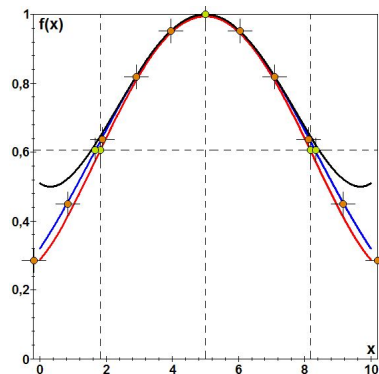


Die vollständige Regression der Normalfunktion



Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 19. April 2023 – Letzte Revision: 6. Januar 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Herleitung	3
1.1	Grundlagen	3
1.2	Regressionvorschrift I	4
1.3	Regressionvorschrift II	5
1.4	Genauigkeitsabschätzung	6
2	Beispiele	7
2.1	Beispiel I	7
2.2	Beispiel II	9

Literatur

- [Dipa] Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc. Die (Polynom)Regression von Datenpunkten.
www.Zenithpoint.de.
- [Dipb] Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc. Die unvollständige Regression der Normalfunktion.
www.Zenithpoint.de.
-

1 Herleitung

1.1 Grundlagen

[Dipb]

Gegeben ist die leicht modifizierte Normalfunktion:

$$N(x, \gamma, \omega_0) = e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x - \omega_0)^2}{\gamma^2 \cdot \omega_0^2}}$$

In Taylorisierter Schreibweise lässt sich diese Funktion allgemein darstellen durch:

$$N(x, \gamma, \omega_0)_T = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^i}{\prod_{j=1}^i 2 \cdot j} \cdot \left(\frac{x - \omega_0}{\omega_0 \cdot \gamma} \right)^{2 \cdot i} \right)$$

Die ersten drei Glieder sollen hier ausreichend sein.

$$N(x, \gamma, \omega_0)_T = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x - \omega_0)^2}{\omega_0^2 \cdot \gamma^2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{(x - \omega_0)^4}{\omega_0^4 \cdot \gamma^4}$$

Expandiert ergibt sich daraus ein biquadratisches Polynom.

$$N(x, \gamma, \omega_0)_T = \frac{1}{8 \cdot \omega_0^4 \cdot \gamma^4} \cdot x^4 - \frac{4}{8 \cdot \omega_0^3 \cdot \gamma^4} \cdot x^3 + \frac{6 - 4 \cdot \gamma^2}{8 \cdot \omega_0^2 \cdot \gamma^4} \cdot x^2 + \frac{8 \cdot \gamma^2 - 4}{8 \cdot \omega_0 \cdot \gamma^4} \cdot x + \frac{1 - 4 \cdot \gamma^2 + 8 \cdot \gamma^4}{8 \cdot \gamma^4}$$

Zum Zwecke der Ermittlung der Wendestellen, werden die ersten zwei Ableitungen ermittelt.

$$N(x, \gamma, \omega_0)_T' = \frac{4}{8 \cdot \omega_0^4 \cdot \gamma^4} \cdot x^3 - \frac{12}{8 \cdot \omega_0^3 \cdot \gamma^4} \cdot x^2 + \frac{12 - 8 \cdot \gamma^2}{8 \cdot \omega_0^2 \cdot \gamma^4} \cdot x + \frac{8 \cdot \gamma^2 - 4}{8 \cdot \omega_0 \cdot \gamma^4}$$

⇒

$$N(x, \gamma, \omega_0)_T'' = \frac{12}{8 \cdot \omega_0^4 \cdot \gamma^4} \cdot x^2 - \frac{24}{8 \cdot \omega_0^3 \cdot \gamma^4} \cdot x + \frac{12 - 8 \cdot \gamma^2}{8 \cdot \omega_0^2 \cdot \gamma^4} = 0$$

⇒

$$x^2 - 2\omega_0 \cdot x + \frac{1}{3} \cdot (3 - 2 \cdot \gamma^2) \cdot \omega_0^2 = 0$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung.

$$x_{1;2} = \omega_0 \pm \omega_0 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \gamma}$$

Der Wert ω_0 ist direkt ablesbar.

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \omega_0 \cdot \gamma}$$

⇒

$$\gamma^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{\omega_0^2}$$

Der Wert γ ist mit einer konstanten Abweichung belegt, das im Ergebnis ablesbar sein wird.

