

3. 2. 3 Die Hüllkurvengleichungen

Betrachtet man die Abklinggleichungen der vorhergegangenen Abschnitte sind zwei verschiedene Arten der Behandlung von ξ zuerkennen. Als Beispiel, die beiden symmetrisch interpolierten Filter:

$$\begin{array}{l} \overset{SVI}{\ddot{y}}_{n+a} = (-\xi)^a (1 + \xi)^a y_n \\ \overset{SRI}{\ddot{y}}_{n+a} = (-\xi)^a y_n \end{array}$$

Für die weiteren Untersuchungen wird eine trigonometrische Größe eingeführt. Am naheliegensten ist dafür, die Sinuskurve in allgemeiner Form anzuwenden. Es gilt als hinreichender Ansatz:

$$\begin{array}{l} (-1)^a = \cos(a\pi) \\ (-1)^a = \sin\left(a\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ (-1)^a = \sin\left(\frac{1}{2}\pi[2a + 1]\right) \end{array}$$

Die beiden Berechnungsgrundlagen verändern sich nun wie folgt:

$$\begin{array}{l} \overset{SVI}{\ddot{y}}_{n+a} = \xi^a (1 + \xi)^a \sin\left(\frac{1}{2}\pi[2a + 1]\right) y_n \\ \overset{SRI}{\ddot{y}}_{n+a} = \xi^a \sin\left(\frac{1}{2}\pi[2a + 1]\right) y_n \end{array}$$

Nun kann eine Ermittlung der allgemeinen Eigenschaften erfolgen. Für das vorliegende Thema ist jedoch lediglich die Hüllkurve von Interesse. Dessen Funktion, die Hüllkurve (Envelope), ist definiert als:

$$\begin{array}{l} \overset{SVI}{\ddot{y}}_{n+a}^{Env} = \xi^a (1 + \xi)^a y_n \\ \overset{SRI}{\ddot{y}}_{n+a}^{Env} = \xi^a y_n \end{array}$$

Die kleinste Periode beträgt 2, was nicht nur zu erwarten war, sondern auch laut Abschnitt 2. 1 weiterhin gelten muss, die Nullstellen liegen mittig zwischen den Stützstellen der Funktion, wobei daran erinnert werden muss, dass weiterhin nur die Werte der Stützstellen für unsere Betrachtungen von Wichtigkeit sind, auch wenn im folgenden Abbild die Hüllkurve und Sinuskurve kontinuierlich gezeichnet werden.

$$T = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2$$

$$x_n = \frac{n\pi - \frac{\pi}{2}}{\pi} = n - \frac{1}{2}$$

Der besseren Übersicht halber werden wieder Typunterscheidungen vonnöten.

3. 2. 3. 1 Typ „SVI“

Wie schon vorher ermittelt, gilt die Gleichungen für Hüll- und Sinuskurve folgender Form:

$$\begin{aligned} \overset{SVI}{\ddot{y}}_{n+a} &= \xi^a (1 + \xi)^a \sin\left(\frac{1}{2}\pi[2a+1]\right) y_n \\ \overset{SVI}{\ddot{y}}_{n+a}^{Env} &= \pm [\xi^a (1 + \xi)^a] y_n \\ \xi_{\max} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx +0,618... \\ \xi_{\min} &= 0 \end{aligned}$$

Für ξ gibt es eine neue Restriktion. Erstens ist ξ_{\min} nie Null, da 0^a für $a=0$ nicht definiert ist und ξ sei immer größer 0, ebenfalls nötig, da ξ^a für negative ξ und nichtnatürlicher „a“ ebenfalls nicht definiert ist. Ist letzteres der Fall, verändern sich die Berechnungsgrundlagen. Gleichzeitig bedeutet dies für den Befehl „Signal löschen!“, dass \ddot{y}_0 nur über deren Definition (Abschnitt 2. 2. 3) ermittelbar ist.

