

Das Interpolationsfilter, eine Idee aus früheren Tagen

Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 13. November 1995 / 15. September 1997

Letzte Revision: 23. März 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Eine kurze Einleitung	3
1.1	Die Idee des Interpolationsfilters	3
1.2	Die Interpolation als mathematischer Begriff	4
1.2.1	Allgemeines	4
1.2.2	Lineare Interpolation	4
1.2.3	Anwendung im vorliegenden Thema	6
2	Die Beschreibung des primären Kalküls	8
2.1	Durchführung der Linearen Interpolation	9
2.1.1	Allgemeines	9
2.1.2	Anwendung im vorliegenden Thema	9
2.1.3	Der Rückführungstyp „ <i>Unsymmetrisch Vorwärts Interpoliert</i> “	10
2.1.4	Der Rückführungstyp „ <i>Unsymmetrisch Rückwärts Interpoliert</i> “	10
2.1.5	Der Rückführungstyp „ <i>Symmetrisch Vorwärts Interpoliert</i> “	10
2.1.6	Der Rückführungstyp „ <i>Symmetrisch Rückwärts Interpoliert</i> “	11
2.2	Die allgemeine Interpolationsgleichung	12
2.3	Die typgebundenen Interpolationsgleichungen	14
2.3.1	Typ „UVI“	14
2.3.2	Typ „URI“	14
2.3.3	Typ „SVI“	14
2.3.4	Typ „SRI“	14
2.4	Sonderfälle	15
2.4.1	Sonderfälle für die Interpolationskonstante	15
2.4.2	Sonderfälle für die Filtertypen	15
2.4.3	Globaler Lösungsort	15
2.4.4	Lokaler Lösungsort	16
3	Die sekundären Berechnungsgrundlagen	17
3.1	Vorbereitende Betrachtungen	17
3.2	Die sekundären, typgebundenen Interpolationsgleichungen	18
3.3	Die Grundgleichungen	19
3.3.1	Typ „UVI“	19
3.3.2	Typ „URI“	19
3.3.3	Typ „SVI“	19
3.3.4	Typ „SRI“	19
3.4	Die Abklinggleichungen	20
3.4.1	Typ „UVI“	20
3.4.2	Typ „URI“	20
3.4.3	Typ „SVI“	21
3.4.4	Typ „SRI“	22
3.5	Die Hüllkurvengleichungen	23

3.5.1	Typ „SVI“	23
3.5.2	Typ „SRI“	24
4	Die Übertragungsfunktionen	26
4.1	Fall 1	27
4.2	Fall 2	28
4.3	Fall 3	29
4.4	Fall 4	30
4.5	Fall 5	31
4.6	Fall 6	32
4.7	Fall 7	33
4.8	Fall 8	34
4.9	Fall 9	35
4.10	Fall 10	37
4.11	Fall 11	39
4.12	Fall 12	41
5	Der Phasen- und Amplitudengang	43
5.1	Die Übertragungsfunktion $G_I(s)$	44
5.2	Die Übertragungsfunktion $G_{II}(s)$	45
5.3	Fallzusammenfassungen	46
5.3.1	Fall 8 + 9 = Typ „SRI“ und Fall 10 + 11 + 12 = Typ „SVI“	46
5.3.2	Fall 8 + 9 = Typ „SRI“ und Fall 10 + 11 + 12 = Typ „SVI“	48
6	Synthese eines Autokorrelators als Anwendungsmöglichkeit	51
6.1	Beschreibung eines Autokorrelators für weißes Rauschen	51
6.2	Voraussetzungen	52
6.3	Herleitung für eine ungestörte Gleichverteilung	53
6.4	Herleitung für eine gestörte Gleichverteilung	57
6.5	Ergebnis	60
7	Analyse eines Autokorrelators als Anwendungsmöglichkeit	61

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

3.5 Die Hüllkurvengleichungen

Betrachtet man die Abklinggleichungen der vorhergegangenen Abschnitte sind zwei verschiedene [001]
Arten der Behandlung von ξ zu erkennen. Als Beispiel, die beiden symmetrisch interpolierten Filter:

$${}_{SVI} \backslash \backslash y_{n+a} = (-\xi)^a \cdot (1 + \xi)^a \cdot y_n \quad {}_{SRI} \backslash \backslash y_{n+a} = (-\xi)^a \cdot y_n$$

Für die weiteren Untersuchungen wird eine trigonometrische Größe eingeführt. Am geeignetsten
dafür, die Sinuskurve in allgemeiner Form anzuwenden. Es gilt als hinreichender Ansatz:

Hüllkurvengl.

$$(-1)^a = \cos(a \cdot \pi) \quad (-1)^a = \sin\left(a \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (-1)^a = \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2a + 1)\right)$$

Die beiden Berechnungsgrundlagen verändern sich nun wie folgt:

$${}_{SVI} \backslash \backslash y_{n+a} = \xi^a \cdot (1 + \xi)^a \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2a + 1)\right) \cdot y_n \quad {}_{SRI} \backslash \backslash y_{n+a} = \xi^a \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2a + 1)\right) \cdot y_n$$

