten in der Urliste.

1.2 Regressionvorschrift I

Gegeben ist die leicht modifizierte Normalfunktion:

$$N(x,\gamma,\omega_0) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\omega_0)^2}{\gamma^2\cdot\omega_0^2}}$$

Wie bekannt, befindet sich das Maximum an der Stelle:

$$N(x,\gamma,\omega_0)_{\max} = (\omega_0, 1)$$

Die Wendestellen liegen bei:

$$N(x,\gamma,\omega_0)_{W,1} = \left((1+\gamma)\cdot\omega_0, e^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad N(x,\gamma,\omega_0)_{W,2} = \left((1-\gamma)\cdot\omega_0, e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

In allgemeiner Darstellung:

$$N(x,\gamma,\omega_0)_{W,1} = (x = \omega_0 + \omega_0\cdot\gamma = (1+\gamma)\cdot\omega_0)$$

$$N(x,\gamma,\omega_0)_{W,2} = (x = \omega_0 - \omega_0\cdot\gamma = (1-\gamma)\cdot\omega_0)$$

Es wird die Normalfunktion als Polynom dargestellt.

$$P(N(x,\gamma,\omega_0)) = a_4\cdot x^4 + a_3\cdot x^3 + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x^1 + a_0\cdot x^0$$

Die Koeffizienten können durch eine biquadratische Regression ermittelt werden[1].

Von Interesse ist die zweite Ableitung von P.

$$P(N(x,\gamma,\omega_0))' = 4\cdot a_4\cdot x^3 + 3\cdot a_3\cdot x^2 + 2\cdot a_2\cdot x^1 + a_1\cdot x^0$$

$\Rightarrow$

$$P(N(x,\gamma,\omega_0))'' = 12\cdot a_4\cdot x^2 + 6\cdot a_3\cdot x^1 + 2\cdot a_2\cdot x^0$$

Die Wendestellen werden ermittelt:

$$x^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{a_3}{a_4}\cdot x^1 + \frac{1}{6}\cdot\frac{a_2}{a_4}\cdot x^0 = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{a_3}{a_4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}\cdot\frac{a_3^2}{a_4^2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{a_2}{a_4}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{a_3}{a_4}\cdot\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8}{3}\cdot\frac{a_2\cdot a_4}{a_3^2}}\right)$$

Über der allgemeinen Vorschrift der Wendestellen ist ω_0^2 und γ^2 berechenbar.

$$\omega_0^2 = \frac{1}{16}\cdot\frac{a_3^2}{a_4^2} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{16}\cdot\frac{a_3^2}{a_4^2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{a_2}{a_4} = \omega_0^2\cdot\gamma^2 = \frac{3\cdot a_3^2 - 8\cdot a_2\cdot a_4}{48\cdot a_4^2}$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = 1 - \frac{8}{3}\cdot\frac{a_2\cdot a_4}{a_3^2}$$

$\Rightarrow$

$$0 < 3\cdot a_3^2 > 8\cdot a_2\cdot a_4$$

Damit ist die vollständige Regression der Normalfunktion definiert.

[1] nach [Dipa], Maple-Classic-Worksheet©, unter www.Zenithpoint.de

1.3 Regressionvorschrift II

Aus den Koeffizienten des Polynoms sind die gesuchten Werte direkt ablesbar.

$$a_4 = \frac{1}{8 \cdot \omega_0^4 \cdot \gamma^4} \qquad a_3 = -\frac{4}{8 \cdot \omega_0^3 \cdot \gamma^4}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a_3}{a_4} = -4 \cdot \omega_0$$

Sowie:

$$a_4 = \frac{1}{8 \cdot \omega_0^4 \cdot \gamma^4} \qquad a_2 = \frac{6 - 4 \cdot \gamma^2}{8 \cdot \omega_0^2 \cdot \gamma^4}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a_2}{a_4} = 2 \cdot \left(3 - 2 \cdot \gamma^2\right) \cdot \omega_0^2$$