Die Ermittlung der Werte ist über eine biquadratische Regression vollständig durchführbar. Limitierend ist die Genauigkeit der biquadratischen Regression, besonders bei wenigen Daten in der Urliste.

1.2 Regressionvorschrift I

Gegeben ist die leicht modifizierte Normalfunktion:

$$N(x, \gamma, \omega_0) = e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x - \omega_0)^2}{\gamma^2 \cdot \omega_0^2}}$$

Wie bekannt, befindet sich das Maximum an der Stelle:

$$N(x, \gamma, \omega_0)_{\max} = (\omega_0, 1)$$

Die Wendestellen liegen bei:

$$N(x, \gamma, \omega_0)_{W,1} = \left((1 + \gamma) \cdot \omega_0, e^{-\frac{1}{2}} \right) \quad N(x, \gamma, \omega_0)_{W,2} = \left((1 - \gamma) \cdot \omega_0, e^{-\frac{1}{2}} \right)$$

In allgemeiner Darstellung:

$$N(x, \gamma, \omega_0)_{W,1} = (x = \omega_0 + \omega_0 \cdot \gamma = (1 + \gamma) \cdot \omega_0)$$

$$N(x, \gamma, \omega_0)_{W,2} = (x = \omega_0 - \omega_0 \cdot \gamma = (1 - \gamma) \cdot \omega_0)$$

Es wird die Normalfunktion als Polynom dargestellt.

$$P(N(x, \gamma, \omega_0)) = a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0$$

Die Koeffizienten können durch eine biquadratische Regression ermittelt werden¹.

Von Interesse ist die zweite Ableitung von P .

$$P(N(x, \gamma, \omega_0))' = 4 \cdot a_4 \cdot x^3 + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 2 \cdot a_2 \cdot x^1 + a_1 \cdot x^0$$

\Rightarrow

$$P(N(x, \gamma, \omega_0))'' = 12 \cdot a_4 \cdot x^2 + 6 \cdot a_3 \cdot x^1 + 2 \cdot a_2 \cdot x^0$$

Die Wendestellen werden ermittelt:

$$x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot x^1 + \frac{1}{6} \cdot \frac{a_2}{a_4} \cdot x^0 = 0$$

\Rightarrow

$$x_{1;2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{a_3}{a_4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} \cdot \frac{a_3^2}{a_4^2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{a_2}{a_4}}$$

\Rightarrow

$$x_{1;2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8}{3} \cdot \frac{a_2 \cdot a_4}{a_3^2}} \right)$$

Über der allgemeinen Vorschrift der Wendestellen ist ω_0^2 und γ^2 berechenbar.

$$\omega_0^2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{a_3^2}{a_4^2} \quad \sigma^2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{a_3^2}{a_4^2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{a_2}{a_4} = \omega_0^2 \cdot \gamma^2 = \frac{3 \cdot a_3^2 - 8 \cdot a_2 \cdot a_4}{48 \cdot a_4^2}$$

\Rightarrow

$$\gamma^2 = 1 - \frac{8}{3} \cdot \frac{a_2 \cdot a_4}{a_3^2}$$

\Rightarrow

$$0 < 3 \cdot a_3^2 > 8 \cdot a_2 \cdot a_4$$

Damit ist die vollständige Regression der Normalfunktion definiert.

¹nach [Dipa], Maple-Classic-Worksheet©, unter www.Zenithpoint.de

1.3 Regressionvorschrift II

Aus den Koeffizienten des Polynoms sind die gesuchten Werte direkt ablesbar.

$$a_4 = \frac{1}{8 \cdot \omega_0^4 \cdot \gamma^4} \quad a_3 = -\frac{4}{8 \cdot \omega_0^3 \cdot \gamma^4}$$

\Rightarrow

$$\frac{a_3}{a_4} = -4 \cdot \omega_0$$

Sowie:

$$a_4 = \frac{1}{8 \cdot \omega_0^4 \cdot \gamma^4} \quad a_2 = \frac{6 - 4 \cdot \gamma^2}{8 \cdot \omega_0^2 \cdot \gamma^4}$$

