Mathematische Grundlagen eines Interpolationsfilters

Mathematische Beschreibung einer Funktion

Durchführung der Linearen Interpolation

Die allgemeine Interpolationsgleichung

Die typgebundenen Interpolationsgleichungen

Sonderfälle

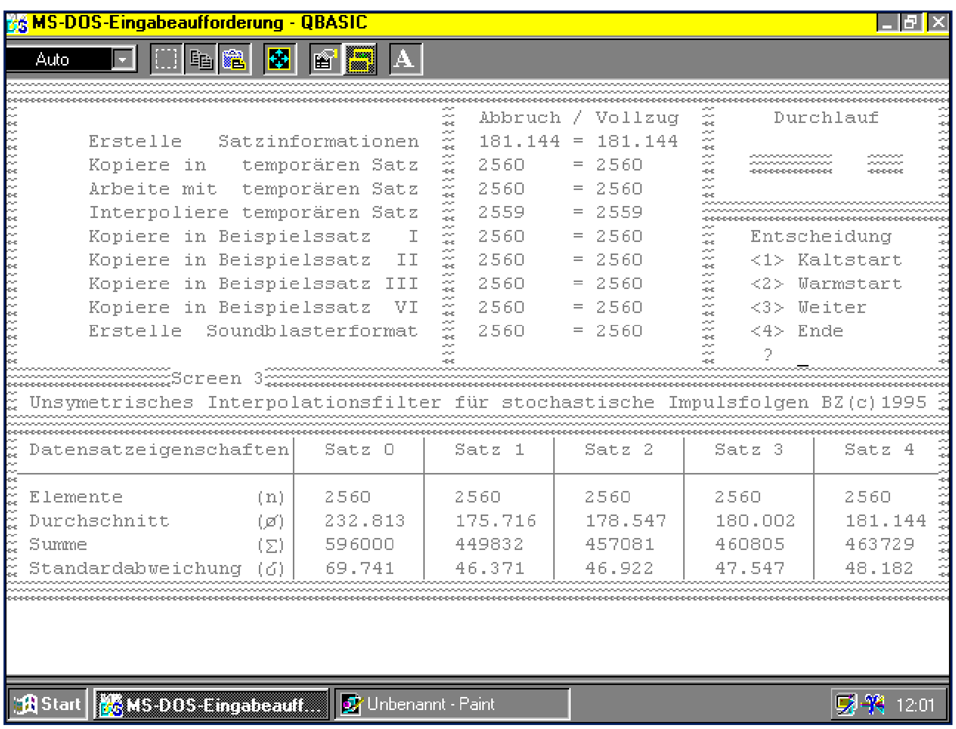

Abb.4: Hardcopy der Experimentalsoftware aus Urschrift des Projektes $I\text{-}_{Filter}$

2. 1 Mathematische Beschreibung einer Funktion

Funktionen kann man u. a. auf zwei verschiedene Weisen mathematisch beschreiben. Die bekanntere Art, explizit in der Form y=f(x) und/oder implizit als F(x;y)=0. Erstere wird im weiteren Verlauf genutzt.

Desweiteren ist es möglich eine Funktion beliebiger Form mittels Stützstellen ausreichend zu beschreiben. Für die Funktion y=f(x) gilt also:

$$
\boxed{\begin{array}{l}
y = f(x) \\
----------- \\
y_0 = f(x_0 + 0 * \Delta x) \\
y_1 = f(x_0 + 1 * \Delta x) \\
y_2 = f(x_0 + 2 * \Delta x) \\
y_3 = f(x_0 + 3 * \Delta x) \\
----------- \\
y_n = f(x_0 + n * \Delta x)
\end{array}}
$$

Die dazu gehörigen Punkte auf dem Grafen der Funktion sind nun beschreibbar in der Form:

$$
\boxed{\begin{array}{l}
P[x; f(x)] = P(x; y) \\
-------------- \\
P_0[x_0; f(x_0)] = P_0(x_0; y_0) \\
P_1[x_1; f(x_1)] = P_1(x_1; y_1) \\
P_2[x_2; f(x_2)] = P_2(x_2; y_2) \\
P_3[x_3; f(x_3)] = P(x_3; y_3) \\
-------------- \\
P_n[x_n; f(x_n)] = P(x_n; y_n)
\end{array}}
$$

