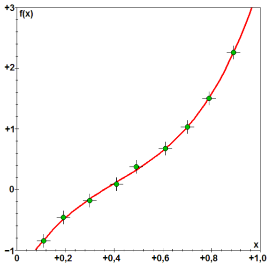
Durchführung der Regression einer bilogarith-



mischen Funktion über das Polynomverfahren

Autor: Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 6. September 2023 – Letzte Revision: 6. Januar 2024

Inhaltsverzeichnis

1 Die Regression der bilogarithmischen Funktion **3**

1.1 Methode . . . 3

1.1.1 Monoton steigend . . . 3

1.1.2 Monoton fallend . . . 4

1.2 Parameter . . . 5

1.2.1 Monoton steigend . . . 5

1.2.2 Monoton fallend . . . 6

1.3 Koeffizienten . . . 7

1.3.1 Koeffizient a_4 . . . 7

1.3.2 Koeffizient a_3 . . . 8

1.3.3 Koeffizient a_2 . . . 9

1.3.4 Koeffizient a_1 . . . 10

1.3.5 Koeffizient a_0 . . . 11

2 Zusammenfassung **13**

3 Beispiele **15**

3.1 Beispiel I . . . 15

3.2 Beispiel II . . . 16

3.3 Grafiken . . . 17

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

[Dip] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Durchführung einer Regression über das Resttermverfahren am Beispiel einer bilogarithmischen Funktion.

---

1 Die Regression der bilogarithmischen Funktion

1.1 Methode

1.1.1 Monoton steigend

Gegeben ist eine bilogarithmische Funktion nach [Dip]: [001]

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{x}{p}\right)$$

Mit den Definitionsbereichen:

$$p > 0 \qquad q > 0 \qquad 0 < x < p$$

Die Funktion besitzt keine Extrema, dafür eine Wendestelle bei:

$$x_W = q \cdot e^{-1} = q \cdot E \qquad y_W = -\frac{1}{q} \cdot \ln\frac{1}{p \cdot q}$$

Um diesen Wert x_W wird bis x^4 taylorisiert.

$$y_T = -\frac{1}{24 \cdot q^5 \cdot E^4} \cdot x^4 + \frac{8}{24 \cdot q^4 \cdot E^3} \cdot x^3 - \frac{18}{24 \cdot q^3 \cdot E^2} \cdot x^2 + \frac{16}{24 \cdot q^2 \cdot E} \cdot x + \frac{24 - 24 \cdot q \cdot E \cdot \ln\frac{1}{p \cdot q} - 5 \cdot q \cdot E}{24 \cdot q^2 \cdot E}$$

Die zweite Ableitung wird gebildet und Null gesetzt:

$$y_T'' = -\frac{12}{24 \cdot q^5 \cdot E^4} \cdot x^2 + \frac{48 \cdot E \cdot q}{24 \cdot q^5 \cdot E^4} \cdot x - \frac{36 \cdot E^2 \cdot q^2}{24 \cdot q^5 \cdot E^4}$$

$\Rightarrow$

$$x^2 - 4 \cdot E \cdot q \cdot x + 3 \cdot E^2 \cdot q^2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_{N,1} = 3 \cdot E \cdot q \qquad x_{N,2} = E \cdot q$$

Damit ist die Darstellung der bilogarithmischen Funktion über eine biquadratische Polynomregression durchführbar.

1.1.2 Monoton fallend

[001] Gegeben ist eine bilogarithmische Funktion nach [Dip]:

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{p-x}{p}\right)$$

Mit den Definitionsbereichen:

$$p > 0 \qquad q > 0 \qquad 0 < x < p$$

Die Funktion besitzt keine Extrema, dafür eine Wendestelle bei:

$$x_W = p - q \cdot e^{-1} = p - q \cdot E \qquad y_W = -\frac{1}{q} \cdot \ln\frac{1}{p \cdot q}$$

Die Nullstellen der zweiten Ableitung der taylorisierten Bilogfunktion:

$$x_{N,1} = p - 3 \cdot E \cdot q \qquad x_{N,2} = p - E \cdot q$$

Damit ist die Darstellung der bilogarithmischen Funktion über eine biquadratische Polynomregression durchführbar. Im Gegensatz zur monoton steigenden Funktion sind die Nullstellen überbestimmt. Die Ermittlung von q und p weichen daher voneinander ab.

