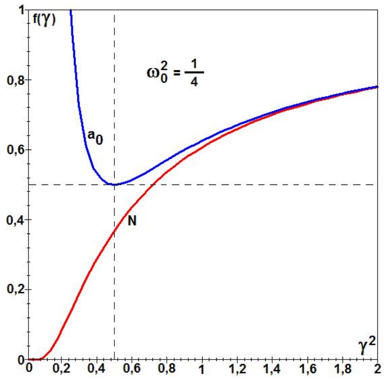
Die Regression der ordinatensymmetrischen Normalfunktion



Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 8. Mai 2023 – Letzte Revision: 6. Januar 2024

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[Dipa] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Die (Polynom)Regression von Datenpunkten. www.Zenithpoint.de.

[Dipb] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Die unvollständige Regression der Normalfunktion. www.Zenithpoint.de.

1 Herleitung

1.1 Grundlagen

[Dipb]

Gegeben ist die ordinatensymmetrische Normalfunktion:

$$N^*(x,\gamma,\omega_0)=e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2-\omega_0^2\right)^2}{\gamma^2\cdot\omega_0^2}}$$

Da die Regression sehr aufwändig durchzuführen ist, wird ein rechtsseitiges Substitut genutzt. Dafür wird festgelegt:

$$N(x,\gamma,\omega_0)=e^{-\frac{Z}{2}\cdot\frac{(x-\omega_0)^2}{\gamma^2\cdot\omega_0^2}}\cong N^*(x,\gamma,\omega_0)=e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\omega_0)^2}{\gamma^2\cdot\omega_0^2}\cdot(x+\omega_0)^2}$$

Zur Ermittlung des Substituts Z wird bis x^2 taylorisiert.

$$N(x,\gamma,\omega_0)_T=1-\frac{Z}{2}\cdot\frac{(x-\omega_0)^2}{\gamma^2\cdot\omega_0^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{Z}{\gamma^2\cdot\omega_0^2}\cdot x^2+\frac{Z}{\gamma^2\cdot\omega_0}\cdot x+\frac{2\cdot\gamma^2-Z}{2\cdot\gamma^2}$$

Und:

$$N^*(x,\gamma,\omega_0)_T=1-2\cdot\frac{(x-\omega_0)^2}{\gamma^2}=-2\cdot\frac{1}{\gamma^2}\cdot x^2+4\cdot\frac{\omega_0}{\gamma^2}\cdot x+\frac{\gamma^2-2\cdot\omega_0^2}{\gamma^2}$$

Von beiden werden die Nullstellen gesucht:

$$N(x,\gamma,\omega_0)_T=x^2-2\cdot\omega_0\cdot x+\left(Z-2\cdot\gamma^2\right)\cdot\frac{\omega_0^2}{Z}=0$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;2}=\omega_0\pm\omega_0\cdot\gamma\cdot\sqrt{\frac{2}{Z}}$$

Sowie:

$$N^*(x,\gamma,\omega_0)_T=x^2-2\cdot\omega_0\cdot x+\omega_0^2-\frac{1}{2}\cdot\gamma^2=0$$

$\Rightarrow$

$$x_{3;4}=\omega_0\pm\gamma\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Die korrespondierenden Nullstellen werden gleichgesetzt.

$$\omega_0+\omega_0\cdot\gamma\cdot\sqrt{\frac{2}{Z}}=\omega_0+\gamma\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\qquad\qquad \omega_0-\omega_0\cdot\gamma\cdot\sqrt{\frac{2}{Z}}=\omega_0-\gamma\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow$

$$Z=4\cdot\omega_0^2$$

Das Substitut ist ermittelt, der Ersatz für die ordinatensymmetrische Normalfunktion ist definiert.

$$N(x,\gamma,\omega_0)=e^{-2\cdot\frac{(x-\omega_0)^2}{\gamma^2}}$$

Eine weitere Möglichkeit ist das Flächenintegral zwischen Normalfunktion und Abszisse.

