Das Interpolationsfilter, eine Idee aus früheren Tagen
Die Abklinggleichungen

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 13. November 1995 / 15. September 1997
Letzte Revision: 2. April 2021

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

0.1 Die Abklinggleichungen

Die zentrale Frage in diesem Abschnitt lautet: „Wie pflanzt sich eine Stützstelle in Richtung steigender n fort? Was übergibt ein n seinem $n+1; n+2; n+3; \dots; n+a$ in welchem Verhältnis Anteile des Originalwertes y_n weiter?“ Diese Frage kann einfach mit Hilfe der typgebundenen Interpolationsgleichungen beantwortet werden. Man legt einfach fest: [001]ff. Abklinggleichungen

$$y_0 \neq 0 \qquad y_{0+a} = 0$$

Der Wert von y_n ist nun bestimmbar für $\grave{y}_n$ und für die folgenden Stützstellen $n + a$ nach erfolgter Iteration. Die typgebundenen Interpolationsgleichungen reduzieren sich dann dementsprechend:

0.1.1 Typ „UVI“

$$_{UVI}\grave{y}_n = (-\grave{y}_{n-1}) \cdot (1 + x_i) + \grave{y}_{n-1}$$

$\Rightarrow$

$$_{UVI}\grave{y}_n = \grave{y}_{n-1} \cdot (-\xi)$$

$\Rightarrow$

$$_{UVI}\grave{y}_{n+a} = (-\xi)^a \cdot y_n$$

Gleichzeitig soll in diesem Abschnitt die Rolle von ξ und dessen Limitierungen untersucht werden. Dadurch wird ersichtlich, warum die Bezeichnung der Interpolationskonstante x_i zu ξ beim Übergang der primären zu den sekundären Gleichungen erfolgte.

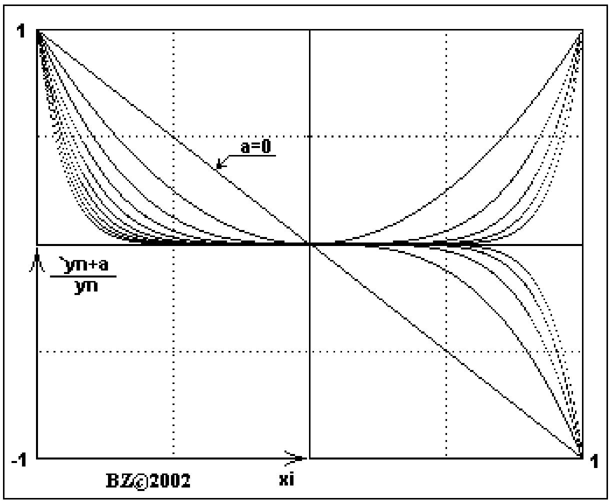
Die Grenzwerte sind einfach durch folgenden Ansatz zu berechnen:

$$\frac{_{UVI}\grave{y}_{n+a}}{y_n} \leq 1 = (-\xi)^2$$

Die Ergebnisse der Auflösung der quadratischen Gleichung decken sich vollkommen mit denen der Definition von x_i.

$$x_{i;1} = \xi_1 = +1 \qquad x_{i;2} = \xi_2 = -1$$

$\Rightarrow$



Qualitative Darstellung des Einflusses von ξ auf das Verhältnis y_{n+a}/y_n.

0.1.2 Typ „URI“

Der Typ „URI“ nimmt eine Sonderstellung unter den vier Typen ein. Dieser ist rein rückwärts interpoliert, d. h., es gibt keine Weitergabe von Werten an den Nachfolger. Deshalb verkürzen sich die Berechnungsgrundlagen stark. Eine Abklinggleichung wie bei den drei anderen Typen ist nicht ermittelbar.

$$_{URI}\grave{y}_n = (y_{n+1} - y_n) \cdot (-x_i) + y_n$$

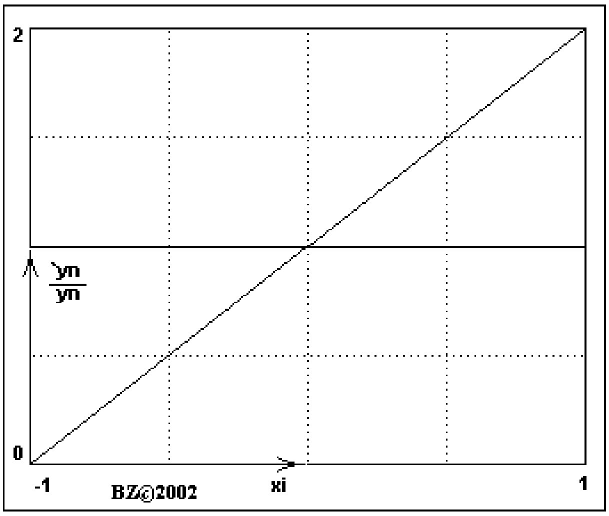
$\Rightarrow$

$$_{URI}\grave{y}_n = (1 + \xi) \cdot y_n$$

Für die Interpolationskonstante gibt es keine Abweichung von deren Definition. Zu beachten ist auch das Verhältnis $\grave{y}_n$ zu y_n.

$$x_{i;1} = \xi_1 = +1 \qquad x_{i;2} = \xi_2 = -1$$

$\Rightarrow$



Qualitative Darstellung des Einflusses von ξ auf das Verhältnis y_{n+a}/y_n.