Nun kann eine Ermittlung der allgemeinen Eigenschaften erfolgen. Für das vorliegende Thema ist
jedoch lediglich die Hüllkurve von Interesse. Dessen Funktion, die Hüllkurve (Envelope), ist defi-
niert als:

$${}_{SVI} \backslash \backslash y_{n+a}^{Env} = \xi^a \cdot (1 + \xi)^a \cdot y_n \quad {}_{SRI} \backslash \backslash y_{n+a}^{Env} = \xi^a \cdot y_n$$

Die kleinste Periode beträgt 2, was nicht nur zu erwarten war, sondern auch laut letzten Abschnitten,
dass weiterhin gelten muss, die Nullstellen liegen mittig zwischen den Stützstellen der Funktion,
wobei daran erinnert, dass weiterhin nur die Werte der Stützstellen für unsere Betrachtungen von
Wichtigkeit sind, auch wenn im folgenden Abbild die Hüllkurve und Sinuskurve kontinuierlich ge-
zeichnet werden.

$$T = 2 \quad x_n = n - \frac{1}{2}$$

Der besseren Übersicht halber werden wieder Typunterscheidungen vonnöten.

3.5.1 Typ „SVI“

Wie schon vorher ermittelt, gilt die Gleichungen für Hüll- und Sinuskurve folgender Form:

$${}_{SVI} \backslash \backslash y_{n+a} = \xi^a \cdot (1 + \xi)^a \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2a + 1)\right) \cdot y_n \quad {}_{SVI} \backslash \backslash y_{n+a}^{Env} = (\pm\xi)^a \cdot (1 + \xi)^a \cdot y_n$$

Mit:

$$\xi_{MAX} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx +0,618\dots \quad \xi_{MIN} > 0$$

Für ξ gibt es eine neue Restriktion. Erstens ist ξ_{MIN} nie Null, da 0^a für $a = 0$ nicht definiert ist und
 ξ sei immer größer 0, ebenfalls nötig, da ξ^a für negative ξ und nichtnatürlicherzahligen a ebenfalls
nicht definiert ist. Ist letzteres der Fall, verändern sich die Berechnungsgrundlagen.

$${}_{SVI} \backslash \backslash y_{n+a} = (-\xi)^a \cdot (1 + \xi)^a \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2a + 1)\right) \cdot y_n \quad {}_{SVI} \backslash \backslash y_{n+a}^{Env} = (-\xi)^a \cdot (1 + \xi)^a \cdot y_n$$

Mit:

$$\xi_{MAX} = 0 \quad \xi_{MIN} = -1$$

Als letztes der dritte Abschnitt entlang des Definitionsbereichs von ξ . Ist die Interpolationskon-
stante kleiner als -1 , wird der Ausdruck $(1 + \xi)^a$ negativ. Die Berechnungsgrundlage ändert sich
nochmals leicht. Es ist ersichtlich, dass das Intervall $[0, 618; 0)$ symmetrisch mit dem des Inter-
valls $(-1; -1, 618]$ ist. Rein analytisch ist der Ausdruck $\xi^a \cdot (1 + \xi)^a$ gleich des dritten Intervalls
 $-\xi^a \cdot (-1 - \xi)^a$. Jedoch kann nicht endgültig umgestellt werden, da sonst die Kontinuität der Dar-
stellung nicht gewährleistet wäre.

$${}_{SVI} \backslash \backslash y_{n+a} = (-\xi)^a \cdot (-1 - \xi)^a \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2a + 1)\right) \cdot y_n \quad {}_{SVI} \backslash \backslash y_{n+a}^{Env} = \pm 1 \cdot (-\xi)^a \cdot (-1 - \xi)^a \cdot y_n$$

Mit:

$$\xi_{MAX} < -1 \quad \xi_{MIN} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = -1,618\dots$$

Zur visuellen Orientierung folgen nun zwei Abbildungen zum Thema des letzten Abschnittes.

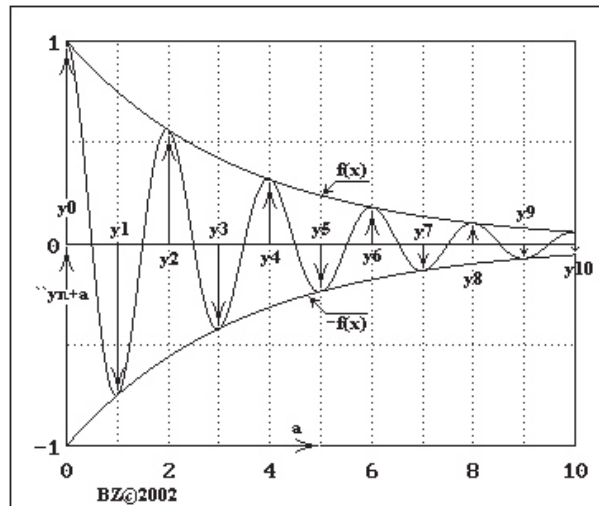


Abb. 17: Sinus- und Hüllkurve(n) für den Fall $y_0 = 1$ und $\xi = 1/2$; Typ „SVI“ sowie $\xi = -3/2$.