$$\begin{aligned} \overset{SVI}{\ddot{y}}_{n+a} &= (-\xi)^a (1 + \xi)^a \sin^2\left(\frac{1}{2}\pi[2a+1]\right) y_n \\ \overset{SVI}{\ddot{y}}_{n+a}^{Env} &= (-\xi)^a (1 + \xi)^a y_n \\ \xi_{\max} &= 0 \\ \xi_{\min} &= -1 \end{aligned}$$

Als letztes der dritte Abschnitt entlang des Definitionsbereichs von ξ . Ist die Interpolationskonstante kleiner als (-1) wird der Ausdruck $(1+\xi)^a$ negativ. Die Berechnungsgrundlage ändert sich nochmals leicht. Aus Abbildung 15 ist ersichtlich, dass das Intervall $\langle +0,618... ; 0 \rangle$ symmetrisch mit dem des Intervalls $\langle -1 ; -1,618... \rangle$ ist. Rein analytisch ist der Ausdruck $(\xi)^a(1+\xi)^a$ gleich dem Term des dritten Intervalls $(-\xi)^a(-1-\xi)^a$. Jedoch kann nicht endgültig umgestellt werden, da sonst die Kontinuität der Darstellung nicht gewährleistet wäre. Jedoch gerade diese wird unbedingt gebraucht für das Verständnis bei einem späteren Bau eines Interpolationsfilters.

$$\begin{aligned} \overset{\text{SVI}}{y}_{n+a} &= (-\xi)^a (-1-\xi)^a \sin\left(\frac{1}{2}\pi[2a+1]\right) y_n \\ \overset{\text{SVI}}{y}_{n+a}^{\text{Env}} &= \pm [(-\xi)^a (-1-\xi)^a] y_n \\ \xi_{\max} &= -1 \\ \xi_{\min} &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = -1,618... \end{aligned}$$

Zur visuellen Orientierung folgen nun zwei Abbildungen zum Thema des letzten Abschnittes.

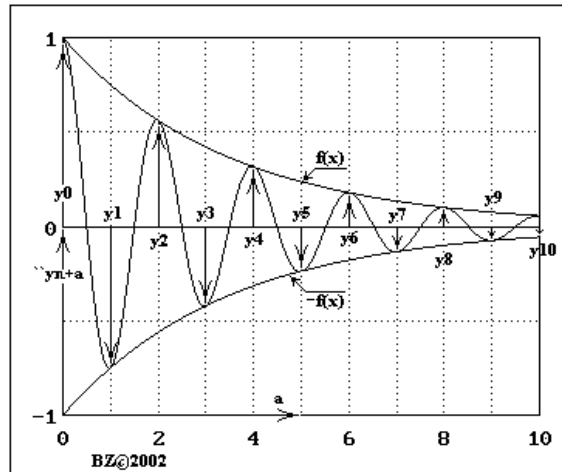


Abb. 17: Sinus- und Hüllkurve(n) für den Fall $y_0=1$ und $\xi=1/2$; Typ „SVI“ sowie $\xi=-3/2$.

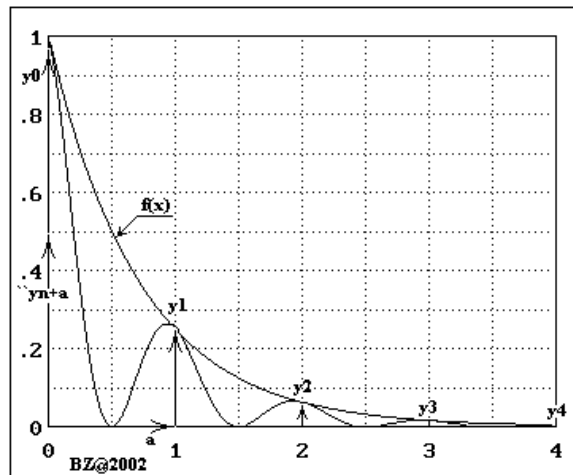


Abb. 18: Sinus- und Hüllkurve für den Fall $y_0=1$ und $\xi=-1/2$; Typ „SVI“.

