3. Sekundäre Berechnungsgrundlagen

3. 1 Vorbereitende Betrachtungen

Sieht man die Berechnungsgrundlagen der Abschnitte 2. 2. 4. 1 bis 4, so ist zu beobachten, dass der Grund für die spezifischen Wirkungen eines Interpolationsfilters hauptsächlich der ist, dass in der Berechnungsvorschrift für $\grave{y}_n$ oder $\grave{\grave{y}}_n$ der vorhergehende, ein Schritt früher interpolierte Wert $\grave{y}_{n-1}$ mit einbezogen wird.

$$\boxed{{}_{UVI}\grave{y}_n = (y_n - \grave{y}_{n-1})(1 + x_i) + \grave{y}_{n-1}}$$

Diese Gleichung betrachtet den gerade betrachteten Punkt, der mit dem aktuellen Wert von n bezeichnet wird. Die Stelle n-1 wird als bekannt vorausgesetzt. Ist er nicht bekannt, dann muss auch dieser berechnet werden mit Hilfe von n-2. Ist auch dieser nicht bekannt, dann ... usw. usf. Letztendlich setzt sich diese Reihe fort, bis zu dem Punkt, wo $\grave{y}_0$ vorliegt. Eine Aufreihung dieser Kette würde in den Anfangen folgendermaßen aussehen (jetzt aber besser für die allgemeine Interpolationsgleichung aus Abschnitt 2. 2. 3):

$$\boxed{\grave{y}_n = (y_n - \grave{y}_{n-1})(1 + x_i) + \grave{y}_{n-1}}$$

$$\boxed{\grave{y}_{n-1} = (y_{n-1} - \grave{y}_{n-2})(1 + x_i) + \grave{y}_{n-2}}$$

$$\boxed{\grave{y}_{n-2} = (y_{n-2} - \grave{y}_{n-3})(1 + x_i) + \grave{y}_{n-3}}$$

$$\boxed{\grave{y}_{n-3} = (y_{n-3} - \grave{y}_{n-4})(1 + x_i) + \grave{y}_{n-4}}$$

$$\boxed{\grave{y}_{n-4} = (y_{n-4} - \grave{y}_{n-5})(1 + x_i) + \grave{y}_{n-5}}$$

•
•
•

Der Versuch liegt nahe, die Gleichungen gegenseitig einzusetzen. Jedoch ist dies in dieser Form nicht zweckmäßig, da im rechten Term $\grave{y}_{n-1}$ doppelt vorkommt. Umgestellt ergibt sich dann die Berechnungsgrundlage so:

$$\boxed{\grave{y}_n = (1 + x_i) y_n + (-x_i)\grave{y}_{n-1}}$$

Jetzt steht einem gegenseitigen Einsetzen nichts mehr im Wege. Am Ende dieses Iterationsvorganges liegt die sekundäre, allgemeine Interpolationsgleichung vor:

$$\boxed{{}^{`}y_n = y_n + \left(\sum_{a=1}^{n}(-1)^{n-a}\xi^{1+n-a}(y_a - y_{a-1})\right)}$$

Die Symbolik hat sich mit dieser Berechnungsgrundlage leicht geändert. So wurde die Interpolationskonstante x_i geändert in den äquivalenten griechischen Buchstaben ξ (xi). Der Grund ist lediglich die, der Unterscheidungsmöglichkeit zu den primären Gleichungen.

Angepasst an die Filtertypen ergibt sich dann folgendes Aussehen der allgemeinen Interpolationsgleichung:

$$\boxed{{}^{`}y_n = (1 + x_i)y_n + (-x_i)\,{}^{`}y_{n-1}}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{{}^{`}y_n = y_n + \left(\sum_{a=1}^{n}(-1)^{n-a}\xi^{1+n-a}(y_a - {}^{`}y_{a-1})\right)}$$

3. 2 Die sekundären, typgebundenen Interpolationsgleichungen

Durch einfaches Einsetzen (wenn nötig) in die Berechnungsgrundlagen der Abschnitte 2. 2. 4. 1 bis 4 ergeben sich diese Interpolationsgleichungen. Sie sollen deshalb hier kurz entwickelt werden.

3. 2. 1 Die Grundgleichungen

3. 2. 1. 1 Typ „UVI“

$$\boxed{{}_{UVI}{}^{`}y_n = y_n + \left(\sum_{a=1}^{n}(-1)^{n-a}\xi^{1+n-a}(y_a - {}^{`}y_{a-1})\right)}$$

3. 2. 1. 2 Typ „URI“

$$\boxed{{}_{URI}{}^{`}y_n = (1 + \xi)y_n + (-\xi)y_{n+1}}$$

3. 2. 1. 3 Typ „SVI“

$$\boxed{{}_{SVI}{}^{``}y_n = (1 + \xi)\,{}_{UVI}{}^{`}y_n + (-\xi)y_{n+1}}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{{}_{SVI}{}^{``}y_n = (1 + \xi)y_n + (1 + \xi)\left(\sum_{a=1}^{n}(-1)^{n-a}\xi^{1+n-a}(y_a - {}^{`}y_{a-1})\right) + (-\xi)y_{n+1}}$$

3. 2. 1. 4 Typ „SRI“

$$\boxed{{}_{SRI}\grave{\grave{y}}_n = (1+\xi)\,{}_{URI}\grave{y}_n + (-\xi)\,{}_{SRI}\grave{\grave{y}}_{n-1}}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{{}_{SRI}\grave{\grave{y}}_n = {}_{URI}\grave{y}_n + \left(\sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a}\,\xi^{1+n-a}\,(y_a - \grave{\grave{y}}_{a-1})\right)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{{}_{SRI}\grave{\grave{y}}_n = (1+\xi)y_n + \left(\sum_{a=1}^{n} (-1)^{n-a}\,\xi^{1+n-a}\,(y_a - \grave{\grave{y}}_{a-1})\right) + 2(-\xi)y_{n+1}}$$