$$\int_{x_1}^{x_2}N(x,\gamma,\omega_0)_T\,dx=\frac{4}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{Z}}\cdot\gamma\cdot\omega_0$$

Sowie:

$$\int_{x_3}^{x_4}N^*(x,\gamma,\omega_0)_T\,dx=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\gamma$$

Auch diese beiden Ausdrücke werden gleichgesetzt.

$$\int_{x_1}^{x_2} N\left(x,\gamma,\omega_0\right)_T dx = \int_{x_3}^{x_4} N^*\left(x,\gamma,\omega_0\right)_T dx$$

$\Rightarrow$

$$Z = 4 \cdot \omega_0^2$$

Letztendlich ist der Wert ω_0 direkt aus den Nullstellen ablesbar. Für γ gilt:

$$\sigma = \gamma \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \qquad \sigma_{\mathrm{T}} = \gamma_{\mathrm{T}} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = 2 \cdot \sigma^2 \qquad \gamma_{\mathrm{T}}^2 = 6 \cdot \sigma_{\mathrm{T}}^2$$

Der Wert γ ist mit einer konstanten Abweichung belegt, das im Regressionsergebnis enthalten sein wird.

Die Ermittlung der Werte ist über eine biquadratische Regression vollständig durchführbar. Limitierend ist die Genauigkeit der biquadratischen Regression, besonders bei wenigen Daten in der Urliste.

1.2 Regressionvorschrift I

Gegeben ist die leicht modifizierte Normalfunktion:

$$N(x,\gamma,\omega_0) = e^{-2\cdot\frac{(x-\omega_0)^2}{\gamma^2}}$$

Wie bekannt, befindet sich das Maximum an der Stelle:

$$N(x,\gamma,\omega_0)_{\max} = (\omega_0, 1)$$

Die Wendestellen liegen bei:

$$N(x,\gamma,\omega_0)_{W,1} = \left(\omega_0 + \frac{1}{2}\cdot\gamma, e^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad N(x,\gamma,\omega_0)_{W,2} = \left(\omega_0 - \frac{1}{2}\cdot\gamma, e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

Es wird die Normalfunktion als Polynom dargestellt.

$$P(\ldots) = \frac{2}{\gamma^4}\cdot x^4 - \frac{8\cdot\omega_0}{\gamma^4}\cdot x^3 + \frac{12\cdot\omega_0^2 - 2\cdot\gamma^2}{\gamma^4}\cdot x^2 + \frac{4\cdot\omega_0\cdot\gamma^2 - 8\cdot\omega_0^3}{\gamma^4}\cdot x + \frac{\gamma^4 - 2\cdot\omega_0^2\cdot\gamma^2 + 2\cdot\omega_0^4}{\gamma^4}$$

$\Rightarrow$

$$P(N(x,\gamma,\omega_0)) = a_4\cdot x^4 + a_3\cdot x^3 + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x^1 + a_0\cdot x^0$$

Die Koeffizienten können durch eine biquadratische Regression ermittelt werden[1].

Von Interesse ist die zweite Ableitung von P.

$$P(N(x,\gamma,\omega_0))' = 4\cdot a_4\cdot x^3 + 3\cdot a_3\cdot x^2 + 2\cdot a_2\cdot x^1 + a_1\cdot x^0$$

$\Rightarrow$

$$P(N(x,\gamma,\omega_0))'' = 12\cdot a_4\cdot x^2 + 6\cdot a_3\cdot x^1 + 2\cdot a_2\cdot x^0$$

Die Wendestellen werden ermittelt:

$$x^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{a_3}{a_4}\cdot x^1 + \frac{1}{6}\cdot\frac{a_2}{a_4}\cdot x^0 = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{a_3}{a_4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}\cdot\frac{a_3^2}{a_4^2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{a_2}{a_4}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{1;2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{a_3}{a_4}\cdot\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{8}{3}\cdot\frac{a_2\cdot a_4}{a_3^2}}\right)$$

