Einführung in das Thema

Die Idee des Interpolationsfilters

Interpolation als mathematischer Begriff

Anwendung im vorliegenden Thema

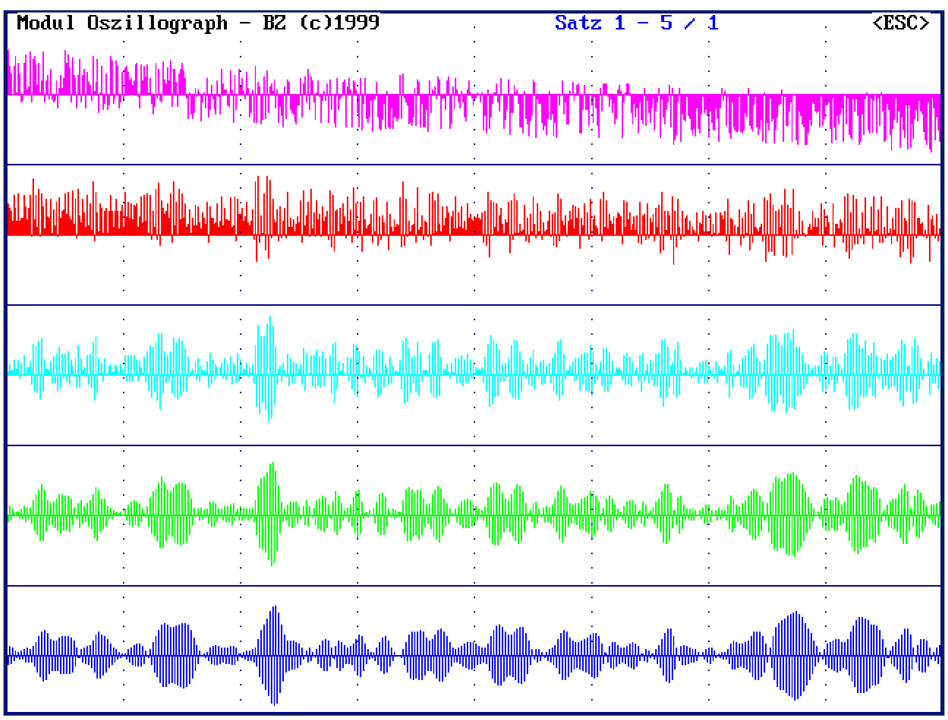

Abb.1: Wirkung eines Interpolationsfilters auf ein stochastisches, binäres Signal

1. 1 Die Idee Interpolationsfilters

Aufwand und Nutzen stehen nicht immer im Einklang. Besonders exzessiv ist dieses Phänomen bei der Entwicklung von Software zu beobachten. Das später hinterher geschobene Benutzer“hand“buch zollt diesem Fakt noch seinem Tribut. Selbst bei der Experimentalsoftware innerhalb (m)eines vorhergehenden Projektes „Ionosphäre Plus“ mit den Modulen „Noix“ ist es nicht anders. Effektiv besteht das dort realisierte Interpolationsfilter aus einer (beim unsymmetrischen) bzw. vier (beim symmetrischen Filter) Programmzeilen.

$$B(H)=\Big(\big(B(H)-B(H-1)\big)/(1-0)\Big)\cdot\big((1+\xi)-0\big)+B(H-1)$$

$$I(1)=\Big(\big(B(H)-B(H-1)\big)/(1-0)\Big)\cdot\big((1+\xi)-0\big)+B(H-1)$$

$$I(2)=\Big(\big(B(H)-B(H-1)\big)/(1-0)\Big)\cdot\big((-1)\xi-0\big)+B(H-1)$$

$$B(H)=I(1)$$

$$B(H-1)=I(2)$$

Der Rest sind Anpassungs-, Oberflächen- und/oder Zusatzsoftware. Aber gerade diese 0, ... % obig beschriebener Software sollen nachfolgend von Interesse sein.

Als im Jahre 1995 in einer Vorlesung im Fachgebiet Mathematik/ Informatik mir die Idee eines Filters auf Grundlage eines programmierbaren Interpolationsvorganges aufkam, war die Urschrift lediglich eine locker beschriebene Seite lang. Dem Umstand zugrunde, dass keine freie Rechentechnik über längere Zeit und auch diese selber zur Verfügung stand, wurde nicht weiter an dieser Idee gearbeitet. Jetzt, da die Randbedingungen sich verbessert haben und ein konkreter Einsatzgrund besteht, wurde diese Urschrift nun die Grundlage des hier vorliegenden „Werkes“.