3. 2. 3. 2 Typ „SRI“

Die im Abschnitt 3. 2. 3 schon kurz aufgezeigte Berechnungsgrundlage für die Sinuskurve ähnelt der des Typs „SVI“. Es fehlt lediglich der Term $(1+x)^a$, was in der Endkonsequenz bedeutet, dass es nur zwei zu betrachtende Intervalle geben kann. Das Abbild 16 verdeutlicht dies visuell. Für das erste Intervall gilt folgende Berechnungsgrundlage, dessen Ermittlung im vorhergehenden Abschnitt aufgezeigt wurde.

$$\begin{aligned} \overset{\sim}{SRI} y_{n+a} &= \xi^a \sin\left(\frac{1}{2}\pi[2a+1]\right) y_n \\ \overset{\sim}{SRI} y_{n+a}^{Env} &= \xi^a y_n \\ \xi_{\max} &= +1 \\ \xi_{\min} &= 0 \end{aligned}$$

⇒

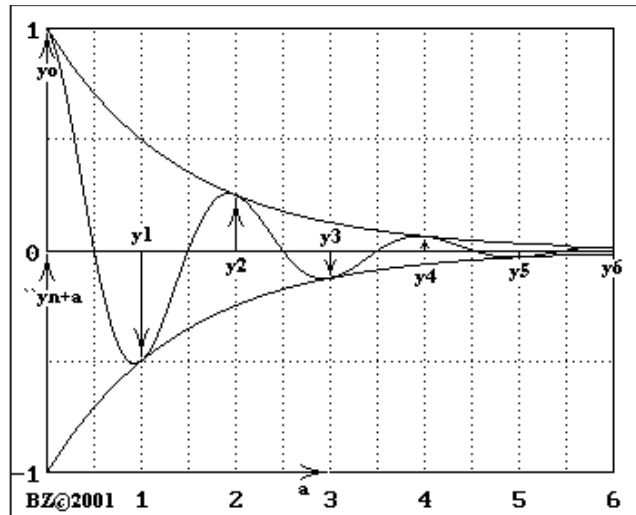


Abb. 19: Sinus- und Hüllkurve(n) für den Fall $y_0=1$ und $\xi=1/2$; Typ „SRI“.

Für das zweite Intervall gelten andere Grundlagen. Abbild 20 verdeutlicht dies.

$$\begin{aligned} \overset{\sim}{SRI} y_{n+a} &= (-\xi)^a \sin^2\left(\frac{1}{2}\pi[2a+1]\right) y_n \\ \overset{\sim}{SRI} y_{n+a}^{Env} &= (-\xi)^a y_n \\ \xi_{\max} &= 0 \\ \xi_{\min} &= -1 \end{aligned}$$

⇒

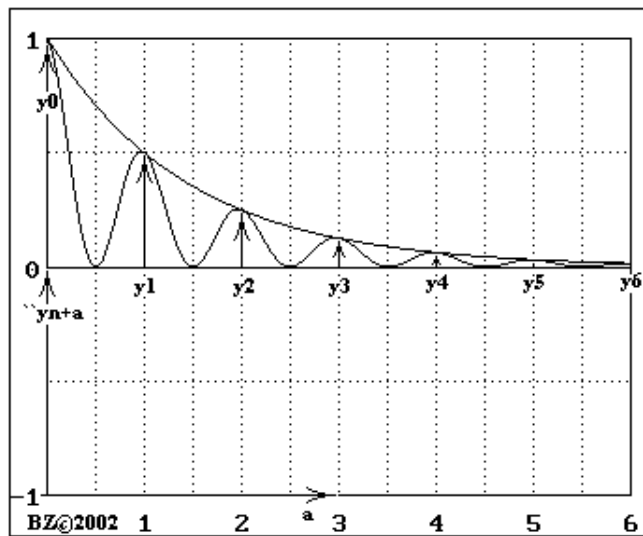


Abb. 20: Sinus- und Hüllkurve für den Fall $y_0=1$ und $\xi=-1/2$; Typ „SRI“.