Zur Erklärung von „Δx“ wird festgelegt:

$$
\boxed{\Delta x = const. = f(x_{n+1}) - f(x_n) = y_{n+1} - y_n}
$$

Der absolute Wert von Δx ist entscheidend für die weitere Sichtweise, ob es sich um eine Funktion handelt oder um ein Signal, welches der Graf darstellt. Dabei sind drei globale Festlegungen hier festgelegt:

$$
\boxed{\begin{array}{l}
\Delta x \to 0 \equiv Funktion \\
\Delta x > 0 \equiv \mathrm{Re}\,ihe \\
\Delta x = 1 \equiv Signal
\end{array}}
$$

Nun steht einer Interpolation, die der Stützstellen nichts mehr im Wege.

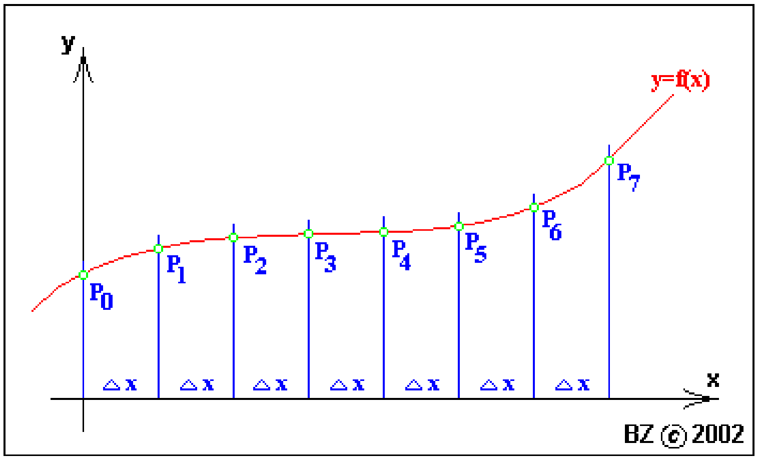

Abb. 5: Zur Erklärung der Begriffe „Stützstelle“ und „Δx“.

2. 2 Durchführung der Linearen Interpolation

2. 2. 1 Allgemeines

Möglichkeiten der LI sind schon in 1. 2. 2 beschreiben worden. Jedoch sind in der Ermittlung markanter Punkte einer Funktion (Schnittpunkte, Nullstellen usw.) nicht die Möglichkeiten der LI erschöpft. Auch die Berechnung von allgemeinen Werten ist möglich. Wiederum sind dazu zwei Stützstellen nötig, die möglichst zwei Randpunkte sein sollten (aber nicht unbedingt müssen). Je nach Krümmung „k“ der Funktion an der betrachteten Stelle müssen dann diese zwei Stützpunkte mehr oder weniger eng stehen, um hinreichend genaue Ergebnisse zu erhalten.

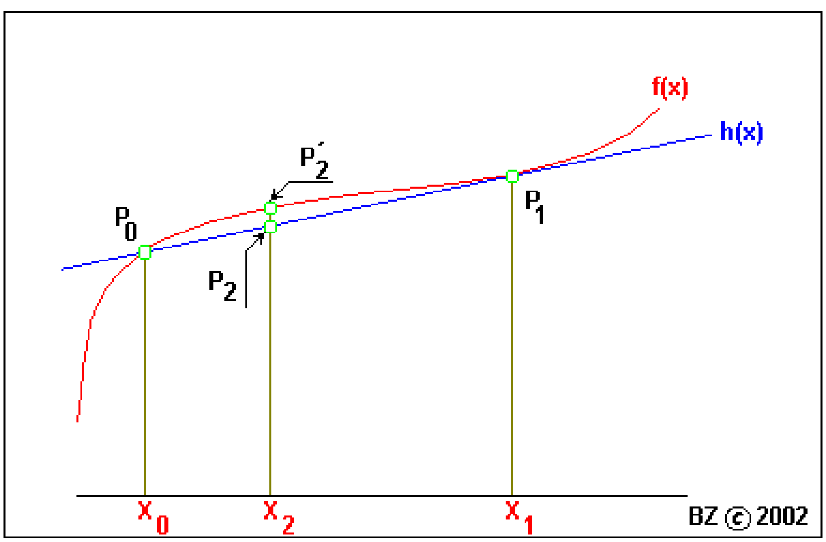

Abb. 6: Prinzip der Linearen Interpolation.