\Rightarrow

$$\frac{a_2}{a_4} = 2 \cdot (3 - 2 \cdot \gamma^2) \cdot \omega_0^2$$

Oder:

$$a_3 = -\frac{4}{8 \cdot \omega_0^3 \cdot \gamma^4} \quad a_2 = \frac{6 - 4 \cdot \gamma^2}{8 \cdot \omega_0^2 \cdot \gamma^4}$$

\Rightarrow

$$\frac{a_2}{a_3} = \left(\gamma^2 - \frac{3}{2} \right) \cdot \omega_0$$

In den letzten beiden Berechnungsgrundlagen ist oben beschriebene Abweichung von $2/3$ enthalten. Korrigiert ergibt sich dann:

$$\frac{a_2}{a_4} = 2 \cdot \left(3 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \gamma^2 \right) \cdot \omega_0^2 \quad \frac{a_2}{a_3} = \left(\frac{3}{2} \cdot \gamma^2 - \frac{3}{2} \right) \cdot \omega_0$$

\Rightarrow

$$\frac{a_2}{a_4} = 6 \cdot (1 - \gamma^2) \cdot \omega_0^2 \quad \frac{a_2}{a_3} = \frac{3}{2} \cdot (\gamma^2 - 1) \cdot \omega_0$$

1.4 Genauigkeitsabschätzung

Die Genauigkeit der Regression² kann über den Schnittpunkt mit der Ordinate abgeschätzt werden. So gilt für die modifizierte Normalfunktion:

$$N(0, \gamma, \omega_0) = e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\gamma^2}}$$

Für die Taylorisierte Darstellung ist der Koeffizient a_0 aussagekräftig.

$$a_0(0, \gamma, \omega_0)_T = \frac{1 - 4 \cdot \gamma^2 + 8 \cdot \gamma^4}{8 \cdot \gamma^4}$$

Durch ein Verhältnis beider Berechnungsgrundlagen zueinander lässt der Bereich hoher Genauigkeit darstellen durch:

$$R = \frac{N(0, \gamma, \omega_0)}{a_0(0, \gamma, \omega_0)_T} \rightarrow 1$$

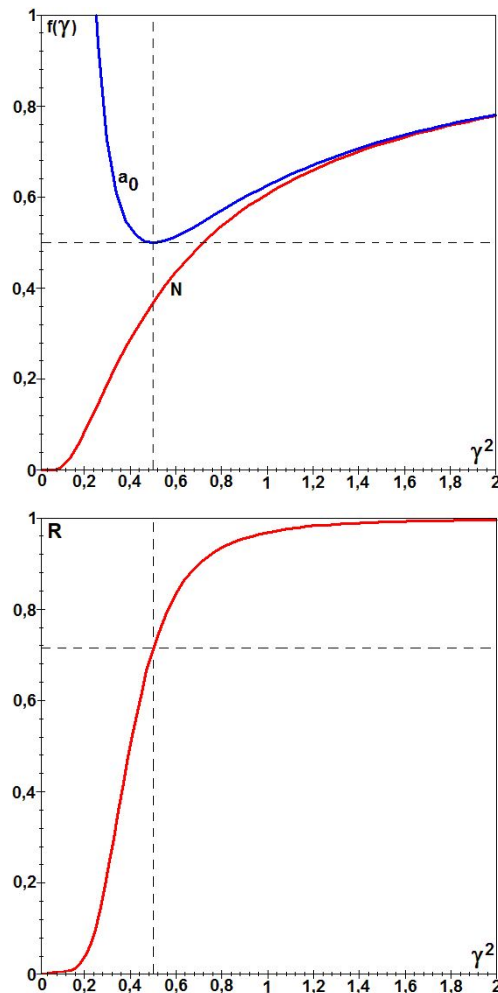
Da $a_0(0, \gamma, \omega_0)_T$ ein Minimum besitzt, ist auch eine Grenze für γ^2 definiert. So sollte gelten:

$$\gamma^2 > \frac{1}{2}$$

⇒

$$\sigma^2 > \frac{1}{2} \cdot \omega_0^2$$

⇒



Grafische Darstellung des Genauigkeitsabschätzers R der Regression der Normalfunktion. Werte von $\gamma^2 < 0,5$ sind möglichst einer Kontrolle zu unterziehen.