1.2 Parameter

1.2.1 Monoton steigend

Das regressierte Polynom ist bekannt:

$$y_R = a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0$$

Damit auch die Ableitungen:

$$y_R{}' = 4 \cdot a_4 \cdot x^3 + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 2 \cdot a_2 \cdot x^1 + a_1 \cdot x^0$$

⇒

$$y_R{}'' = 12 \cdot a_4 \cdot x^2 + 6 \cdot a_3 \cdot x^1 + 2 \cdot a_2 \cdot x^0$$

Die Wendestelle(n) = die Nullstellen der zweiten Ableitung:

$$x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot x + \frac{1}{6} \cdot \frac{a_2}{a_4} = 0$$

⇒

$$x_{N,1;2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{a_3}{a_4} \pm \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{a_4} \cdot \sqrt{a_3^2 - \frac{8}{3} \cdot a_2 \cdot a_4}$$

Mit der Abschätzung:

$$a_3^2 - \frac{8}{3} \cdot a_2 \cdot a_4 \geq 0$$

⇒

$$\frac{a_2 \cdot a_4}{a_3^2} \leq \frac{3}{8}$$

Da für x_W eine Berechnungsgrundlage aus der bilogarithmischen Funktion bekannt ist, kann der Koeffizient q bestimmt werden:

$$q = x_N \cdot e^1$$

⇒

$$q = e^1 \cdot \left(-\frac{1}{4} \cdot \frac{a_3}{a_4} \pm \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{a_4} \cdot \sqrt{a_3^2 - \frac{8}{3} \cdot a_2 \cdot a_4} \right)$$

Mit der Forderung $q > 0$ ergibt sich:

$$a_2 \cdot a_4 < 0 \qquad \rightarrow \qquad \operatorname{sgn}(a_2) \neq \operatorname{sgn}(a_4)$$

Damit ist obige Abschätzung immer erfüllt. Durch Einsetzen von x_W in y_T ergibt sich der Wert y_W welcher wiederum den Koeffizienten p liefert:

$$p = \frac{1}{q} \cdot e^{q \cdot y_N}$$

Auch für p gibt es eine Bedingung:

$$p > 0$$

⇒

$$e^{q \cdot y_N} > 0$$

Was immer erfüllt ist.

1.2.2 Monoton fallend

Das regressierte Polynom ist bekannt:

$$y_R = a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x^1 + a_0 \cdot x^0$$

Damit auch die Ableitungen:

$$y_R{}' = 4 \cdot a_4 \cdot x^3 + 3 \cdot a_3 \cdot x^2 + 2 \cdot a_2 \cdot x^1 + a_1 \cdot x^0$$

⇒

$$y_R{}'' = 12 \cdot a_4 \cdot x^2 + 6 \cdot a_3 \cdot x^1 + 2 \cdot a_2 \cdot x^0$$

Die Wendestelle(n) = die Nullstellen der zweiten Ableitung:

$$x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot x + \frac{1}{6} \cdot \frac{a_2}{a_4} = 0$$

⇒

$$x_{N,1;2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{a_3}{a_4} \pm \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{a_4} \cdot \sqrt{a_3^2 - \frac{8}{3} \cdot a_2 \cdot a_4}$$

Mit der Abschätzung:

$$a_3^2 - \frac{8}{3} \cdot a_2 \cdot a_4 \geq 0$$

⇒

$$\frac{a_2 \cdot a_4}{a_3^2} \leq \frac{3}{8}$$

Die Berechnung des Koeffizienten p erfolgt diesmal zuerst. So soll gelten:

$$x_{N,2} > x_{N,1}$$

⇒

$$p = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot x_{N,2} - x_{N,1})$$