Prinzipiell wird zuerst eine Hilfsgerade h(x) zwischen den Stützstellenpunkte $P_0(x_0;y_0)$ und $P_1(x_1;y_1)$ gezogen, von denen wiederum vorausgesetzt wird, dass diese bekannt sind. Durch Einsetzen von x- Werten in die Hilfsgerade werden dann gesuchte y- Werte interpoliert. Ergebnis ist dann der Punkt $P_2(x_2;y_2)$.

$$\boxed{y_2 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + y_0}$$

2. 2. 2 Anwendung im vorliegenden Thema

Die LI allein ist noch nicht die Grundidee eines I- Filters. Mit der Ermittlung von y_2 gibt es noch keine nutzbare Funktion, wenn man diesen Vorgang auf ein Signal bezieht. Es bleibt auch dann die Frage, wie die Festlegung $\Delta x=1$ eingehalten werden kann.

Die Grundidee eines Interpolationsfilters besteht daher darin, dass man das ermittelte y_2 zurückzuweist einem Stützpunkt, entweder zu y_0 oder y_1. Im Endeffekt können so vier verschiedene Möglichkeiten ermittelt werden.

BZ © 2002		Interpolationsfilter nach der Rückführung	
		vorwärts	rückwärts
Interpolationsfilter nach der Symetrie	symetrisch	Typ:"SVI"	Typ:"SRI"
	unsymetrisch	Typ: "UVI"	Typ: "URI"

Tab. 1: Typen von Interpolationsfiltern

Im weiteren Verlauf wird nun jeder Typ im einzelnen (Vorgehen) beschrieben. Zuvor muss jedoch auf eine Änderung der Bezeichnung der Stützstellen hingewiesen werden. Während im Abbild 6 die Stützpunkt auf der x- Achse mathematisch exakt mit indizierten x_n bezeichnet wurden, gibt es im Folgendem eine Bezeichnung mit indiziertem y_n , welche mit Pfeilen auf dem bezeichneten Stützpunkt parallel zur y- Achse zeigen. Nicht der x- Wert an sich, sondern der y- Wert ist im weiteren Verlauf von Interesse. Mit der Festlegung, dass Δx konstant ist und im Besonderen 1 bei einem Signal, ist nicht die Stellung an sich wichtig, sondern die y- Werte der Nachbarstützstellen an den Orten x_{n-1} und x_{n+1} , so also die Werte von y_{n-1} und y_{n+1}.

2. 2. 2. 1 Der Rückführungstyp „Unsymmetrisch Vorwärts Interpoliert“

Dieser Typ ist der einfachste und wird zuerst beschrieben. Drei Stützpunkte sollen gegeben sein: y_0 , y_1 und y_2. Letzterer wird nicht gebraucht, da lediglich eine Interpolation erfolgt. Die Hilfsgerade h(x) wird berechnet und dann der Interpolationswert ermittelt, dessen Stellung auf der x- Achse zufällig gewählt wurde (bei $y_0 + 0{,}5(y_1 - y_0)$). Das Ergebnis wird nun rückgeführt und zwar in Richtung aufsteigender Indizes von y. Daher die Bezeichnung: „Vorwärts“ Die Werte in der folgenden Abbildung sind zufällig gewählt und sollen den Vorgang veranschaulichen. Der neue Wert, dem y_1 nun zugewiesen wird, besitzt nun die Bezeichnung $`y_1$.