² R - Genauigkeitsabschätzung zwischen regressierter Polynomfunktion und Normalfunktion unter Nutzung der ermittelten Werte ω_0^2 und γ^2

2 Beispiele

2.1 Beispiel I

Mit $\omega_0^2 = 25$ und $\gamma^2 = 0,4$, daher $\sigma^2 = 10$.

n	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1	1	1
3	2	4	8	16	32	64	128	256
4	3	9	27	81	243	729	2 187	6 561
5	4	16	64	256	1 024	4 096	16 384	65 536
6	5	25	125	625	3 125	15 625	78 125	390 625
7	6	36	216	1 296	7 776	46 656	279 936	1 679 616
8	7	49	343	2 401	16 807	117 649	823 543	5 764 801
9	8	64	512	4 096	32 768	262 144	2 097 152	16 777 216
10	9	81	729	6 561	59 049	531 441	4 782 969	43 046 721
11	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000
11	55	385	3 025	25 333	220 825	1 978 405	18 080 425	167 731 333
n	$x^0 \cdot f(x)$		$x^1 \cdot f(x)$		$x^2 \cdot f(x)$		$x^3 \cdot f(x)$	
1	0, 286 505		0, 000 000		0, 000 000		0, 000 000	
2	0, 449 329		0, 449 329		0, 449 329		0, 449 329	
3	0, 637 628		1, 275 256		2, 550 513		5, 101 025	
4	0, 818 731		2, 456 192		7, 368 577		22, 105 730	
5	0, 951 229		3, 804 918		15, 219 671		60, 878 683	
6	1, 000 000		5, 000 000		25, 000 000		125, 000 000	
7	0, 951 229		5, 707 377		34, 244 259		205, 465 556	
8	0, 818 731		5, 731 115		40, 117 807		280, 824 648	
9	0, 637 628		5, 101 025		40, 808 202		326, 465 614	
10	0, 449 329		4, 043 961		36, 395 646		327, 560 815	
11	0, 286 505		2, 865 048		28, 650 480		286, 504 797	
11	7, 286 844		36, 434 221		230, 804 483		1 640, 356 197	

Nativ sind die gesuchten Werte abschätzbar über³:

$$\omega_0^2 = \left(\frac{\{x\}}{n} \right)^2 = \left(\frac{55}{11} \right)^2 = 25$$

⇒

$$\sigma^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\{x^2\} \cdot n - \{x\}^2 \right) = \frac{1}{11^2} \cdot (385 \cdot 11 - 55^2) = 10$$

⇒

$$\gamma^2 = \frac{10}{25} = 0,4$$

Über die Regressionsvorschriften ergibt sich⁴:

$$a_4 = +0,00068966$$

$$a_3 = -0,01379317$$

$$a_2 = +0,05796129$$

$$a_1 = +0,11004546$$

$$a_0 = +0,28840569$$

⇒

$$\omega_0^2 = 25 \quad \sigma^2 = 11$$

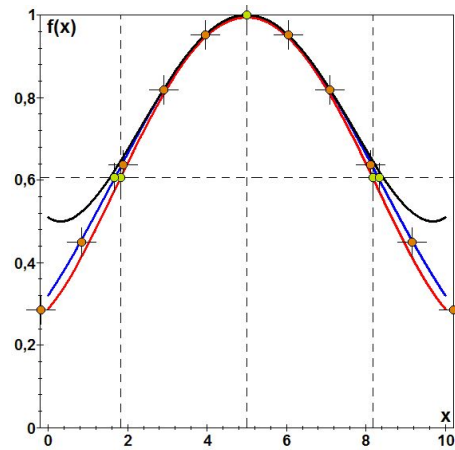
³nach [Dipa]

⁴Ermittlung über Maple-Classic-Worksheet©, unter www.Zenithpoint.de

⇒

$$\gamma^2 = 0,44$$

Folgend Beispiel I grafisch dargestellt. Regressiertes Polynom **ROT** im Vergleich zur ermittelten Normalfunktion **BLAU**. **SCHWARZ**, die ersten drei Glieder der Taylorisierten Normalfunktion. Ebenfalls eingezeichnet, Urlisten-, Wendepunkte und Mittelwert.