Der Wert $x_{N,2}$ wird in die regressierte Funktion $y_R = y_T$ eingesetzt und $y_T\left(x_{N,2}\right)$ berechnet. Anschließend kann q mit bekanntem p ermittelt werden über:

$$y_T\left(x_{N,2}\right) = y\left(x_{N,2}\right)$$

⇒

$$q = -\frac{1}{y_T\left(x_{N,2}\right)} \cdot \mathbf{W}\left(\frac{y_T\left(x_{N,2}\right)}{p} \cdot \ln \frac{p - x_{N,2}}{p}\right)$$

Das Ergebnis ist eine LambertW-Funktion $\mathbf{W}(\bullet)$, welche mit geeigneten Mitteln aufgelöst werden muss.

1.3 Koeffizienten

Die Ermittlung des Regressionspolynoms erfolgt über den Gaußalgorithmus. Für die Notation siehe [Dip].

1.3.1 Koeffizient a_4

$$a_4 = \frac{\bar{B}}{\bar{A}}$$

Mit:

$$\bar{A} = \frac{\hat{B}}{\hat{A}} - \frac{\hat{E}}{\hat{D}} \qquad \bar{B} = \frac{\hat{C}}{\hat{A}} - \frac{\hat{F}}{\hat{D}}$$

Mit:

$$\hat{A} = \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{F}}{\tilde{E}} \qquad \hat{B} = \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{G}}{\tilde{E}} \qquad \hat{C} = \frac{\tilde{D}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{H}}{\tilde{E}}$$

$$\hat{D} = \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{J}}{\tilde{I}} \qquad \hat{E} = \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{K}}{\tilde{I}} \qquad \hat{F} = \frac{\tilde{D}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{L}}{\tilde{I}}$$

Mit:

$$\tilde{A} = \frac{B}{A} - \frac{G}{F} \qquad \tilde{B} = \frac{C}{A} - \frac{H}{F} \qquad \tilde{C} = \frac{D}{A} - \frac{I}{F} \qquad \tilde{D} = \frac{E}{A} - \frac{J}{F}$$

$$\tilde{E} = \frac{B}{A} - \frac{L}{K} \qquad \tilde{F} = \frac{C}{A} - \frac{M}{K} \qquad \tilde{G} = \frac{D}{A} - \frac{N}{K} \qquad \tilde{H} = \frac{E}{A} - \frac{O}{K}$$

$$\tilde{I} = \frac{B}{A} - \frac{Q}{P} \qquad \tilde{J} = \frac{C}{A} - \frac{R}{P} \qquad \tilde{K} = \frac{D}{A} - \frac{S}{P} \qquad \tilde{L} = \frac{E}{A} - \frac{T}{P}$$

Mit:

$$A = U - \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \qquad B = V - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \qquad C = W - \frac{\{x^4\}}{\{x\}} \qquad D = X - \frac{\{x^5\}}{\{x\}}$$

$$E = Y - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}} \qquad F = U - \frac{\{x^3\}}{\{x^2\}} \qquad G = V - \frac{\{x^4\}}{\{x^2\}} \qquad H = W - \frac{\{x^5\}}{\{x^2\}}$$

$$I = X - \frac{\{x^6\}}{\{x^2\}} \qquad J = Y - \frac{\{x^2 \cdot y\}}{\{x^2\}} \qquad K = U - \frac{\{x^4\}}{\{x^3\}} \qquad L = V - \frac{\{x^5\}}{\{x^3\}}$$

$$M = W - \frac{\{x^6\}}{\{x^3\}} \qquad N = X - \frac{\{x^7\}}{\{x^3\}} \qquad O = Y - \frac{\{x^3 \cdot y\}}{\{x^3\}} \qquad P = U - \frac{\{x^5\}}{\{x^4\}}$$

$$Q = V - \frac{\{x^6\}}{\{x^4\}} \qquad R = W - \frac{\{x^7\}}{\{x^4\}} \qquad S = X - \frac{\{x^8\}}{\{x^4\}} \qquad T = Y - \frac{\{x^4 \cdot y\}}{\{x^4\}}$$