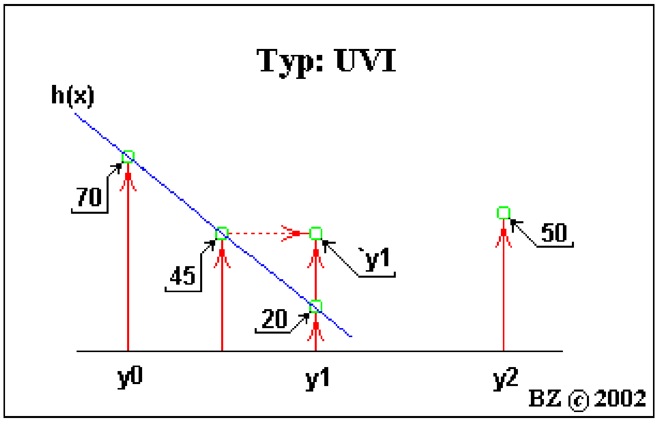

Abb. 7: Beispiel einer rückgeführten Interpolation vom Typ: „UVI“

2. 2. 2. 2 Der Rückführungstyp „Unsymmetrisch Rückwärts Interpoliert“

Der gleiche Vorgang, wie im letzten Abschnitt, jedoch wird zwischen den Stützpunkten y_1 und y_2 die Hilfsgerade i(x) gebildet und wiederum in der Mitte, jetzt von y_1 und y_2 , interpoliert. Die Rückführung erfolgt jetzt entgegen der Zählrichtung der Indizes. Die Bezeichnung: „Rückwärts“ weist darauf hin.

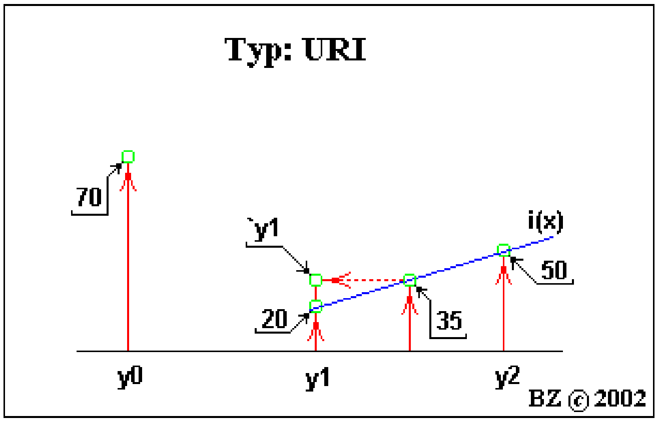

Abb. 8: Beispiel einer rückgeführten Interpolation vom Typ: „URI“

2. 2. 2. 3 Der Rückführungstyp „Symmetrisch Vorwärts Interpoliert“

Dieser Typ ist in der ersten Phase identisch mit UVI. Daher auch die Bezeichnung Vorwärts. Das Ergebnis ist $`y_1$. Anschließend wird eine Interpolation angeschlossen, welche mit URI vergleichbar ist. Zu beachten ist jedoch, dass die Hilfsgerade i(x) nicht mit $y_1$ sondern mit $`y_1$ und y_2 gebildet wird. Das Ergebnis wird rückgeführt und als $``y_1$ bezeichnet, als Zeichen dafür, dass zweimal interpoliert wurde. „Symmetrisch“ bezeichnet, dass die Lagen der Interpolationsstellen symmetrisch zu der dazwischen liegenden Stützstelle, hier y_1 , liegen

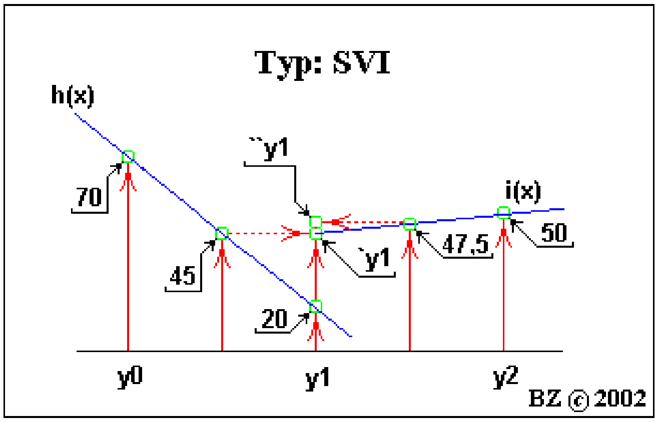

Abb. 9: Beispiel einer rückgeführten Interpolation vom Typ: „SVI“

2. 2. 2. 4 Der Rückführungstyp „Symmetrisch Rückwärts Interpoliert“

Als letztes wird der Typ SRI behandelt. Erst wird y_1 und y_2 interpoliert, rückwärts zurückgeführt und dann interpoliert zwischen $`y_1$ und y_0. Nach Rückführung vorwärts steht $``y_1$ letztendlich zur Verfügung.