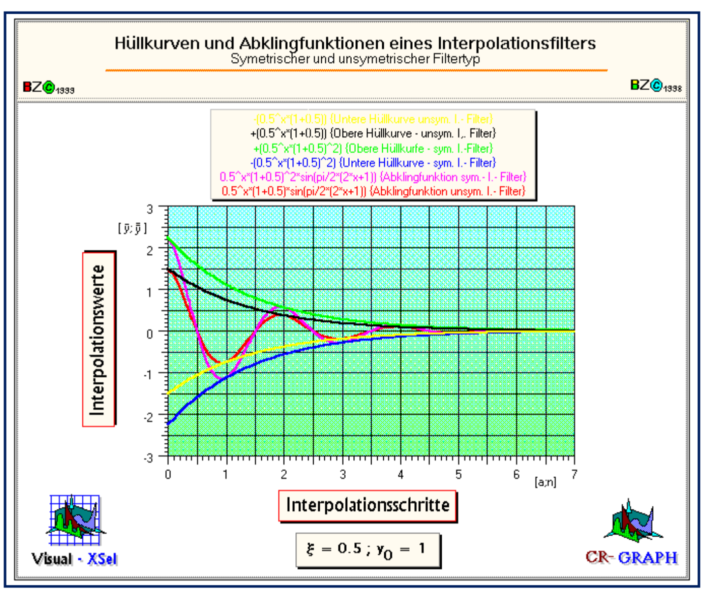

Abb.2: Deckblatt der Urschrift des Projektes I- $_{\text{Filter}}$

1. 2 Interpolation als mathematischer Begriff

1. 2. 1 Allgemeines

Unter Interpolation versteht man das Ermitteln einer unbekannten Größe aus bekannten (Rand)Werten einer Funktion. Dabei handelt es sich um ein (An)Näherungsverfahren der gefundenen Größe an den (noch) unbekannten wahren Wert, welcher gesucht wird und nach einer genügen großen Anzahl von Interpolationsdurchläufen dann hinreichend genau getroffen wird.

Methoden sowie Vorgehensweisen der Interpolation wurden genügend beschrieben und sind in der einschlägigen Literatur nachvollziehbar.

Im weiteren Verlauf wird lediglich auf die Interpolation von Gleichungen mit einer Unbekannten zugegriffen, ein Verfahren, welches unter dem Begriff der „Linearen Interpolation – LI" in der Mathematik bekannt ist.

1. 2. 2 Lineare Interpolation

Diese Art der Interpolation soll im weiteren Verlauf die Grundlage sein, mit welcher ein später aufgebautes Interpolationsfilter funktionieren soll. Zwei Möglichkeiten der LI bei der Unbekanntenermittlung sind das Tangenten- bzw. Sekantenverfahren. Von beiden wiederum ist nur das Tangentenverfahren hier von Bedeutung.

Einer bekannten, mathematisch beschreibbaren, jedoch komplizierten Funktion f(x) soll ein Wert entnommen werden, welcher offensichtlich zwischen zwei schon vorher ermittelten oder anderweitig bekannten Randwerten liegt. Eine Umstellung soll in unserem Falle nicht möglich sein, mit Hilfe der LI ist jedoch der Wert ermittelbar.

Beispiel dafür soll folgende Funktionen sein:

$$f(x)=p\cdot e^{-q\cdot x} \qquad g(x)=-\frac{1}{q}\cdot\frac{\ln 1}{p}x$$

Der Schnittpunkt dieser Funktionen ist nicht explizit ermittelbar, bekannt jedoch ist und dies lässt sich leicht nachprüfen, dass folgende Randpunkte existieren.

$$P_{f(x)}(0;p) \qquad P_{g(x)}(p;0)$$

Dies reicht nun aus, um für einen speziellen Fall, d.h. z.B. p=1 und q=2 (nur eine Unbekannte ist erlaubt!), den Wert „x" zu ermitteln für den Fall, wo gilt: f(x) = g(x).

Hier die Lösung, jedoch nicht ausführlich, sondern das Endresultat berechnet mittels fünf Interpolationsstützstellen für f(x):

$$x=\frac{1}{32}y_1+\frac{1}{16}y_4+\frac{1}{8}y_7+\frac{1}{4}y_{10}+\frac{1}{2}y_{13}$$

mit:

$$y_{13}=p\cdot e^{-q\cdot\left(\frac{1}{16}y_1+\frac{1}{8}y_4+\frac{1}{4}y_7+\frac{1}{2}y_{10}\right)}$$
$$y_{10}=p\cdot e^{-q\cdot\left(\frac{1}{8}y_1+\frac{1}{4}y_4+\frac{1}{2}y_7\right)}$$
$$y_{07}=p\cdot e^{-q\cdot\left(\frac{1}{4}y_1+\frac{1}{2}y_4\right)}$$
$$y_{04}=p\cdot e^{-q\cdot\left(\frac{1}{2}y_1\right)}$$
$$y_{01}=p$$

das ergibt dann:

$$y_{01}=1{,}000$$
$$y_{04}=0{,}368$$
$$y_{07}=0{,}420$$
$$y_{10}=0{,}426$$
$$y_{13}=0{,}426$$