Mit:

$$U = \frac{\{x\}}{n} \qquad V = \frac{\{x^2\}}{n} \qquad W = \frac{\{x^3\}}{n} \qquad X = \frac{\{x^4\}}{n} \qquad Y = \frac{\{y\}}{n}$$

1.3.2 Koeffizient a_3

$$a_3 = \frac{\hat{C}}{\hat{A}} - \frac{\hat{B}}{\hat{A}} \cdot a_4$$

Mit:

$$\hat{A} = \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{F}}{\tilde{E}} \qquad \hat{B} = \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{G}}{\tilde{E}} \qquad \hat{C} = \frac{\tilde{D}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{H}}{\tilde{E}}$$

Mit:

$$\tilde{A} = \frac{B}{A} - \frac{G}{F} \qquad \tilde{B} = \frac{C}{A} - \frac{H}{F} \qquad \tilde{C} = \frac{D}{A} - \frac{I}{F} \qquad \tilde{D} = \frac{E}{A} - \frac{J}{F}$$

$$\tilde{E} = \frac{B}{A} - \frac{L}{K} \qquad \tilde{F} = \frac{C}{A} - \frac{M}{K} \qquad \tilde{G} = \frac{D}{A} - \frac{N}{K} \qquad \tilde{H} = \frac{E}{A} - \frac{O}{K}$$

Mit:

$$A = U - \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \qquad B = V - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \qquad C = W - \frac{\{x^4\}}{\{x\}} \qquad D = X - \frac{\{x^5\}}{\{x\}} \qquad E = Y - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}}$$

$$F = U - \frac{\{x^3\}}{\{x^2\}} \qquad G = V - \frac{\{x^4\}}{\{x^2\}} \qquad H = W - \frac{\{x^5\}}{\{x^2\}} \qquad I = X - \frac{\{x^6\}}{\{x^2\}} \qquad J = Y - \frac{\{x^2 \cdot y\}}{\{x^2\}}$$

$$K = U - \frac{\{x^4\}}{\{x^3\}} \qquad L = V - \frac{\{x^5\}}{\{x^3\}} \qquad M = W - \frac{\{x^6\}}{\{x^3\}} \qquad N = X - \frac{\{x^7\}}{\{x^3\}} \qquad O = Y - \frac{\{x^3 \cdot y\}}{\{x^3\}}$$

Mit:

$$U = \frac{\{x\}}{n} \qquad V = \frac{\{x^2\}}{n} \qquad W = \frac{\{x^3\}}{n} \qquad X = \frac{\{x^4\}}{n} \qquad Y = \frac{\{y\}}{n}$$

1.3.3 Koeffizient a_2

$$a_2 = \frac{\tilde{D}}{\tilde{A}} - \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} \cdot a_4 - \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} \cdot a_3$$

Mit:

$$\tilde{A} = \frac{B}{A} - \frac{G}{F} \qquad \tilde{B} = \frac{C}{A} - \frac{H}{F}$$
$$\tilde{C} = \frac{D}{A} - \frac{I}{F} \qquad \tilde{D} = \frac{E}{A} - \frac{J}{F}$$

Mit:

$$A = U - \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \qquad B = V - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \qquad C = W - \frac{\{x^4\}}{\{x\}} \qquad D = X - \frac{\{x^5\}}{\{x\}} \qquad E = Y - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}}$$

$$F = U - \frac{\{x^3\}}{\{x^2\}} \qquad G = V - \frac{\{x^4\}}{\{x^2\}} \qquad H = W - \frac{\{x^5\}}{\{x^2\}} \qquad I = X - \frac{\{x^6\}}{\{x^2\}} \qquad J = Y - \frac{\{x^2 \cdot y\}}{\{x^2\}}$$