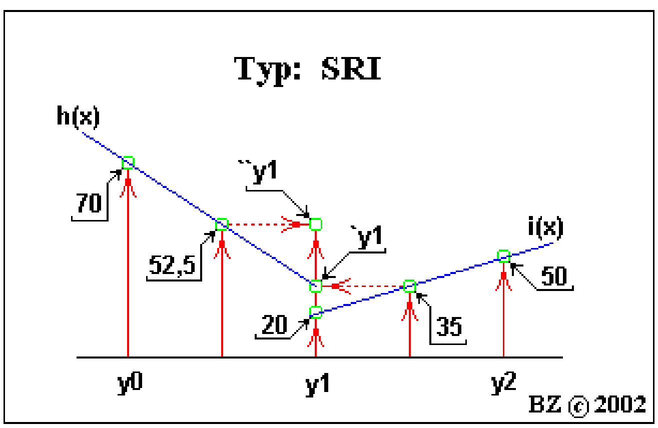

Abb. 10: Beispiel einer rückgeführten Interpolation vom Typ: „SRI“

Zu beachten ist, dass $``y_{1;SRI}$ nicht zwangsläufig gleich $``y_{1;SVI}$ sein muss.

2. 2. 3 Die allgemeine Interpolationsgleichung

Auf Grundlage der Abschnitte 2. 2. 1 und 2. 2. 2. 1 bis 4 kann nun eine allgemeine Interpolationsgleichung gebildet werden. Diese ist von allen vier Rückführungstypen unabhängig und betrachtet die Stelle „n-1“, „n“, „n+1“. Sie ist so voll über die Länge der Funktion, des Signals anwendbar.

Beginnend mit der Stelle „n=1“ kann folgendermaßen interpoliert und anschließend rückgeführt werden (zuerst ohne Vereinfachung):

$$\boxed{\grave{y}_1 = \frac{y_1 - \grave{y}_0}{x_0 - 1\Delta x - x_0 - 0\Delta x}\left(x_{i;1} - x_0 - 0\Delta x\right) + \grave{y}_0}$$

$$\boxed{\grave{y}_2 = \frac{y_2 - \grave{y}_1}{x_0 - 2\Delta x - x_0 - 1\Delta x}\left(x_{i;2} - x_0 - 1\Delta x\right) + \grave{y}_1}$$

$$\boxed{\grave{y}_3 = \frac{y_3 - \grave{y}_2}{x_0 - 3\Delta x - x_0 - 2\Delta x}\left(x_{i;3} - x_0 - 2\Delta x\right) + \grave{y}_2}$$

$$\boxed{\grave{y}_4 = \frac{\ldots}{\ldots}(\ldots) + \ldots}$$

Nach Vereinfachung ergibt sich dann folgendes Bild:

$$\boxed{\grave{y}_1 = \frac{y_1 - \grave{y}_0}{1\Delta x}\left(x_{i;1} - x_0 - 0\Delta x\right) + \grave{y}_0}$$

$$\boxed{\grave{y}_2 = \frac{y_2 - \grave{y}_1}{1\Delta x}\left(x_{i;2} - x_0 - 1\Delta x\right) + \grave{y}_1}$$

$$\boxed{\grave{y}_3 = \frac{y_3 - \grave{y}_2}{1\Delta x}\left(x_{i;3} - x_0 - 2\Delta x\right) + \grave{y}_2}$$

$$\boxed{\grave{y}_4 = \frac{\ldots}{\ldots}(\ldots) + \ldots}$$

In den letzten Berechnungsgrundlagen tritt der Wert $x_{i;n}$ auf. Er bezeichnet die Stelle zwischen y_{n-1} und y_n an der die Interpolation durchgeführt werden soll. Wenn die Interpolation voranschreitet, d. h von y_n auf y_{n+1} inkrementiert wird, dann muss auch $x_{i,n}$ zu $x_{i;n+1}$ werden. Daher ist die Berechnungsgrundlage folgende:

$$\boxed{x_{i;n} = x_0 + n\Delta x + x_i\Delta x}$$

$$\boxed{x_{i;n} = x_0 + (n + x_i)\Delta x}$$

Das jetzt auftretende x_i ist nun nicht mehr beweglich, sondern stellt eine Konstante dar. Es steuert aktiv die Interpolation (und daher auch später die Arbeitsmodi eines zukünftigen Interpolationsfilter) und liegt im Intervall:<-1;1> i.e.S:<-Δx;Δx>. Eine ausführliche Beschreibung der Interpolationskonstante x_i folgt dezentral in den nächsten Abschnitten.