Oder:

$$a_3 = -\frac{4}{8 \cdot \omega_0^3 \cdot \gamma^4} \qquad a_2 = \frac{6 - 4 \cdot \gamma^2}{8 \cdot \omega_0^2 \cdot \gamma^4}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a_2}{a_3} = \left(\gamma^2 - \frac{3}{2}\right) \cdot \omega_0$$

In den letzten beiden Berechnungsgrundlagen ist oben beschriebene Abweichung von $2/3$ enthalten. Korrigiert ergibt sich dann:

$$\frac{a_2}{a_4} = 2 \cdot \left(3 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \gamma^2\right) \cdot \omega_0^2 \qquad \frac{a_2}{a_3} = \left(\frac{3}{2} \cdot \gamma^2 - \frac{3}{2}\right) \cdot \omega_0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a_2}{a_4} = 6 \cdot \left(1 - \gamma^2\right) \cdot \omega_0^2 \qquad \frac{a_2}{a_3} = \frac{3}{2} \cdot \left(\gamma^2 - 1\right) \cdot \omega_0$$

1.4 Genauigkeitabschätzung

Die Genauigkeit der Regression[2] kann über den Schnittpunkt mit der Ordinate abschätzt werden. So gilt für die modifizierte Normalfunktion:

$$N(0,\gamma,\omega_0) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\gamma^2}}$$

Für die taylorisierte Darstellung ist der Koeffizient a_0 aussagekräftig.

$$a_0(0,\gamma,\omega_0)_T = \frac{1-4\cdot\gamma^2+8\cdot\gamma^4}{8\cdot\gamma^4}$$

Durch ein Verhältnis beider Berechnungsgrundlagen zueinander lässt der Bereich hoher Genauigkeit darstellen durch:

$$R = \frac{N(0,\gamma,\omega_0)}{a_0(0,\gamma,\omega_0)_T} \to 1$$

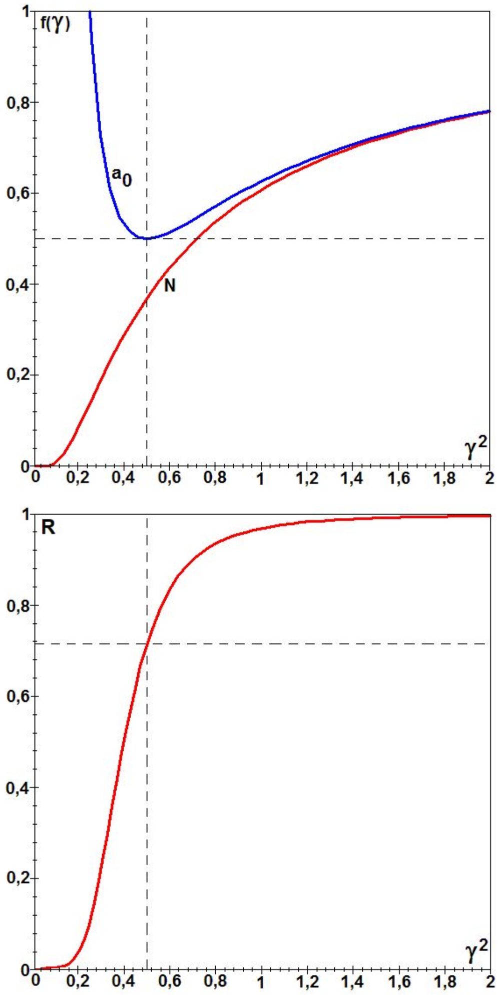
Da $a_0(0,\gamma,\omega_0)_T$ ein Minimum besitzt, ist auch eine Grenze für γ^2 definiert. So sollte gelten:

$$\gamma^2 > \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$

$$\sigma^2 > \frac{1}{2}\cdot\omega_0^2$$

$\Rightarrow$



Grafische Darstellung des Genauigkeitsabschätzers R der Regression der Normalfunktion. Werte von $\gamma^2 < 0,5$ sind möglichst einer Kontrolle zu unterziehen.

