Das Interpolationsfilter, eine Idee aus früheren Tagen
Sekundäre Berechnungsgrundlagen

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 13. November 1995 / 15. September 1997
Letzte Revision: 2. April 2021

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Die sekundären Berechnungsgrundlagen

1.1 Vorbereitende Betrachtungen

Sieht man die Berechnungsgrundlagen der vorangegangenen Abschnitte, so ist zu beobachten, dass der Grund für die spezifischen Wirkungen eines Interpolationsfilters hauptsächlich der ist, dass in der Berechnungsvorschrift für $\grave{y}_n$ oder $\grave{\grave{y}}_n$ der vorhergehende, ein Schritt früher interpolierte Wert $\grave{y}_{n-1}$ mit einbezogen wird. [001]

sek. Int.gleichungen

$$_{UVI}\grave{y}_n = (y_n - \grave{y}_{n-1}) \cdot (1 + x_i) + \grave{y}_{n-1}$$

Diese Gleichung betrachtet den gerade betrachteten Punkt, der mit dem aktuellen Wert von n bezeichnet wird. Die Stelle $n - 1$ wird als bekannt vorausgesetzt. Ist er nicht bekannt, dann muss auch dieser berechnet werden mit Hilfe von $n - 2$. Ist auch dieser nicht bekannt, dann ... usw. usf. Letztendlich setzt sich diese Reihe fort, bis zu dem Punkt, wo $\grave{y}_0$ vorliegt. Eine Aufreihung dieser Kette würde in den Anfängen folgendermaßen aussehen (jetzt aber besser für die allgemeine Interpolationsgleichung:

$$\begin{aligned}
\grave{y}_n &= (y_n - \grave{y}_{n-1}) \cdot (1 + x_i) + \grave{y}_{n-1} \\
\grave{y}_{n-1} &= (y_{n-1} - \grave{y}_{n-2}) \cdot (1 + x_i) + \grave{y}_{n-2} \\
\grave{y}_{n-2} &= (y_{n-2} - \grave{y}_{n-3}) \cdot (1 + x_i) + \grave{y}_{n-3} \\
\grave{y}_{n-3} &= (y_{n-3} - \grave{y}_{n-4}) \cdot (1 + x_i) + \grave{y}_{n-4} \\
\grave{y}_{n-4} &= (y_{n-4} - \grave{y}_{n-5}) \cdot (1 + x_i) + \grave{y}_{n-5} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

usw. usf.

Der Versuch liegt nahe, die Gleichungen gegenseitig einzusetzen. Jedoch ist dies in dieser Form nicht zweckmäßig, da im rechten Term $\grave{y}_{n-1}$ doppelt vorkommt. Umgestellt ergibt sich dann die Berechnungsgrundlage folgendermaßen:

$$\grave{y}_n = (1 + x_i) \cdot y_n + (-x_i) \cdot \grave{y}_{n-1}$$

Jetzt steht einem gegenseitigen Einsetzen nichts mehr im Wege. Am Ende dieses Iterationsvorganges liegt die sekundäre, allgemeine Interpolationsgleichung vor:

$$\grave{y}_n = y_n + \sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a} \cdot \xi^{1+n-a} \cdot (y_a - y_{a-1})$$

Die Symbolik hat sich mit dieser Berechnungsgrundlage leicht geändert. So wurde die Interpolationskonstante x_i geändert in den äquivalenten griechischen Buchstaben ξ (xi). Der Grund ist lediglich die, der Unterscheidungsmöglichkeit zu den primären Gleichungen.

Angepasst an die Filtertypen ergibt sich dann folgendes Aussehen der allgemeinen Interpolationsgleichung:

$$\grave{y}_n = (1 + x_i) \cdot y_n + (-x_i) \cdot \grave{y}_{n-1}$$

$\Rightarrow$

$$\grave{y}_n = y_n + \sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a} \cdot \xi^{1+n-a} \cdot (y_a - \grave{y}_{a-1})$$

1.2 Die sekundären, typgebundenen Interpolationsgleichungen

Durch einfaches Einsetzen (wenn nötig) in die Berechnungsgrundlagen vorangegangenen Abschnitte ergeben sich diese Interpolationsgleichungen. Sie sollen deshalb hier kurz entwickelt werden.

1.3 Die Grundgleichungen

1.3.1 Typ „UVI“

$$ {}_{UVI}\grave{y}_n = y_n + \sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a} \cdot \xi^{1+n-a} \cdot (y_a - \grave{y}_{a-1}) $$

1.3.2 Typ „URI“

$$_{URI}\grave{y}_n = (1+\xi)\cdot y_n + (-\xi)\cdot y_{n+1}$$

1.3.3 Typ „SVI“

$$ {}_{SVI}\grave{\grave{y}}_n = (1+\xi)\cdot {}_{UVI}\grave{y}_n + (-\xi)\cdot y_{n+1} $$

$\Rightarrow$

$$ {}_{SVI}\grave{\grave{y}}_n = (1+\xi)\cdot y_n + (1+\xi)\cdot \sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a}\cdot \xi^{1+n-a}\cdot (y_a - \grave{y}_{a-1}) + (-\xi)\cdot y_{n+1} $$

1.3.4 Typ „SRI“

$${}_{SRI}\grave{\grave{y}}_n = (1+\xi) \cdot {}_{URI}\grave{y}_n + (-\xi) \cdot {}_{SRI}\grave{\grave{y}}_{n-1}$$

$\Rightarrow$

$${}_{SRI}\grave{\grave{y}}_n = {}_{URI}\grave{y}_n + \sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a} \cdot \xi^{1+n-a} \cdot (y_a - \grave{\grave{y}}_{a-1})$$

$\Rightarrow$

$${}_{SRI}\grave{\grave{y}}_n = (1+\xi) \cdot y_n + \sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a} \cdot \xi^{1+n-a} \cdot (y_a - \grave{\grave{y}}_{a-1}) + 2 \cdot (-\xi) \cdot y_{n+1}$$

LaTeX 2_ε