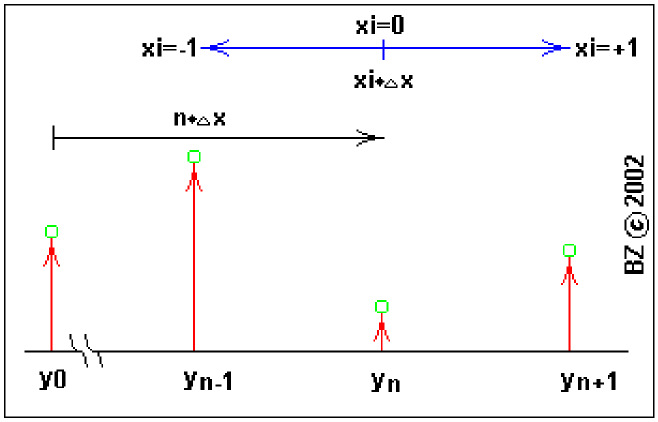

Abb. 11: Veranschaulichung der Interpolisationskonstante x_i.

Für den Fall $`y_n$ können wir nun eine allgemeine Berechnungsgrundlage erstellen. Diese sieht folgendermaßen aus:

$$\boxed{`y_n = \frac{y_n - `y_{n-1}}{\Delta x}\left(x_{i;n} - x_0 - [n-1]\Delta x\right) + `y_{n-1}}$$

Bevor $x_{i;n}$ substituiert wird, werden Vereinfachung definiert. So wird festgelegt, dass der Startwert einer Funktion oder eines betrachteten Signals immer $x_0=0$ sein soll. Das ist zwar ein Bruch mit dem Prinzip der Allgemeingültigkeit hin zum Spezialfall, jedoch für den späteren Bau eines I- Filters nicht relevant. Außerdem wird im gleichen Zuge festgelegt, dass Δx=1 ist. Im Abschnitt 2. 1 wurde dies schon global erläutert. Damit kann die „Allgemeine Interpolationsgleichung“ erstellt werden.

$$\boxed{`y_n = \left(y_n - `y_{n-1}\right)\left(x_{i;n} - x_0 - [n-1]\right) + `y_{n-1}}$$

$$\boxed{`y_n = \left(y_n - `y_{n-1}\right)\left(x_0 + [n + x_i]\Delta x - x_0 - [n-1]\right) + `y_{n-1}}$$

Diese lautet also endgültig:

$$\boxed{`y_n = \left(y_n - `y_{n-1}\right)\left(1 + x_i\right) + `y_{n-1}}$$

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass der Fall `yn mit n=0 nicht berechenbar ist, da der gebrauchte Wert `yn-1 nicht existiert, daher wird definiert:

$$\boxed{\grave{y}_0 \overset{!}{=} y_0}$$

Damit sind weitere Betrachtungen zur Wirkungsweise eines Interpolationsfilters gegeben. Vorher muss jedoch die allgemeine Interpolationsgleichung zugeschnitten werden auf die aufgezählten Typen von I- Filtern.

2. 2. 4 Die typgebundenen Interpolationsgleichungen

2. 2. 4. 1 Typ „UVI“

Die Entwicklung der typgebundenen Interpolationsgleichungen ist aus der allgemeinen durch Manipulation von „n“ und „x_i“ entwickelbar. Jedoch muss für den Fall „UVI“ nichts verändert werden, da bei der Entwicklung der allgemeinen Berechnungsgrundlage dieser Fall als gegeben angenommen wurde. So lautet die Interpolationsgleichung „UVI“ endgültig:

$$\boxed{{}_{UVI}\grave{y}_n = \left(y_n - \grave{y}_{n-1}\right)\left(1 + x_i\right) + \grave{y}_{n-1}}$$

2. 2. 4. 2 Typ „URI“

War der Fall „UVI“ links von y_n mathematisch wirksam, so ist für den Fall „URI“ der Rückführungsort rechts von y_n angesiedelt. Das bedeutet, für die Entwicklung der typgebundenen Interpolationsgleichung ist n um eins zu erhöhen und x_i ebenfalls um eins nach rechts Richtung steigender n zu verschieben, d. h. es muss gelten:

$$\boxed{\left(1 + x_{i;UVI}\right) + \left(x_{i;URI}\right) = 1 \Rightarrow x_{i;URI} = -x_{i;UVI}}$$