0.1.3 Typ „SVI“

$$_{SVI}``y_n = (y_n - ``y_{n-1}) \cdot x_i^2 + (2 \cdot y_n - ``y_{n-1} - y_{n+1}) \cdot x_i + y_n$$

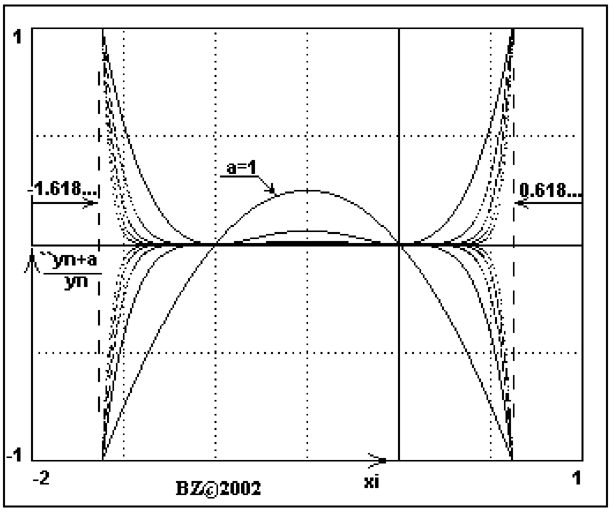
$\Rightarrow$

$$_{SVI}``y_n = (-``y_{n-1}) \cdot \xi^2 + (-``y_{n-1}) \cdot \xi$$

$\Rightarrow$

$$_{SVI}``y_{n+a} = (-\xi)^a \cdot (1+\xi)^a \cdot y_n$$

$\Rightarrow$



Qualitative Darstellung des Einflusses von ξ auf das Verhältnis y_{n+a}/y_n.

Vor dem Ermitteln markanter Grenzwerte des Verhältnisses $``y_{n+a}$ zu y_n wurde das Abbild 15 eingefügt. Zu erkennen ist, dass sich x_i und ξ nicht mehr kompatibel zueinander verhalten. Konsequenzen hat diese Eigenschaft lediglich beim späteren Bau eines Interpolationsfilters. Zum Beispiel, dem Befehl „Signal löschen!“ können zwei ξ- Werte zugeordnet werden.

Für die neuen Intervallgrenzen von ξ gilt folgender Ansatz:

$$\frac{_{SVI}``y_{n+a}}{y_n} \leq -1 = (-\xi)^1 \cdot (1+\xi)^1$$

Der Wert (-1) kann aus der Abbildung 15 für $a = 1$ begründet werden. Das Ergebnis der Auflösung hat das Bild:

$$x_{i;1} \neq \xi_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx +0,618... \qquad x_{i;2} \neq \xi_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx -1,618...$$

Für den Befehl „Signal löschen!“ wird ein anderer Ansatz genommen:

$$\frac{_{SVI}``y_{n+a}}{y_n} = 0 = (-\xi)^1 \cdot (1+\xi)^1$$

$\Rightarrow$

$$x_{i;1} \neq \xi_1 = 0 \qquad x_{i;2} \neq \xi_2 = -1$$

Die beiden Ergebnisse gelten für alle Werte unabhängig von a.

0.1.4 Typ „SRI“

$$_{SRI}\grave{}\grave{}y_n = (y_n - y_{n+1}) \cdot x_i^2 + (2 \cdot y_n - \grave{}\grave{}y_{n-1} - y_{n+1}) \cdot x_i + y_n$$

$\Rightarrow$

$$_{SRI}\grave{}\grave{}y_n = \grave{}\grave{}y_{n-1} \cdot \xi$$

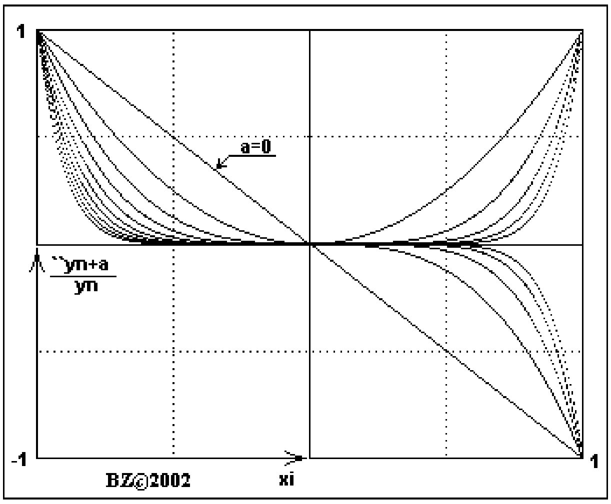
$\Rightarrow$

$$_{SRI}\grave{}\grave{}y_{n+a} = (-\xi)^{\,a} \cdot y_n$$

Diese Berechnungsgrundlage ist identisch mit der der Typs „UVI“. Daher ist die Beurteilung von x_i und ξ einfach.

$$x_{i;1} = \xi_1 = +1 \qquad\qquad x_{i;2} = \xi_2 = -1$$

$\Rightarrow$



Qualitative Darstellung des Einflusses von ξ auf das Verhältnis y_{n+a}/y_n.

LaTeX 2_ε