3. 2. 2 Die Abklinggleichungen

Die Frage in diesem Abschnitt lautet: „Wie pflanzt sich eine Stützstelle in Richtung steigender n fort? Was übergibt ein n seinem n+1 ; n+2 ; n+3 ; ... ; n+a in welchem Verhältnis Anteile des Originalwertes y_n weiter?“ Diese Frage kann einfach mit Hilfe der typgebundenen Interpolationsgleichungen beantwortet werden. Man legt einfach fest:

$$\boxed{\begin{aligned} y_0 &\neq 0 \\ y_{0+a} &= 0 \end{aligned}}$$

Der Wert von y_n ist nun bestimmbar für `y_n und für die folgenden Stützstellen n+a nach erfolgter Iteration. Die typgebundenen Interpolationsgleichungen reduzieren sich dann auf folgendes Aussehen.

3. 2. 2. 1 Typ „UVI“

$$\boxed{{}_{UVI}\grave{y}_n = \left(-\grave{y}_{n-1}\right)\left(1+x_i\right)+\grave{y}_{n-1}}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{{}_{UVI}\grave{y}_n = \grave{y}_{n-1}\left(-\xi\right)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{{}_{UVI}\grave{y}_{n+a} = \left(-\xi\right)^a y_n}$$

Gleichzeitig soll in diesem Abschnitt die Rolle von ξ und dessen Limitierungen untersucht werden. Dadurch wird ersichtlich, warum die Bezeichnung der Interpolationskonstante x_i zu ξ beim Übergang der primären zu den sekundären Gleichungen erfolgte.

Die Grenzwerte sind einfach durch folgenden Ansatz zu berechnen:

$$\boxed{\frac{{}_{UVI}\grave{y}_{n+a}}{y_n} \leq 1 = \left(-\xi\right)^2}$$

Die Ergebnisse der Auflösung der quadratischen Gleichung decken sich vollkommen mit denen der Definition von x_i.

$$\boxed{\begin{aligned} x_{i;1} &= \xi_1 = +1 \\ x_{i;2} &= \xi_2 = -1 \end{aligned}}$$

⇒

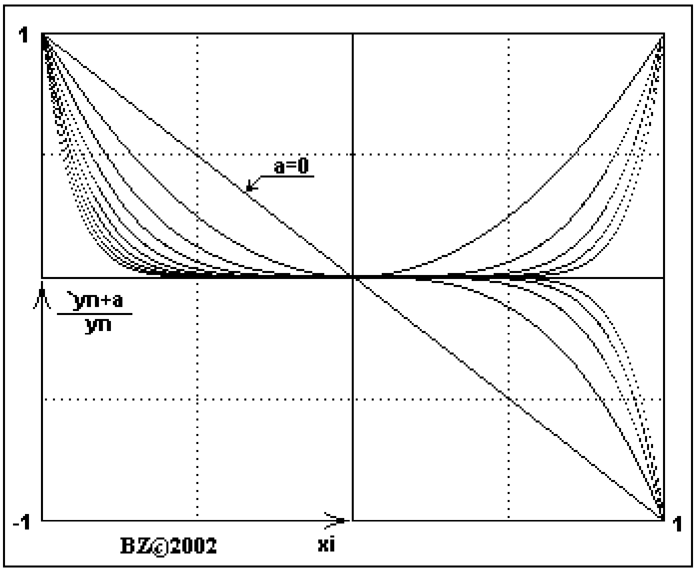

Abb. 13: Qualitative Darstellung des Einflusses von ξ auf das Verhältnis $`y_{n+a}/y_n$.

3. 2. 2. 2 Typ „URI“

Der Typ „URI“ nimmt eine Sonderstellung unter den vier Typen ein. Dieser ist rein rückwärts interpoliert, d. h., es gibt keine Weitergabe von Werten an den Nachfolger. Deshalb verkürzen sich die Berechnungsgrundlagen stark. Eine Abklinggleichung wie bei den drei anderen Typen ist nicht ermittelbar.

$$\boxed{{}_{URI}\grave{y}_n = (y_{n+1} - y_n)(-x_i) + y_n}$$

⇒

$$\boxed{{}_{URI}\grave{y}_n = (1+\xi)y_n}$$

Für die Interpolationskonstante gibt es keine Abweichung von deren Definition. Zu beachten ist auch das Verhältnis $`y_n$ zu y_n (siehe Abb. 13).

$$\boxed{\begin{aligned} x_{i;1} &= \xi_1 = +1 \\ x_{i;2} &= \xi_2 = -1 \end{aligned}}$$