Mit:

$$U = \frac{\{x\}}{n} \qquad V = \frac{\{x^2\}}{n} \qquad W = \frac{\{x^3\}}{n} \qquad X = \frac{\{x^4\}}{n} \qquad Y = \frac{\{y\}}{n}$$

1.3.4 Koeffizient a_1

$$a_1 = \frac{E}{A} - \frac{D}{A} \cdot a_4 - \frac{C}{A} \cdot a_3 - \frac{B}{A} \cdot a_2$$

Mit:

$$A = U - \frac{\{x^2\}}{\{x\}} \qquad B = V - \frac{\{x^3\}}{\{x\}} \qquad C = W - \frac{\{x^4\}}{\{x\}} \qquad D = X - \frac{\{x^5\}}{\{x\}} \qquad E = Y - \frac{\{x \cdot y\}}{\{x\}}$$

Mit:

$$U = \frac{\{x\}}{n} \qquad V = \frac{\{x^2\}}{n} \qquad W = \frac{\{x^3\}}{n} \qquad X = \frac{\{x^4\}}{n} \qquad Y = \frac{\{y\}}{n}$$

1.3.5 Koeffizient a_0

$$a_0 = Y - X \cdot a_4 - W \cdot a_3 - V \cdot a_2 - U \cdot a_1$$

Mit:

$$U = \frac{\{x\}}{n} \qquad V = \frac{\{x^2\}}{n} \qquad W = \frac{\{x^3\}}{n} \qquad X = \frac{\{x^4\}}{n} \qquad Y = \frac{\{y\}}{n}$$

2 Zusammenfassung

• **Monoton steigend:**

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{x}{p}\right)$$

Berechnung der Koeffizienten a_0 bis a_4 über eine biquadratische Regression.

$$y_T = a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$\Rightarrow$

$$x_{N,1;2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{a_3}{a_4} \pm \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{a_4} \cdot \sqrt{a_3^2 - \frac{8}{3} \cdot a_2 \cdot a_4}$$

Bilden der zweiten Ableitung y_T'' und Berechnung der Nullstellen $x_{N,1;2}$ entspricht den Wendestellen von y_T. Ermitteln der Funktionswerte $y_T\left(x_{N,1;2}\right) = y_{N,1;2}$. Berechnen von q und p nach:

$$q = x_{N,1} \cdot e^{+1}$$

Sowie:

$$p = \frac{1}{q} \cdot e^{+q \cdot y_{N,1}}$$

• **Monoton fallend:**

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{p-x}{p}\right)$$

Berechnung der Koeffizienten a_0 bis a_4 über eine biquadratische Regression.

$$y_T = a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

$\Rightarrow$

$$x_{N,1;2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{a_3}{a_4} \pm \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{a_4} \cdot \sqrt{a_3^2 - \frac{8}{3} \cdot a_2 \cdot a_4}$$

Bilden der zweiten Ableitung y_T'' und Berechnung der Nullstellen $x_{N,1;2}$ entspricht den Wendestellen von y_T. Ermitteln der Funktionswerte $y_T\left(x_{N,1;2}\right) = y_{N,1;2}$. Berechnen von q und p nach:

$$p = \frac{1}{2} \cdot \left(3 \cdot x_{N,2} - x_{N,1}\right)$$

Sowie:

$$q = -\frac{1}{y_{N,2}} \cdot \mathbf{W}\left(\frac{y_{N,2}}{p} \cdot \ln\frac{p - x_{N,2}}{p}\right)$$

Wobei die LambertW-Funktion $\mathbf{W}(\bullet)$ mit geeigneten Mitteln aufgelöst werden muss.

• **Genauigkeitsabschätzung:**

$$\frac{a_2 \cdot a_4}{a_3^2} \leq \frac{3}{8}$$

Wobei gilt, je näher an $3/8$, desto genauer die durchgeführte Regression.