Über der allgemeinen Vorschrift der Wendestellen ist ω_0^2 und γ^2 berechenbar.

$$\omega_0^2 = \frac{1}{16}\cdot\frac{a_3^2}{a_4^2} \qquad \sigma^2 = \frac{1}{16}\cdot\frac{a_3^2}{a_4^2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{a_2}{a_4} = \gamma^2 = \frac{3\cdot a_3^2 - 8\cdot a_2\cdot a_4}{48\cdot a_4^2}$$

$\Rightarrow$

$$0 < 3\cdot a_3^2 > 8\cdot a_2\cdot a_4$$

Damit ist die vollständige Regression der Normalfunktion definiert.

[1] nach [Dipa], Maple-Classic-Worksheet©, unter www.Zenithpoint.de

1.3 Regressionvorschrift II

Aus den Koeffizienten des Polynoms sind die gesuchten Werte direkt ablesbar.

$$a_4 = \frac{2}{\gamma^4} \qquad a_3 = -8 \cdot \frac{\omega_0}{\gamma^4}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a_3}{a_4} = -4 \cdot \omega_0$$

Sowie:

$$a_4 = \frac{2}{\gamma^4} \qquad a_2 = \frac{12 \cdot \omega_0^2 - 2 \cdot \gamma^2}{\gamma^4}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a_2}{a_4} = 6 \cdot \omega_0^2 - \gamma^2$$

Oder:

$$a_3 = -8 \cdot \frac{\omega_0}{\gamma^4} \qquad a_2 = \frac{12 \cdot \omega_0^2 - 2 \cdot \gamma^2}{\gamma^4}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{a_2}{a_3} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{6 \cdot \omega_0^2 - \gamma^2}{\omega_0}$$

$\Rightarrow$

$$-4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{a_2}{a_3} = 6 \cdot \omega_0^2 - \gamma^2 = \frac{a_2}{a_4}$$

In den letzten beiden Berechnungsgrundlagen ist oben beschriebene Abweichung von 6 in γ^2 enthalten. Korrigiert ergibt sich dann:

$$-4 \cdot \omega_0 \cdot \frac{a_2}{a_3} = 6 \cdot \left(\omega_0^2 - \gamma^2\right) = \frac{a_2}{a_4}$$

1.4 Genauigkeitabschätzung I

Die Genauigkeit der Regression[2] kann über den Schnittpunkt mit der Ordinate abschätzt werden. So gilt für die modifizierte Normalfunktion:

$$N(0,\gamma,\omega_0) = e^{-2\cdot\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}$$

Für die taylorisierte Darstellung ist der Koeffizient a_0 aussagekräftig.

$$N(x,\gamma,\omega_0)_T = \frac{2}{\gamma^4}\cdot x^4 - \frac{8\cdot\omega_0}{\gamma^4}\cdot x^3 + \frac{12\cdot\omega_0^2 - 2\cdot\gamma^2}{\gamma^4}\cdot x^2 + \frac{4\cdot\omega_0\cdot\gamma^2 - 8\cdot\omega_0^3}{\gamma^4}\cdot x + \frac{\gamma^4 - 2\cdot\omega_0^2\cdot\gamma^2 + 2\cdot\omega_0^4}{\gamma^4}$$

$\Rightarrow$

$$a_0(0,\gamma,\omega_0)_T = \frac{\gamma^4 - 2\cdot\omega_0^2\cdot\gamma^2 + 2\cdot\omega_0^4}{\gamma^4}$$