Daher ergibt sich für den Fall „URI“:

$$\boxed{{}_{URI}\grave{y}_n = \left(y_{n+1} - y_n\right)\left(-x_i\right) + y_n}$$

2. 2. 4. 3 Typ „SVI“

An sich lediglich das Durchführen der Interpolation in zwei Schritten, erst die des Typs „UVI“ und dann die des Typs „URI“. Zu beachten ist jedoch, dass einige y Werte schon zweifach interpoliert vorliegen. Daher ist die Berechnungsgrundlage leicht modifiziert:

$$\boxed{{}_{UVI}\grave{y}_n = \left(y_n - \grave{\grave{y}}_{n-1}\right)\left(1 + x_i\right) + \grave{\grave{y}}_{n-1}}$$

$$\boxed{{}_{URI}\grave{\grave{y}}_n = \left(y_{n+1} - {}_{UVI}\grave{y}_n\right)\left(-x_i\right) + {}_{UVI}\grave{y}_n}$$

Das Einsetzen des Schrittes zwei ergibt dann als Summenformel die typgebundene Interpolationsgleichung „SVI“:

$$\boxed{{}_{SVI}\grave{\grave{y}}_n = \left(y_n - \grave{\grave{y}}_{n-1}\right)x_i^{\,2} + \left(2y_n - \grave{\grave{y}}_{n-1} - y_{n+1}\right)x_i + y_n}$$

2. 2. 4. 4 Typ „SRI“

Die beiden Interpolationsschritte sind vertauscht und modifiziert. Es ergibt sich somit:

$$\boxed{{}_{URI}\grave{y}_n = \left(y_{n+1} - y_n\right)\left(-x_i\right) + y_n}$$

$$\boxed{{}_{UVI}\grave{\grave{y}}_n = \left({}_{URI}\grave{y}_n - \grave{\grave{y}}_{n-1}\right)\left(1 + x_i\right) + \grave{\grave{y}}_{n-1}}$$

Sowie die Summenformel:

$$\boxed{{}_{SRI}\grave{\grave{y}}_n = \left(y_n - y_{n+1}\right)x_i^{\,2} + \left(2y_n - \grave{\grave{y}}_{n-1} - y_{n+1}\right)x_i + y_n}$$

2. 2. 5 Sonderfälle

Betrachtet werden die Fälle, wo Interpolationsfilter unterschiedlichen Typs die gleiche Wirkung besitzen und die Fälle für $x_i = -1$; 0 ; -1.

2. 2. 5. 1 für die Interpolationskonstante

Eingesetzt werden für die Interpolationskonstante die Intervallextremwerte sowie der „Mittelpunkt“, der Wert 0.

- $x_i = -1$

$$\boxed{{}_{UVI}\grave{y}_n = \grave{y}_{n-1}} \qquad \boxed{{}_{URI}\grave{y}_n = y_{n+1}}$$

$$\boxed{{}_{SVI}\grave{\grave{y}}_n = y_{n+1}} \qquad \boxed{{}_{SRI}\grave{\grave{y}}_n = \grave{\grave{y}}_{n-1}}$$

- $x_i = 0$

$$\boxed{{}_{UVI}\grave{y}_n = y_n} \qquad \boxed{{}_{URI}\grave{y}_n = y_n}$$

$$\boxed{{}_{SVI}\grave{\grave{y}}_n = y_n} \qquad \boxed{{}_{SRI}\grave{\grave{y}}_n = y_n}$$

- $x_i = +1$

$$\boxed{{}_{UVI}\grave{y}_n = 2y_n - \grave{y}_{n-1}} \quad \boxed{{}_{URI}\grave{y}_n = 2y_n - y_{n+1}}$$

$$\boxed{{}_{SVI}\grave{\grave{y}}_n = 4y_n - 2\grave{\grave{y}}_{n-1} - y_{n+1}} \quad \boxed{{}_{SRI}\grave{\grave{y}}_n = 4y_n - 2y_{n+1} - \grave{\grave{y}}_{n-1}}$$