[2] R - Genauigkeitsabschätzung zwischen regressierter Polynomfunktion und Normalfunktion unter Nutzung der ermittelten Werte ω_0^2 und γ^2

2 Beispiele

2.1 Beispiel I

Mit $\omega_0^2 = 25$ und $\gamma^2 = 0,4$, daher $\sigma^2 = 10$.

n	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1	1	1
3	2	4	8	16	32	64	128	256
4	3	9	27	81	243	729	2 187	6 561
5	4	16	64	256	1 024	4 096	16 384	65 536
6	5	25	125	625	3 125	15 625	78 125	390 625
7	6	36	216	1 296	7 776	46 656	279 936	1 679 616
8	7	49	343	2 401	16 807	117 649	823 543	5 764 801
9	8	64	512	4 096	32 768	262 144	2 097 152	16 777 216
10	9	81	729	6 561	59 049	531 441	4 782 969	43 046 721
11	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000
11	**55**	**385**	**3 025**	**25 333**	**220 825**	**1 978 405**	**18 080 425**	**167 731 333**

n	$x^0 \cdot f(x)$	$x^1 \cdot f(x)$	$x^2 \cdot f(x)$	$x^3 \cdot f(x)$	$x^4 \cdot f(x)$	
1	0, 286 505	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
2	0, 449 329	0, 449 329	0, 449 329	0, 449 329	0, 449 329	
3	0, 637 628	1, 275 256	2, 550 513	5, 101 025	10, 202 048	
4	0, 818 731	2, 456 192	7, 368 577	22, 105 730	66, 317 211	
5	0, 951 229	3, 804 918	15, 219 671	60, 878 683	243, 514 624	
6	1, 000 000	5, 000 000	25, 000 000	125, 000 000	625, 000 000	
7	0, 951 229	5, 707 377	34, 244 259	205, 465 556	1232, 792 784	
8	0, 818 731	5, 731 115	40, 117 807	280, 824 648	1965, 773 131	
9	0, 637 628	5, 101 025	40, 808 202	326, 465 614	2611, 724 288	
10	0, 449 329	4, 043 961	36, 395 646	327, 560 815	2948, 047 569	
11	0, 286 505	2, 865 048	28, 650 480	286, 504 797	2865, 047 970	
11	**7, 286 844**	**36, 434 221**	**230, 804 483**	**1 640, 356 197**	**12 568, 868 950**	

Nativ sind die gesuchten Werte abschätzbar über[3]:

$$\omega_0^2 = \left(\frac{\{x\}}{n}\right)^2 = \left(\frac{55}{11}\right)^2 = 25$$

$\Rightarrow$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\{x^2\} \cdot n - \{x\}^2\right) = \frac{1}{11^2} \cdot \left(385 \cdot 11 - 55^2\right) = 10$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = \frac{10}{25} = 0,4$$

Über die Regressionsvorschriften ergibt sich[4]:

$$a_4 = +0,00068966$$
$$a_3 = -0,01379317$$
$$a_2 = +0,05796129$$
$$a_1 = +0,11004546$$
$$a_0 = +0,28840569$$

$\Rightarrow$

$$\omega_0^2 = 25 \qquad \sigma^2 = 11$$

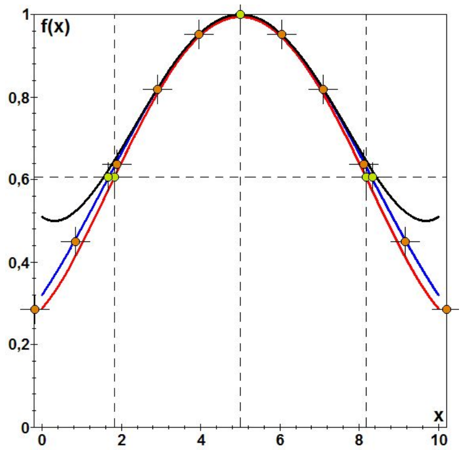
[3] nach [Dipa]

[4] Ermittlung über Maple-Classic-Worksheet©, unter www.Zenithpoint.de

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = 0,44$$

Folgend Beispiel I grafisch dargestellt. Regressiertes Polynom **ROT** im Vergleich zur ermittelten Normalfunktion **BLAU**. **SCHWARZ**, die ersten drei Glieder der taylorisierten Normalfunktion. Ebenfalls eingezeichnet, Urlisten-, Wendepunkte und Mittelwert.