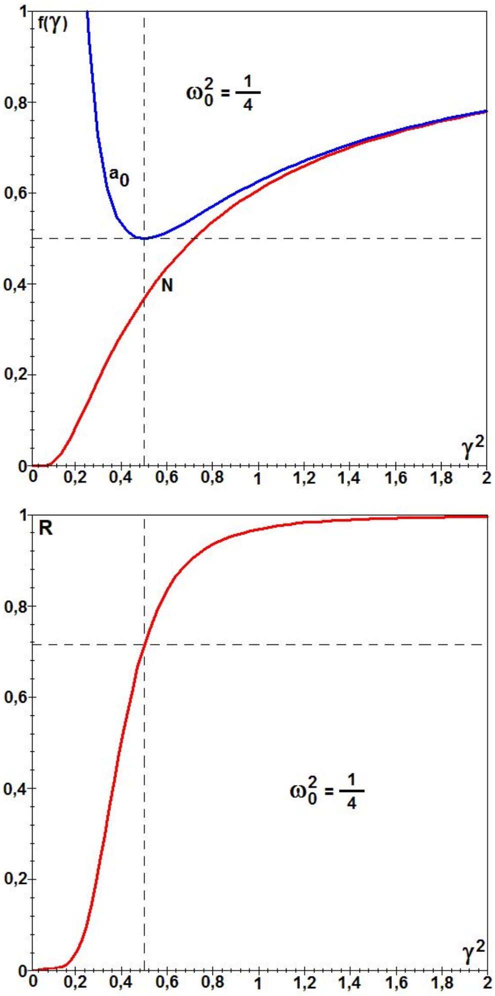
Durch ein Verhältnis beider Berechnungsgrundlagen zueinander lässt der Bereich hoher Genauigkeit darstellen durch:

$$R = \frac{N(0,\gamma,\omega_0)}{a_0(0,\gamma,\omega_0)_T} \to 1$$

Da $a_0(0,\gamma,\omega_0)_T$ ein Minimum besitzt, ist auch eine Grenze für γ^2 definiert. So sollte gelten:

$$\gamma^2 > 2\cdot\omega_0^2 \qquad \sigma^2 > 2\cdot\omega_0^2$$

$\Rightarrow$



Grafische Darstellung des Genauigkeitsabschätzers R der Regression der Normalfunktion. Werte von $\gamma^2 < 2\cdot\omega_0^2$ sind möglichst einer Kontrolle zu unterziehen.

[2] R - Genauigkeitsabschätzung zwischen regressierter Polynomfunktion und Normalfunktion unter Nutzung der ermittelten Werte ω_0^2 und γ^2

1.5 Genauigkeitabschätzung II

Gegeben ist die ordinatensymmetrische Normalfunktion:

$$N^*(x,\gamma,\omega_0) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2-\omega_0^2\right)^2}{\gamma^2\cdot\omega_0^2}}$$

$\Rightarrow$

$$N^*(0,\gamma,\omega_0) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}$$

Das rechtsseitige Substitut dazu:

$$N(x,\gamma,\omega_0) = e^{-2\cdot\frac{(x-\omega_0)^2}{\gamma^2}}$$

$\Rightarrow$

$$N(0,\gamma,\omega_0) = e^{-2\cdot\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}$$

Der Genauigkeitsabschätzer R^*[3] wird definiert durch:

$$R^* = (1+r^*)\cdot\frac{1+N(0,\gamma,\omega_0)}{1+N^*(0,\gamma,\omega_0)} - r^* \to 1$$

$\Rightarrow$

$$R^* = \frac{1+e^{-2\cdot\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}}{1+e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}} + \frac{e^{-2\cdot\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}} - e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}}{1+e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\omega_0^2}{\gamma^2}}}\cdot r^* \to 1$$