⇒

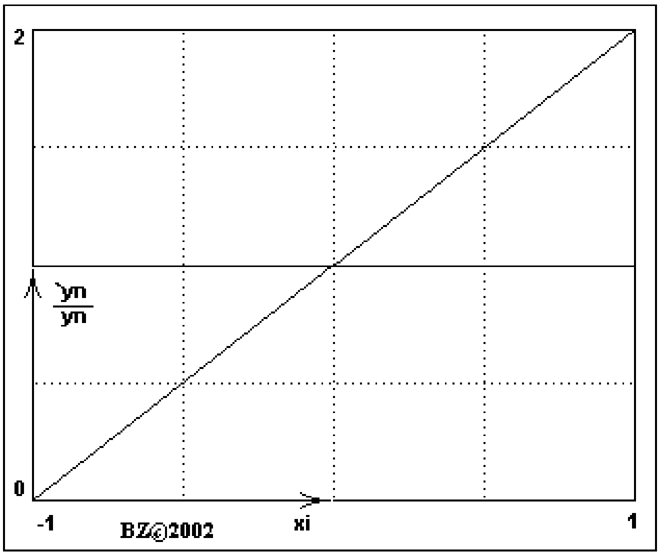

Abb. 14: Qualitative Darstellung des Einflusses von ξ auf das Verhältnis $`y_n/y_n$.

3. 2. 2. 3 Typ „SVI“

$$\boxed{{}_{SVI}^{``}y_n = \left(y_n - {}^{``}y_{n-1}\right)x_i^{\,2} + \left(2y_n - {}^{``}y_{n-1} - y_{n+1}\right)x_i + y_n}$$

⇒

$$\boxed{{}_{SVI}^{``}y_n = \left(-{}^{``}y_{n-1}\right)\xi^2 + \left(-{}^{``}y_{n-1}\right)\xi}$$

⇒

$$\boxed{{}_{SVI}^{``}y_{n+a} = \left(-\xi\right)^a \left(1+\xi\right)^a y_n}$$

⇒

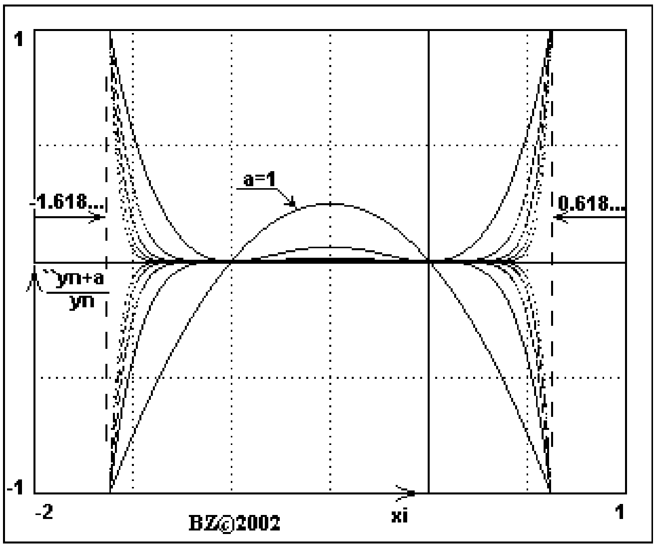

Abb. 15: Qualitative Darstellung des Einflusses von ξ auf das Verhältnis $``y_{n+a}/y_n$.

Vor dem Ermitteln markanter Grenzwerte des Verhältnisses $``y_{n+a}$ zu y_n wurde das Abbild 15 eingefügt. Zu erkennen ist, dass sich x_i und ξ nicht mehr kompatibel zueinander verhalten. Konsequenzen hat diese Eigenschaft lediglich beim späteren Bau eines Interpolationsfilters. Zum Beispiel, dem Befehl „Signal löschen!“ können zwei ξ- Werte zugeordnet werden.

Für die neuen Intervallgrenzen von ξ gilt folgender Ansatz:

$$\frac{{}_{SVI}\grave{\grave{y}}_{n+a}}{y_n} \leq -1 = (-\xi)^1 (1+\xi)^1$$

Der Wert (-1) kann aus der Abbildung 15 für a=1 begründet werden. Das Ergebnis der Auflösung hat das Bild:

$$\begin{aligned} x_{i;1} &\neq \xi_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx +0{,}618... \\ x_{i;2} &\neq \xi_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx -1{,}618... \end{aligned}$$

Für den Befehl „Signal löschen!“ wird ein anderer Ansatz genommen:

$$\frac{{}_{SVI}\grave{\grave{y}}_{n+a}}{y_n} = 0 = (-\xi)^1 (1+\xi)^1$$

⇒

$$\begin{aligned} x_{i;1} &\neq \xi_1 = 0 \\ x_{i;2} &\neq \xi_2 = -1 \end{aligned}$$

Die beiden Ergebnisse gelten für alle Werte unabhängig von a.