Der Genauigkeitsabschätzer R:

$$R = \frac{N\,(0,\gamma,\omega_0)}{a_0(0,\gamma,\omega_0)_T} = \frac{0,320984}{0,509298} = 0,63$$

2.2 Beispiel II

Mit $\omega_0^2 = 25$ und $\gamma^2 = 0,01$, daher $\sigma^2 = 0,25$.

n	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
-	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0
1	3	9	27	81	243	729	2 187	6 561
2	4	16	64	256	1 024	4 096	16 384	65 536
3	5	25	125	625	3 125	15 625	78 125	390 625
4	6	36	216	1 296	7 776	46 656	279 936	1 679 616
5	7	49	343	2 401	16 807	117 649	823 543	5 764 801
-	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0
5	**25**	**135**	**775**	**4 659**	**28 975**	**184 755**	**1 200 175**	**7 907 139**

n	$x^0 \cdot f(x)$	$x^1 \cdot f(x)$	$x^2 \cdot f(x)$	$x^3 \cdot f(x)$	$x^4 \cdot f(x)$	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
1	0, 000 335	0, 001 006	0, 003 019	0, 009 057	0, 027 172	
2	0, 135 335	0, 541 341	2, 165 365	8, 661 458	34, 645 833	
3	1, 000 000	5, 000 000	25, 000 000	125, 000 000	625, 000 000	
4	0, 135 335	0, 812 012	4, 872 070	29, 232 421	175, 394 527	
5	0, 000 335	0, 002 348	0, 016 438	0, 115 064	0, 805 446	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 062	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
5	**1, 271 340**	**6, 356 707**	**32, 056 892**	**163, 018 000**	**835, 873 040**	

Nativ sind die gesuchten Werte abschätzbar über[5]:

$$\omega_0^2 = \left(\frac{\{x\}}{n}\right)^2 = \left(\frac{25}{5}\right)^2 = 25$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_*^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\{x^2\} \cdot n - \{x\}^2\right) = \frac{1}{5^2} \cdot \left(135 \cdot 5 - 25^2\right) = 2$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = \frac{2}{25} = 0,08$$

Über die Regressionsvorschriften ergibt sich[6]:

$$a_4 = +0,20486427$$
$$a_3 = -4,09727691$$
$$a_2 = +29,66016058$$
$$a_1 = -91,73799900$$
$$a_0 = +102,30532430$$

$\Rightarrow$

$$\omega_0^2 = 25 \qquad \sigma^2 = 0,87$$

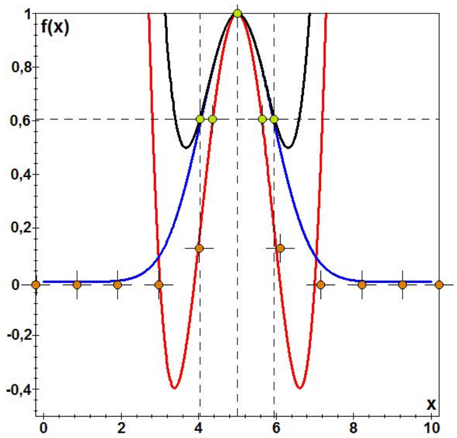
$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = 0,035$$

[5] nach [Dipa]

[6] Ermittlung über Maple-Classic-Worksheet©, unter www.Zenithpoint.de

Folgend Beispiel II grafisch dargestellt. Regressiertes Polynom **ROT** im Vergleich zur ermittelten Normalfunktion **BLAU**. **SCHWARZ**, die ersten drei Glieder der taylorisierten Normalfunktion. Ebenfalls eingezeichnet, Urlisten-, Wendepunkte und Mittelwert.



Obwohl effektiv nur drei Werte in der Urliste zur Verfügung stehen, ergeben sich nutzbare Ergebnisse.

Der Genauigkeitsabschätzer R:

$$R = \frac{N\,(0,\gamma,\omega_0)}{a_0(0,\gamma,\omega_0)_T} = \frac{0,000001}{88,755102} \rightarrow 0$$

$\LaTeX\,2_\varepsilon$