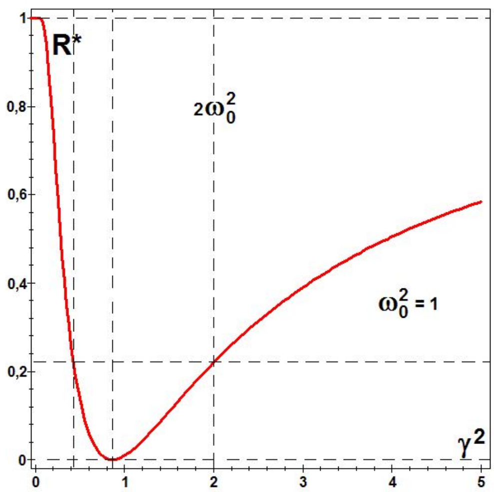
Mit:

$$r^* = 2,379143974...$$

Der Genauigkeitsabschätzer besitzt ein Minimum bei:

$$\gamma^2 = 0,8635\cdot\omega_0^2$$

Dieser Bereich wird vom Genauigkeitsabschätzer R überdeckt.



Grafische Darstellung des Genauigkeitsabschätzers R^* der Regression der Normalfunktion. Werte von $\gamma^2 < 2\cdot\omega_0^2$ sind möglichst einer Kontrolle zu unterziehen.

[3] R^* - Genauigkeitsabschätzung zwischen ordinatensymmetrischer Normal und der substituierten Normalfunktion unter Nutzung der ermittelten Werte ω_0^2 und γ^2

2 Beispiele

2.1 Beispiel I

Mit $\omega_0^2 = 25$ und $\gamma^2 = 12$, daher $\sigma^2 = 12$.

n	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4	2	4	8	16	32	64	128	256
5	3	9	27	81	243	729	2 187	6 561
6	4	16	64	256	1 024	4 096	16 384	65 536
7	5	25	125	625	3 125	15 625	78 125	390 625
8	6	36	216	1 296	7 776	46 656	279 936	1 679 616
9	7	49	343	2 401	16 807	117 649	823 543	5 764 801
10	8	64	512	4 096	32 768	262 144	2 097 152	16 777 216
11	9	81	729	6 561	59 049	531 441	4 782 969	43 046 721
12	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000
13	11	121	1 331	14 641	161 051	1 771 561	19 487 171	214 358 881
13	**65**	**507**	**4 355**	**39 975**	**381 875**	**3 749 967**	**37 567 595**	**382 090 215**

n	$x^0 \cdot f(x)$	$x^1 \cdot f(x)$	$x^2 \cdot f(x)$	$x^3 \cdot f(x)$	$x^4 \cdot f(x)$	
1	0, 005 841	-0, 005 841	0, 005 841	-0, 005 841	0, 005 841	
2	0, 015 504	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
3	0, 069 483	0, 069 483	0, 069 483	0, 069 483	0, 069 783	
4	0, 223 130	0, 446 260	0, 892 521	1, 785 041	3, 570 083	
5	0, 513 417	1, 540 251	4, 620 754	13, 862 262	41, 586 787	
6	0, 846 482	3, 385 927	13, 543 708	54, 174 830	216, 699 322	
7	1, 000 000	5, 000 000	25, 000 000	125, 000 000	625, 000 000	
8	0, 846 482	5, 078 890	30, 473 342	182, 840 053	1097, 040 315	
9	0, 513 417	3, 593 920	25, 157 439	176, 102 072	1232, 714 503	
10	0, 223 130	1, 785 041	14, 280 330	114, 242 642	913, 941 136	
11	0, 069 483	0, 625 351	5, 628 160	50, 653 436	455, 880 923	
12	0, 015 504	0, 155 039	1, 550 385	15, 503 854	155, 038 536	
13	0, 005 841	0, 064 251	0, 706 758	7, 774 341	85, 517 749	
13	**4, 347 714**	**21, 738 572**	**121, 978 721**	**742, 002 173**	**4 827, 064 678**	

Nativ sind die gesuchten Werte abschätzbar über[4]:

$$\omega_0^2 = \left(\frac{\{x\}}{n}\right)^2 = \left(\frac{65}{13}\right)^2 = 25$$

$\Rightarrow$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\left\{x^2\right\} \cdot n - \{x\}^2\right) = \frac{1}{13^2} \cdot \left(507 \cdot 13 - 65^2\right) = 14$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = 14$$