• **LambertW-Funktion:**

Ein optimierbarer Ersatz für die LambertW-Funktion im Intervall von 0 bis 5 ist gegeben durch:

$$\mathbf{W}(x) \approx a \cdot \ln(b \cdot x + 1)$$

Mit:

$$a = 0{,}614 \qquad b = 1{,}523$$

3 Beispiele

3.1 Beispiel I

Aus [Dip] ist für folgende Regression bekannt, dass

$$q = 1,1001 \qquad\qquad p = 1,0472$$

bei den Werten:

n	**x^1**	**x^2**	**x^3**	**x^4**	**x^5**	**x^6**	**x^7**	**x^8**
1	0, 110	0, 012 100	0, 001 331	0, 000 146	0, 000 016	0, 000 002	0, 000 000	0, 000 000
2	0, 190	0, 036 100	0, 006 859	0, 001 303	0, 000 248	0, 000 047	0, 000 009	0, 000 002
3	0, 300	0, 090 000	0, 027 000	0,008 100	0, 002 430	0, 000 729	0, 000 219	0, 000 066
4	0, 410	0, 168 100	0, 068 921	0, 028 258	0, 011 586	0, 004 750	0, 001 948	0, 000 798
5	0, 490	0, 240 100	0, 117 649	0, 057 648	0, 028 248	0, 013 841	0, 006 782	0, 003 323
6	0, 610	0, 372 100	0, 226 981	0, 138 458	0, 084 460	0, 051 520	0, 031 427	0, 019 171
7	0, 700	0, 490 000	0, 343 000	0, 240 100	0, 168 070	0, 117 649	0, 082 354	0, 057 648
8	0, 790	0, 624 100	0, 493 039	0, 389 501	0, 307 706	0, 243 087	0, 192 039	0, 151 711
9	0, 890	0, 792 100	0, 704 969	0, 627 422	0, 558 406	0, 496 981	0, 442 313	0, 393 659
9	**4, 490**	**2, 824 700**	**1, 989 749**	**1, 490937**	**1, 161 168**	**0, 928 607**	**0, 757 092**	**0, 626 378**
n	**x^0**·f(x)	**x^1**·f(x)	**x^2**·f(x)	**x^3**·f(x)	**x^4**·f(x)	**-**	**-**	**-**
1	-0, 850	-0, 093 500	-0, 010 285	-0, 001 131	-0, 000 124	-	-	-
2	-0, 460	-0, 087 400	-0, 016 606	-0, 003 155	-0, 000 599	-	-	-
3	-0, 180	-0, 054 000	-0, 016 200	-0, 004 860	-0, 001 458	-	-	-
4	+0, 090	+0, 036 900	+0, 015 129	+0, 006 203	+0, 002 543	-	-	-
5	+0, 370	+0, 181 300	+0, 088 837	+0, 043 530	+0, 021 330	-	-	-
6	+0, 660	+0, 402 600	+0, 245 586	+0, 149 807	+0, 091 383	-	-	-
7	+1, 040	+0, 728 000	+0, 509 600	+0, 356 720	+0, 249 704	-	-	-
8	+1, 500	+1, 185 000	+0, 936 150	+0, 739 559	+0, 584 251	-	-	-
9	+2, 260	+2, 011 400	+1, 790 146	+1, 593 230	+1, 417 975	-	-	-
9	**+4, 430**	**+4, 310 300**	**+3, 542 357**	**+2, 879 902**	**+2, 365 003**	**-**	**-**	**-**

Die Koeffizienten aus der Polynomregression bilden die Funktion y_T ab mit den Nullstellen der zweiten Ableitung y_T'':[1]

$$\begin{aligned} y_T \rightarrow a_4 &= +0,923554 \\ a_3 &= +7,077860 \\ a_2 &= -9,755919 \\ a_1 &= +6,587674 \\ a_0 &= -1,450138 \\ \rightarrow \frac{a_2 \cdot a_4}{a_3^2} &= -0,18 \leq \frac{3}{8} = 0,375 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$y_T'' = 0 \rightarrow x_{N,1;2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{7,077860}{0,923554} \pm \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{0,923554} \cdot \sqrt{7,077860^2 + \frac{8}{3} \cdot 9,755919 \cdot 0,923554}$$