Zu beachten ist der Sonderfall $x_i = 0$. Der interpolierte Wert ist in allen Typen gleich dem Ausgangswert von y_n. Das war auch zu erwarten, denn beachtet man Abb. 11, befindet sich die Stelle x_i für den Fall 0 genau über y_n. Für ein Interpolationsfilter würde diese Einstellung „Filter aus!“ heißen. Eine zweite Besonderheit ist desweiteren beim Fall x_i = -1 zu beobachtet. Hier besitzen der Fall „SVI“ und „URI“ die gleiche Filterwirkung. Betrachtet man diese genauer, dann erkennt man, dass diese begrenzt ist auf das Verschieben des Vorgängerwertes y_{n+1} auf die Stelle y_n. Das bedeutet lediglich das Einbringen eines dekrementierenden Offsets für n, letztendlich würde nach n Durchläufen des Signals durch ein I- Filter das gesamte Signal nur noch den Wert von $y_{n;max}$ annehmen. Die Bezeichnung „Offset -1“ tritt später für diesen Fall bei einem I- Filter auf. Für die Typen „UVI“ und „SRI“ gilt fast das gleiche. Jedoch nimmt y_n hier den Wert $\grave{y}_{n-1}$ bzw. $\grave{\grave{y}}_{n-1}$ an und das ist $y_o \Rightarrow \grave{y}_o$; $\grave{\grave{y}}_o$! Jedoch braucht es diesmal nur eines Filterdurchlaufes für den Endfall $\grave{y}_n$; $\grave{\grave{y}}_n = y_{n;max}$. Die Bezeichnung „Offset +1“ steht für diese Wirkung eines I- Filters. Für den Sonderfall x_i = +1 gibt es keine einfachen Wirkungen. Diese werden später beschrieben.

2. 2. 5. 2 für die Filtertypen

Untersucht werden die Fälle, wo die Filtertypen gleiche Wirkungen untereinander für gleiche x_i hervorbringen. Betrachtet man die typgebundenen Interpolationsgleichungen, dann ist erkennbar, dass es hierfür zwei Lösungen geben muss (Fundamentalsatz der Algebra – Polynom 2. Ordnung = 2 Lösungen). Ausnahme ist der Fall „UVI“ = „URI“. Hier kann es nur eine geben. Ähnlich der reellen und virtuellen Lösung, gibt es bei diesen Untersuchungen einen lokalen und einen globalen Lösungsort.

- Globaler Lösungsort

Die vergleichbare Wirkung unterschiedlicher Filtertypen bezieht sich auf das gesamte Signal. Soll heißen, unterschiedliche Typen – gleiches x_i – gleiche Wirkung.

- Lokaler Lösungsort

Die vergleichbare Wirkung unterschiedlicher Filtertypen bezieht sich auf ein Stellentriplet y_{n-1} ; y_n ; y_{n+1} und auch nur dann, wenn dieses Triplet mit einer

Berechnungsvorschrift gleich dem gegebenen x_i ist. Das Signal über die gesamte Länge n außerhalb des Triplets wird jedoch unterschiedlich verarbeitet.

In der folgenden Tabelle sind alle Lösungen aufgelistet. Aufgrund des fehlenden Platzes innerhalb der Zellen bedeuten:

$$\boxed{A = -\frac{y_n + \grave{y}_{n-1} - \grave{\grave{y}}_{n-1} - y_{n+1}}{y_n - \grave{\grave{y}}_{n-1}}}$$

$$\boxed{B = -\frac{y_n + \grave{y}_{n-1} - \grave{\grave{y}}_{n-1} - y_{n+1}}{y_n - y_{n+1}}}$$

$$\boxed{C = -\frac{y_n - \grave{\grave{y}}_{n-1}}{y_n - y_{n+1}}}$$

BZ 2002		© Lokaler Lösungsort			
		UVI	URI	SVI	SRI
Globaler Lösungsort	UVI		–	A	B
	URI	0		–	C
	SVI	0	0 ; -1		–
	SRI	0	0	0 ; 0	

Tab. 2: Globale und lokale Lösungsorte der vier Filtertypen

Damit sind alle primären Voraussetzungen geschaffen, um ein Interpolationsfilter zu bauen. In den nächsten Abschnitten werden jedoch Berechnungsgrundlagen geschaffen, um die Wirkungsweise besser zu verstehen und zu beherrschen.

$\int$