Über die Regressionsvorschriften ergibt sich[5]:

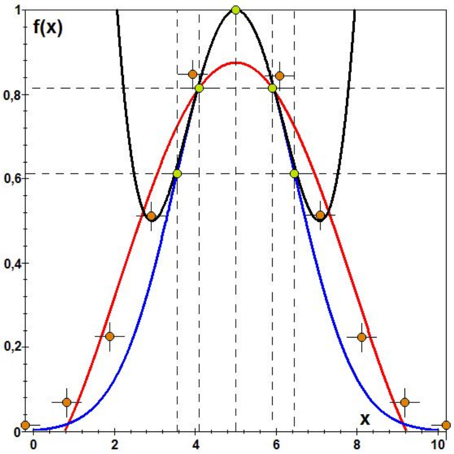
$$\begin{aligned} a_4 &= +0,00144541 \\ a_3 &= -0,02894461 \\ a_2 &= +0,14258814 \\ a_1 &= +0,02317022 \\ a_0 &= -0,09053861 \end{aligned}$$

[4] nach [Dipa]
[5] Ermittlung über Maple-Classic-Worksheet©, unter www.Zenithpoint.de

$\Rightarrow$

$$\omega_0^2 = 25 \qquad\qquad \gamma^2 = 8,62$$

Folgend Beispiel I grafisch dargestellt. Regressiertes Polynom **ROT** im Vergleich zur ermittelten substituierten Normalfunktion **BLAU**. **SCHWARZ**, die ersten drei Glieder der taylorisierten Normalfunktion. Ebenfalls eingezeichnet, Urlisten-, Wendepunkte und Mittelwert.



Der Genauigkeitsabschätzer R:

$$R = \frac{N(0,\gamma,\omega_0)}{a_0(0,\gamma,\omega_0)_T} = \frac{0,002985}{-0,090539} = -0,033$$

Der Genauigkeitsabschätzer R^*:

$$R^* = (1+r^*)\cdot\frac{1+N(0,\gamma,\omega_0)}{1+N^*(0,\gamma,\omega_0)} - r^* = 3,379144\cdot\frac{1,003026}{1,234543} - 2,379144 = 0,366$$

2.2 Beispiel II

Mit $\omega_0^2 = 25$ und $\gamma^2 = 14$, daher $\sigma^2 = 14$.

n	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4	2	4	8	16	32	64	128	256
5	3	9	27	81	243	729	2 187	6 561
6	4	16	64	256	1 024	4 096	16 384	65 536
7	5	25	125	625	3 125	15 625	78 125	390 625
8	6	36	216	1 296	7 776	46 656	279 936	1 679 616
9	7	49	343	2 401	16 807	117 649	823 543	5 764 801
10	8	64	512	4 096	32 768	262 144	2 097 152	16 777 216
11	9	81	729	6 561	59 049	531 441	4 782 969	43 046 721
12	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000
13	11	121	1 331	14 641	161 051	1 771 561	19 487 171	214 358 881
13	**65**	**507**	**4 355**	**39 975**	**381 875**	**3 749 967**	**37 567 595**	**382 090 215**