$$x=0{,}426$$
$$f_{(0{,}426)}=0{,}426$$
$$g_{(0{,}426)}=0{,}426$$

Schnell sieht man, wie sich Stützstellenwerte und Gesamtergebnis annähern. Bei einer Zweistellengenauigkeit würden zwei Interpolationsdurchläufe schon hinreichend sein. Genaueres über das hier genutzte Beispiel ist in „Was ist eine Konstante?“ nachzulesen. Benutzt man statt f(x) die Funktion g(x), dann sieht das Gesamtbild so aus:

$$y=\frac{1}{32}x_2+\frac{1}{16}x_5+\frac{1}{8}x_8+\frac{1}{4}x_{11}+\frac{1}{2}x_{14}$$

Mit den einzelnen „x“- Werten von:

$$x_{14}=-\frac{1}{q}\cdot\ln\left(\frac{1}{p}\cdot\left[\frac{1}{16}x_2+\frac{1}{8}x_5+\frac{1}{4}x_8+\frac{1}{2}x_{11}\right]\right)$$
$$x_{11}=-\frac{1}{q}\cdot\ln\left(\frac{1}{p}\cdot\left[\frac{1}{8}x_2+\frac{1}{4}x_5+\frac{1}{2}x_8\right]\right)$$
$$x_{08}=-\frac{1}{q}\cdot\ln\left(\frac{1}{p}\cdot\left[\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{2}x_5\right]\right)$$
$$x_{05}=-\frac{1}{q}\cdot\ln\left(\frac{1}{p}\cdot\left[\frac{1}{2}x_2\right]\right)$$
$$x_{02}=p$$

Ergibt dann:

$$x_{02}=1$$
$$x_{05}=0{,}347$$
$$x_{08}=0{,}430$$
$$x_{11}=0{,}426$$
$$x_{14}=0{,}426$$

$$y=0{,}426$$

1. 3 Anwendung im vorliegenden Thema

Grundsätzlich ist ein Interpolationsfilter dazu geeignet, bekannte Funktionen (und im späteren Verlauf i.w.S Signale) mittels festgelegten, mathematisch beschreibbaren Algorithmus zu verändern. Zwei Randbedingungen sind jedoch zu beachten:

- Die Ausgangsfunktion muss im Wertebereich, sowie im Definitionsbereich diskret beschrieben sein. Die Anzahl der Stützstellen ist endlich und bekannt.

- Der Abstand dieser Stützstellen ist konstant.

Mit diesen Bedingungen lässt sich schon eine kleine Eingrenzung von späteren Anwendungen ermöglichen:

- Ist die Ausgangsfunktion ein Signal, so ist es ein pulsamplitudenmoduliertes binäres Signal.

- Ist das Ausgangssignal ein binäres Signal, so lässt es sich als Datei bearbeiten und speichern.

Letzteres wird im weiteren Verlauf benutzt unter dem WAV- Format, vornehmlich im vorliegenden Fall mit einer 8- Bit- Wertebereichsdarstellung. Die Anzahl der Stützstellen im Definitionsbereich ist abhängig von der Abtastrate und begrenzt durch die Definition des Formates WAV selbst.

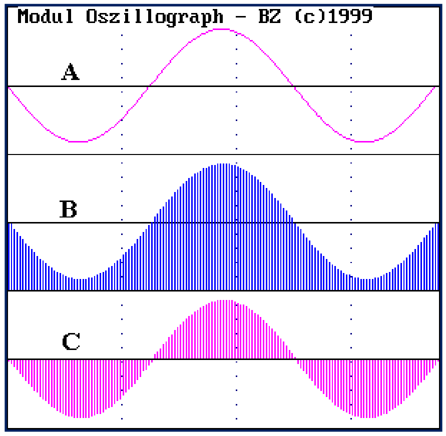

Abb.3: Beziehung zwischen einer mathematischen Funktion [A], hier eine Sinuskurve, und dem dazugehörigen PAMB- Signal [B]. In Detail [C] wurde dem Signal ein Offset hinzugefügt von der Hälfte der Amplitude, dies entspricht dann den Konventionen des WAV- Formats.

Der enge, untrennbare Zusammenhang zwischen einer interpolierfähigen Funktion und einem PAMB- Signal ermöglicht den Einsatz eines Interpolationsfilters nicht nur in der Mathematik sondern auch in Bereichen, wo PAMB- Signale bearbeitet werden sollen, z.B. wie in der Physik, der Biomathematik oder in der Theoretischen Biologie.

Im Weiteren soll deshalb auch nicht streng getrennt werden zwischen Funktion im mathematischen Sinne und dem Signal im physikalischen Sinne. Desweiteren wird auch nicht mehr ausdrücklich von einem PAMB- Signal geschrieben, das Wort Signal bezeichnet eben dieses ab jetzt.

Σ