Der Genauigkeitsabschätzer R :

$$R = \frac{N(0, \gamma, \omega_0)}{a_0(0, \gamma, \omega_0)_T} = \frac{0,320984}{0,509298} = 0,63$$

2.2 Beispiel II

Mit $\omega_0^2 = 25$ und $\gamma^2 = 0,01$, daher $\sigma^2 = 0,25$.

n	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
-	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0
1	3	9	27	81	243	729	2 187	6 561
2	4	16	64	256	1 024	4 096	16 384	65 536
3	5	25	125	625	3 125	15 625	78 125	390 625
4	6	36	216	1 296	7 776	46 656	279 936	1 679 616
5	7	49	343	2 401	16 807	117 649	823 543	5 764 801
-	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0
5	25	135	775	4 659	28 975	184 755	1 200 175	7 907 139
n	$x^0 \cdot f(x)$		$x^1 \cdot f(x)$		$x^2 \cdot f(x)$		$x^3 \cdot f(x)$	
-	0,000 000		0,000 000		0,000 000		0,000 000	
-	0,000 000		0,000 000		0,000 000		0,000 000	
-	0,000 000		0,000 000		0,000 000		0,000 000	
1	0,000 335		0,001 006		0,003 019		0,009 057	
2	0,135 335		0,541 341		2,165 365		8,661 458	
3	1,000 000		5,000 000		25,000 000		125,000 000	
4	0,135 335		0,812 012		4,872 070		29,232 421	
5	0,000 335		0,002 348		0,016 438		0,115 064	
-	0,000 000		0,000 000		0,000 000		0,000 062	
-	0,000 000		0,000 000		0,000 000		0,000 000	
-	0,000 000		0,000 000		0,000 000		0,000 000	
5	1,271 340		6,356 707		32,056 892		163,018 000	

Nativ sind die gesuchten Werte abschätzbar über⁵:

$$\omega_0^2 = \left(\frac{\{x\}}{n} \right)^2 = \left(\frac{25}{5} \right)^2 = 25$$

⇒

$$\sigma_*^2 = \frac{1}{n^2} \cdot (\{x^2\} \cdot n - \{x\}^2) = \frac{1}{5^2} \cdot (135 \cdot 5 - 25^2) = 2$$

⇒

$$\gamma^2 = \frac{2}{25} = 0,08$$

Über die Regressionsvorschriften ergibt sich⁶:

$$\begin{aligned} a_4 &= +0,20486427 \\ a_3 &= -4,09727691 \\ a_2 &= +29,66016058 \\ a_1 &= -91,73799900 \\ a_0 &= +102,30532430 \end{aligned}$$

⇒

$$\omega_0^2 = 25 \quad \sigma^2 = 0,87$$

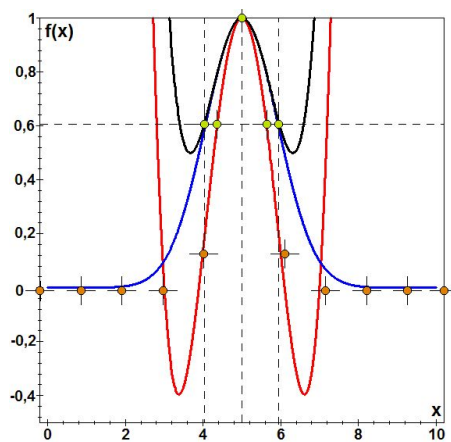
⇒

$$\gamma^2 = 0,035$$

⁵nach [Dipa]

⁶Ermittlung über Maple-Classic-Worksheet©, unter www.Zenithpoint.de

Folgend Beispiel II grafisch dargestellt. Regressiertes Polynom **ROT** im Vergleich zur ermittelten Normalfunktion **BLAU**. **SCHWARZ**, die ersten drei Glieder der Taylorisierten Normalfunktion. Ebenfalls eingezeichnet, Urlisten-, Wendepunkte und Mittelwert.



Obwohl effektiv nur drei Werte in der Urliste zur Verfügung stehen, ergeben sich nutzbare Ergebnisse.

Der Genauigkeitsabschätzer R :

$$R = \frac{N(0, \gamma, \omega_0)}{a_0(0, \gamma, \omega_0)_T} = \frac{0,000001}{88,755102} \rightarrow 0$$

LaTeX 2_ε