n	$x^0 \cdot f(x)$	$x^1 \cdot f(x)$	$x^2 \cdot f(x)$	$x^3 \cdot f(x)$	$x^4 \cdot f(x)$	
1	0, 439 175	-0, 439 175	0, 439 175	-0, 439 175	0, 439 175	
2	0, 409 484	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
3	0, 439 175	0, 439 175	0, 439 175	0, 439 175	0, 439 175	
4	0, 532 592	1, 065 184	2, 130 367	4, 260 734	8, 521 469	
5	0, 693 701	2, 081 103	6, 243 309	18, 729 926	56, 189 779	
6	0, 890 730	3, 562 919	14, 251 675	57, 006 700	228, 026 798	
7	1, 000 000	5, 000 000	25, 000 000	125, 000 000	625, 000 000	
8	0, 841 258	5, 047 547	30, 285 280	181, 711 682	1090, 270 091	
9	0, 439 175	3, 074 226	21, 519 579	150, 637 051	1054, 459 353	
10	0, 113 852	0, 910 815	7, 286 519	58, 292 153	466, 337 2221	
11	0, 011 333	0, 102 001	0, 918 006	8, 262 058	74, 358 524	
12	0, 000 324	0, 003 237	0, 032 369	0, 323 693	3, 236 932	
13	0, 000 019	0, 000 021	0, 000 232	0, 002 549	0, 028 040	
13	**5, 810 818**	**20, 847 053**	**108, 545 686**	**604, 227 546**	**3 607, 306 557**	

Nativ sind die gesuchten Werte abschätzbar über[6]:

$$\omega_0^2 = \left(\frac{\{x\}}{n}\right)^2 = \left(\frac{65}{13}\right)^2 = 25$$

$\Rightarrow$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\left\{x^2\right\} \cdot n - \{x\}^2\right) = \frac{1}{13^2} \cdot \left(507 \cdot 13 - 65^2\right) = 14$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = 14$$

Über die Regressionsvorschriften ergibt sich[7]:

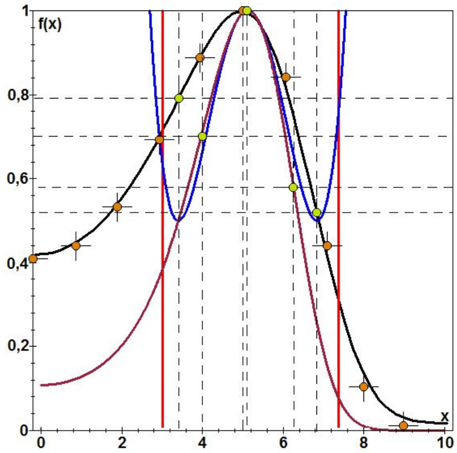
$$\begin{aligned} a_4 &= -60411,65 \\ a_3 &= +1237575,73 \\ a_2 &= -7370220,88 \\ a_1 &= +10356282,47 \\ a_0 &= +616835146,55 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\omega_0^2 = 26,23 \qquad \gamma^2 = 5,9$$

[6] nach [Dipa]
[7] Ermittlung über Maple-Classic-Worksheet©, unter www.Zenithpoint.de

Folgend Beispiel II grafisch dargestellt. Regressiertes Polynom **ROT** im Vergleich zur ermittelten substituierten Normalfunktion **BRAUN**. **BLAU**, die ersten drei Glieder der taylorisierten Normalfunktion, sowie **SCHWARZ** die ordinatensymmetrische Normalfunktion mit den nativen Werten. Ebenfalls eingezeichnet, Urlisten-, Wendepunkte und Mittelwert.



Der Genauigkeitsabschätzer R:

$$R = \frac{N(0,\gamma,\omega_0)}{a_0(0,\gamma,\omega_0)_T} = \frac{0,000137}{0,108130} = 0,001$$

Der Genauigkeitsabschätzer R^*:

$$R^* = (1+r^*)\cdot\frac{1+N(0,\gamma,\omega_0)}{1+N^*(0,\gamma,\omega_0)} - r^* = 3,379144\cdot\frac{1,000137}{1,108130} - 2,379144 = 0,671$$

2.3 Beispiel III

Mit $\omega_0^2 = 25$ und $\gamma^2 = 0,4$, daher $\sigma^2 = 0,4$.