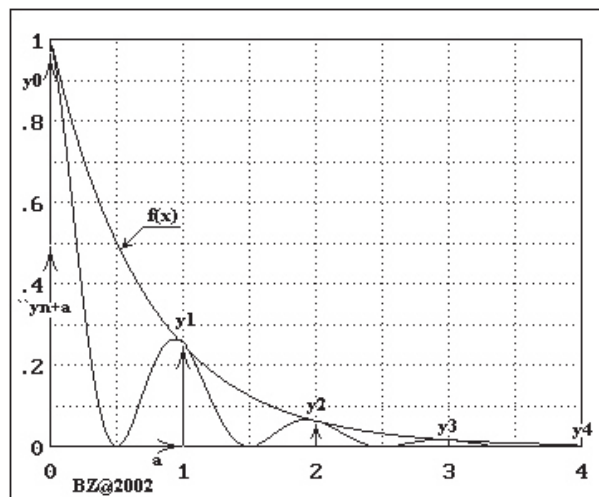


Abb. 18: Sinus- und Hüllkurve für den Fall $y_0 = 1$ und $\xi = -1/2$; Typ „SVI“.

3.5.2 Typ „SRI“

Die in den letzten Abschnitten schon kurz aufgezeigte Berechnungsgrundlagen für die Sinuskurve ähnelt der des Typs „SVI“. Es fehlt lediglich der Term $(1 + \xi)^a$, was in der Endkonsequenz bedeutet, dass es nur zwei zu betrachtende Intervalle geben kann. Ein Abbild verdeutlicht dies visuell. Für das erste Intervall gilt folgende Berechnungsgrundlage, dessen Ermittlung im vorhergehenden Abschnitt aufgezeigt wurde.

$$SRI \ \ y_{n+a} = \xi^a \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2a + 1)\right) \cdot y_n \quad SRI \ \ y_{n+a}^{Env} = \xi^a \cdot y_n$$

Mit:

$$\xi_{MAX} = +1 \quad \xi_{MIN} = 0$$

⇒

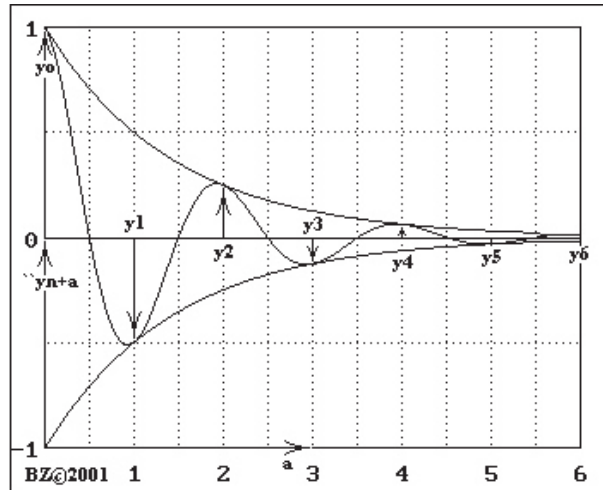


Abb. 19: Sinus- und Hüllkurve(n) für den Fall $y_0 = 1$ und $\xi = 1/2$; Typ „SRI“.

Für das zweite Intervall gelten andere Grundlagen. Ein Abbild zeigt dies auf.

$$SRI \hat{y}_{n+a} = (-\xi)^a \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2a + 1)\right) \cdot y_n \quad SRI \hat{y}_{n+a}^{Env} = (-\xi)^a \cdot y_n$$

Mit:

$$\xi_{MAX} = 0 \quad \xi_{MIN} = -1$$

⇒

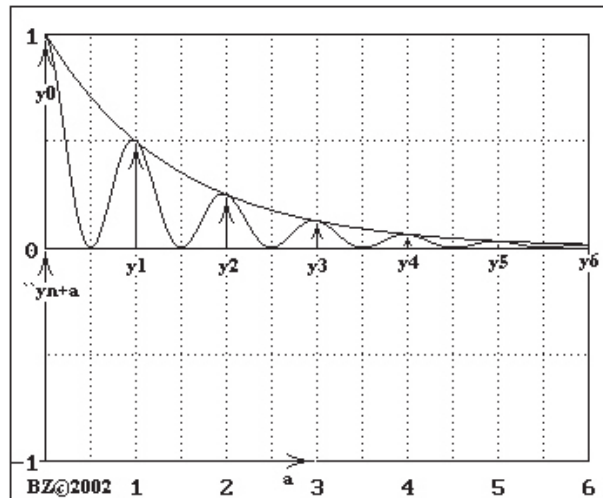


Abb. 20: Sinus- und Hüllkurve für den Fall $y_0 = 1$ und $\xi = -1/2$; Typ „SRI“.