3. 2. 2. 4 Typ „SRI“

$${}_{SRI}\grave{\grave{y}}_n = (y_n - y_{n+1})x_i^{\ 2} + (2y_n - \grave{\grave{y}}_{n-1} - y_{n+1})x_i + y_n$$

⇒

$${}_{SRI}\grave{\grave{y}}_n = \grave{\grave{y}}_{n-1}\xi$$

⇒

$${}_{SRI}\grave{\grave{y}}_{n+a} = (-\xi)^a y_n$$

Diese Berechnungsgrundlage ist identisch mit der dem Typ „UVI“. Daher ist die Beurteilung von x_i und ξ einfach.

$$\begin{aligned} x_{i;1} &= \xi_1 = +1 \\ x_{i;2} &= \xi_2 = -1 \end{aligned}$$

⇒

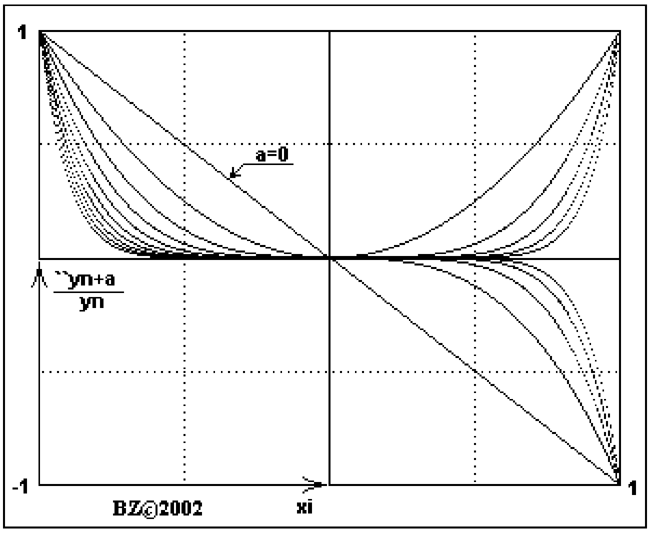

Abb. 16: Qualitative Darstellung des Einflusses von ξ auf das Verhältnis ``y_{n+a}/y_n

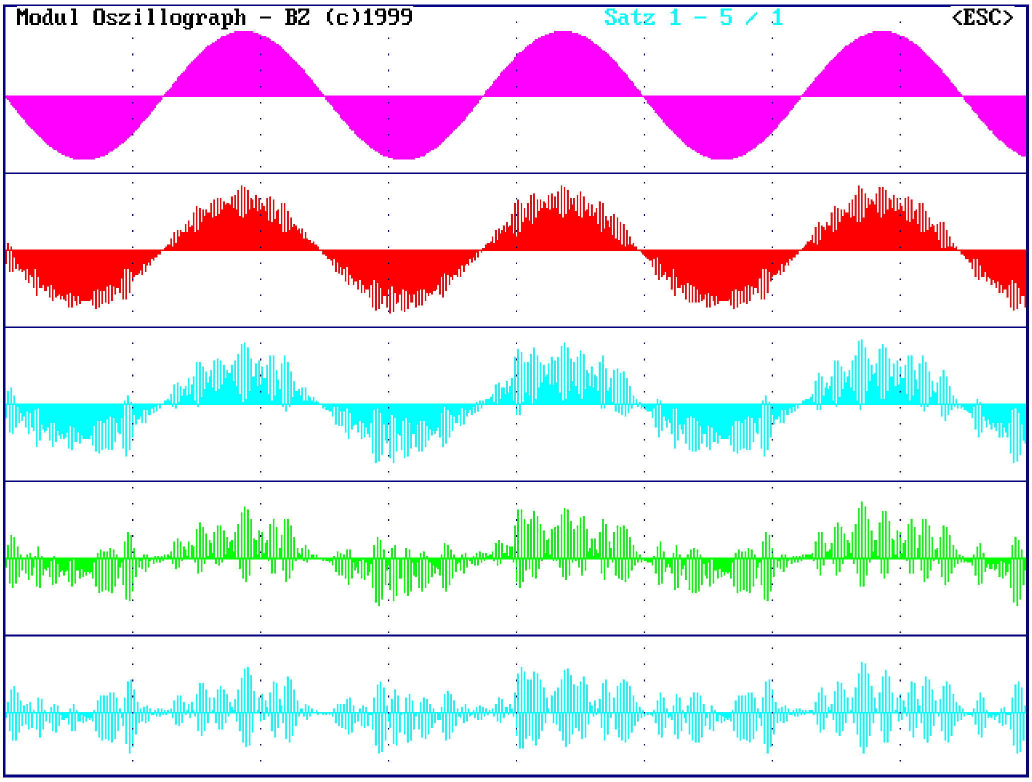

Abb. 17: Wirkung eines I- Filters auf ein Sinussignal.