n	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
-	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0
1/-	3	9	27	81	243	729	2 187	6 561
2/1	4	16	64	256	1 024	4 096	16 384	65 536
3/2	5	25	125	625	3 125	15 625	78 125	390 625
4/3	6	36	216	1 296	7 776	46 656	279 936	1 679 616
5/-	7	49	343	2 401	16 807	117 649	823 543	5 764 801
-	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0
-	0	0	0	0	0	0	0	0
3	**15**	**77**	**405**	**2 177**	**11 925**	**66 377**	**374 445**	**2 135 777**
5	**25**	**135**	**775**	**4 659**	**28 975**	**184 755**	**1 200 175**	**7 907 139**

n	$x^0 \cdot f(x)$	$x^1 \cdot f(x)$	$x^2 \cdot f(x)$	$x^3 \cdot f(x)$	$x^4 \cdot f(x)$	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
1	0, 006 738	0, 026 952	0, 107 807	0, 431 229	1, 724 914	
2	1, 000 000	5, 000 000	25, 000 000	125, 000 000	625, 000 000	
3	0, 006 738	0, 040 428	0, 242 566	1, 455 397	8, 732 379	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 062	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
-	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	0, 000 000	
3	**1, 013 476**	**5, 067 380**	**25, 350 373**	**126, 886 626**	**635, 457 293**	

Nativ sind die gesuchten Werte abschätzbar über[8]:

$$\omega_0^2 = \left(\frac{\{x\}}{n}\right)^2 = \left(\frac{15}{3}\right)^2 = 25$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_*^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \left(\{x^2\} \cdot n - \{x\}^2\right) = \frac{1}{3^2} \cdot \left(77 \cdot 3 - 15^2\right) = 0,67$$

$\Rightarrow$

$$\gamma^2 = 0,67$$

Über die Regressionsvorschriften[9] ergibt sich[10]:

$$\begin{aligned} a_4 &= +0,24772461 \\ a_3 &= -4,95449010 \\ a_2 &= +35,91777344 \\ a_1 &= -111,45329100 \\ a_0 &= +124,80543790 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

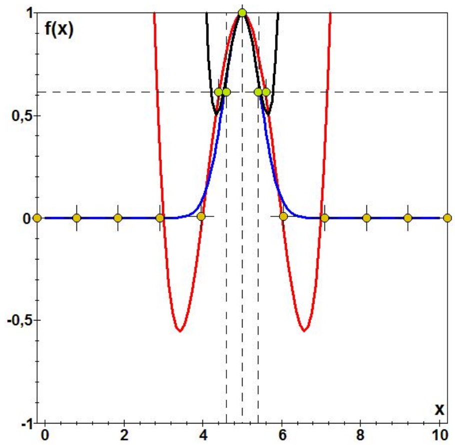
$$\omega_0^2 = 25 \qquad \gamma^2 = 0,835$$

[8] nach [Dipa]

[9] Eine biquadratische Regression verlangt mindestens 5 Stützpunkte auf der Abszisse, in der Tabelle grau eingezeichnet und hier genutzt.

[10] Ermittlung über Maple-Classic-Worksheet©, unter www.Zenithpoint.de

Folgend Beispiel III grafisch dargestellt. Regressiertes Polynom **ROT** im Vergleich zur ermittelten substituierten Normalfunktion **BLAU**. **SCHWARZ**, die ersten drei Glieder der taylorisierten Normalfunktion. Ebenfalls eingezeichnet, Urlisten-, Wendepunkte und Mittelwert.



Obwohl effektiv nur drei Werte in der Urliste zur Verfügung stehen, ergeben sich nutzbare Ergebnisse.

Der Genauigkeitsabschätzer R:

$$R = \frac{N(0,\gamma,\omega_0)}{a_0(0,\gamma,\omega_0)_T} = \frac{0,000001}{124,80543790} \to 0$$

Der Genauigkeitsabschätzer R^*:

$$R^* = (1+r^*)\cdot\frac{1+N(0,\gamma,\omega_0)}{1+N^*(0,\gamma,\omega_0)} - r^* = 3,379144\cdot\frac{1,000000}{1,000003} - 2,379144 = 0,999$$

LaTeX 2_ε