$\Rightarrow$

$$x_{N,1} = +0,414598 \qquad\qquad x_{N,2} = -4,246461$$

Mit:

$$y_T \rightarrow y_{N,1} = +0,135838$$

Damit sind die Koeffizienten q und p berechnet:

$$q = +0,414598 \cdot e^{+1} = +1,127 \qquad\qquad p = \frac{1}{+1,127} \cdot e^{+1,127 \cdot 0,135838} = +1,034$$

Grafik dazu im Anhang.

[1] Siehe unter www.Zenithpoint.de dazugehöriges Classic-Maple-Worksheet©.

3.2 Beispiel II

Aus [Dip] ist für folgende Regression bekannt, dass

$$q = 0,9872 \qquad p = 0,9759$$

bei den Werten:

n	**x**^{1}	**x**^{2}	**x**^{3}	**x**^{4}	**x**^{5}	**x**^{6}	**x**^{7}	**x**^{8}
1	0, 890	0, 792 100	0, 704 969	0, 627 422	0, 558 406	0, 496 981	0, 442 313	0, 393 659
2	0, 790	0, 624 100	0, 493 039	0, 389 501	0, 307 706	0, 243 087	0, 192 039	0, 151 711
3	0, 700	0, 490 000	0, 343 000	0, 240 100	0, 168 070	0, 117 649	0, 082 354	0, 057 648
4	0, 610	0, 372 100	0, 226 981	0, 138 458	0, 084 460	0, 051 520	0, 031 427	0, 019 171
5	0, 490	0, 240 100	0, 117 649	0, 057 648	0, 028 248	0, 013 841	0, 006 782	0, 003 323
6	0, 410	0, 168 100	0, 068 921	0, 028 258	0, 011 586	0, 004 750	0, 001 948	0, 000 798
7	0, 300	0, 090 000	0, 027 000	0,008 100	0, 002 430	0, 000 729	0, 000 219	0, 000 066
8	0, 190	0, 036 100	0, 006 859	0, 001 303	0, 000 248	0, 000 047	0, 000 009	0, 000 002
9	0, 110	0, 012 100	0, 001 331	0, 000 146	0, 000 016	0, 000 002	0, 000 000	0, 000 000
9	**4, 490**	**2, 824 700**	**1, 989 749**	**1, 490937**	**1, 161 168**	**0, 928 607**	**0, 757 092**	**0, 626 378**

n	**x**^{0}·f(x)	**x**^{1}·f(x)	**x**^{2}·f(x)	**x**^{3}·f(x)	**x**^{4}·f(x)	**-**	**-**	**-**
1	-0, 850	-0, 756 500	-0, 673 285	-0, 599 224	-0, 533 309	-	-	-
2	-0, 460	-0, 363 400	-0, 287 086	-0, 226 798	-0, 179 170	-	-	-
3	-0, 180	-0, 126 000	-0, 088 200	-0, 061 740	-0, 043 218	-	-	-
4	+0, 090	+0, 054 900	+0, 033 489	+0, 020 428	+0, 012 461	-	-	-
5	+0, 370	+0, 181 300	+0, 088 837	+0, 043 530	+0, 021 330	-	-	-
6	+0, 660	+0, 270 600	+0, 110 946	+0, 045 487	+0, 018 650	-	-	-
7	+1, 040	+0, 312 000	+0, 093 600	+0, 028 080	+0, 008 424	-	-	-
8	+1, 500	+0, 285 000	+0, 054 150	+0 010 289	+0, 001 955	-	-	-
9	+2, 260	+0, 248 600	+0, 027 346	+0, 003 008	+0, 000 331	-	-	-
9	**+4, 430**	**+0, 106 500**	**-0, 640 203**	**-0, 736 939**	**-0, 692 547**	**-**	**-**	**-**

Die Koeffizienten aus der Polynomregression bilden die Funktion y_T ab mit den Nullstellen der zweiten Ableitung y''_T:[2]

$$\begin{aligned} y_T \rightarrow a_4 &= +14,864865 \\ a_3 &= -38,873180 \\ a_2 &= +35,764983 \\ a_1 &= -16,591674 \\ a_0 &= +3,676284 \\ \rightarrow \frac{a_2 \cdot a_4}{a_3^2} &= 0,352 \leq \frac{3}{8} = 0,375 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$y''_T = 0 \rightarrow x_{N,1;2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{-38,873180}{+14,864865} \pm \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{+14,864865} \cdot \sqrt{38,873180^2 - \frac{8}{3} \cdot 35,764983 \cdot 14,864865}$$

$\Rightarrow$

$$x_{N,1} = +0,491228 \qquad x_{N,2} = +0,816325$$

Mit:

$$y_T \rightarrow y_{N,2} = -0,580097$$

Damit sind die Koeffizienten q und p berechnet:

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 0,816325 - 0,491228) = +0,9789 \\ q &= \frac{1}{0,580097} \cdot \mathbf{W}\left(-\frac{0,580097}{0,978873} \cdot \ln \frac{0,978873 - 0,816325}{0,978873}\right) = 1,7238 \cdot \mathbf{W}(1,064) \\ &= 1,7238 \cdot 0,5899 = +1,0169 \end{aligned}$$

Grafik dazu im Anhang.

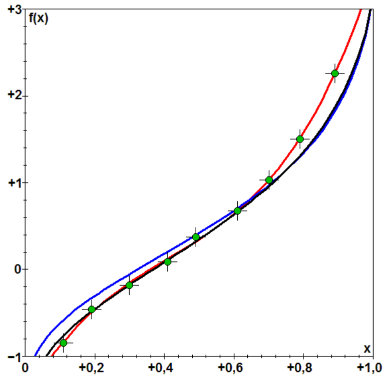
[2] Siehe unter www.Zenithpoint.de dazugehöriges Classic-Maple-Worksheet©.

3.3 Grafiken

• Monoton steigend

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{x}{p}\right)$$

⇒

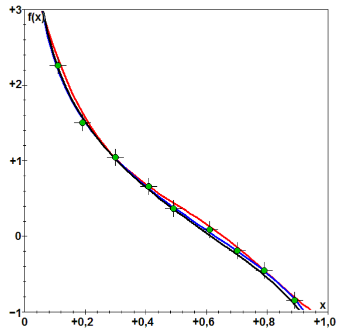


Rot - Das regressierte biquadratische Polynom.
Blau - Die ermittelte bilogarithmische Funktion
Schwarz - Der Vergleich zur Regression nach [Dip].

• Monoton fallend

$$y = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{p-x}{p}\right)$$

⇒

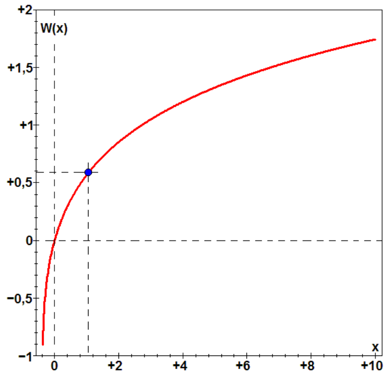


Rot - Das regressierte biquadratische Polynom.
Blau - Die ermittelte bilogarithmische Funktion
Schwarz - Der Vergleich zur Regression nach [Dip].

• LambertW-Funktion

$$y = \mathbf{W}(x)$$

⇒



Der obere Ast der Lambertschen **W**-Funktion. Der untere Ast ist irrelevant, da dieser außerhalb $0 < x < p$ liegt. Mit eingezeichnet der **W**-Wert für Beispiel II.

$\LaTeX\,2_\varepsilon$