

Das Interpolationsfilter, eine Idee aus früheren Tagen

Die Hüllkurvengleichungen

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 13. November 1995 / 15. September 1997

Letzte Revision: 2. April 2021

Inhaltsverzeichnis

0.1	Die Hüllkurvengleichungen	3
0.1.1	Typ „SVI“	4
0.1.2	Typ „SRI“	6

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

0.1 Die Hüllkurvengleichungen

Betrachtet man die Abklinggleichungen der vorhergegangenen Abschnitte sind zwei verschiedene [001]ff. Arten der Behandlung von ξ zuerkennen. Als Beispiel, die beiden symmetrisch interpolierten Filter:

$$SVI \hat{y}_{n+a} = (-\xi)^a \cdot (1 + \xi)^a \cdot y_n \quad SRI \hat{y}_{n+a} = (-\xi)^a \cdot y_n$$

Für die weiteren Untersuchungen wird eine trigonometrische Größe eingeführt. Am geeignetsten dafür, die Sinuskurve in allgemeiner Form anzuwenden. Es gilt als hinreichender Ansatz:

Hüllkurvengl.

$$(-1)^a = \cos(a \cdot \pi) \quad (-1)^a = \sin\left(a \cdot \pi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (-1)^a = \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2a + 1)\right)$$

Die beiden Berechnungsgrundlagen verändern sich nun wie folgt:

$$SVI \hat{y}_{n+a} = \xi^a \cdot (1 + \xi)^a \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2a + 1)\right) \cdot y_n \quad SRI \hat{y}_{n+a} = \xi^a \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2a + 1)\right) \cdot y_n$$

Nun kann eine Ermittlung der allgemeinen Eigenschaften erfolgen. Für das vorliegende Thema ist jedoch lediglich die Hüllkurve von Interesse. Dessen Funktion, die Hüllkurve (Envelope), ist definiert als:

$$SVI \hat{y}_{n+a}^{Env} = \xi^a \cdot (1 + \xi)^a \cdot y_n \quad SRI \hat{y}_{n+a}^{Env} = \xi^a \cdot y_n$$

Die kleinste Periode beträgt 2, was nicht nur zu erwarten war, sondern auch laut letzten Abschnitten, dass weiterhin gelten muss, die Nullstellen liegen mittig zwischen den Stützstellen der Funktion, wobei daran erinnert, dass weiterhin nur die Werte der Stützstellen für unsere Betrachtungen von Wichtigkeit sind, auch wenn im folgenden Abbild die Hüllkurve und Sinuskurve kontinuierlich gezeichnet werden.

$$T = 2 \quad x_n = n - \frac{1}{2}$$

Der besseren Übersicht halber werden wieder Typunterscheidungen vonnöten.

0.1.1 Typ „SVI“

Wie schon vorher ermittelt, gilt die Gleichungen für Hüll- und Sinuskurve folgender Form:

$$SVI \ \ddot{y}_{n+a} = \xi^a \cdot (1 + \xi)^a \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2a + 1)\right) \cdot y_n \quad SVI \ \ddot{y}_{n+a}^{Env} = (\pm\xi)^a \cdot (1 + \xi)^a \cdot y_n$$

Mit:

$$\xi_{MAX} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \approx +0,618... \quad \xi_{MIN} > 0$$

Für ξ gibt es eine neue Restriktion. Erstens ist ξ_{MIN} nie Null, da 0^a für $a = 0$ nicht definiert ist und ξ sei immer größer 0, ebenfalls nötig, da ξ^a für negative ξ und nichtnatürlichzahligem a ebenfalls nicht definiert ist. Ist letzteres der Fall, verändern sich die Berechnungsgrundlagen.

$$SVI \ \ddot{y}_{n+a} = (-\xi)^a \cdot (1 + \xi)^a \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2a + 1)\right) \cdot y_n \quad SVI \ \ddot{y}_{n+a}^{Env} = (-\xi)^a \cdot (1 + \xi)^a \cdot y_n$$

Mit:

$$\xi_{MAX} = 0 \quad \xi_{MIN} = -1$$

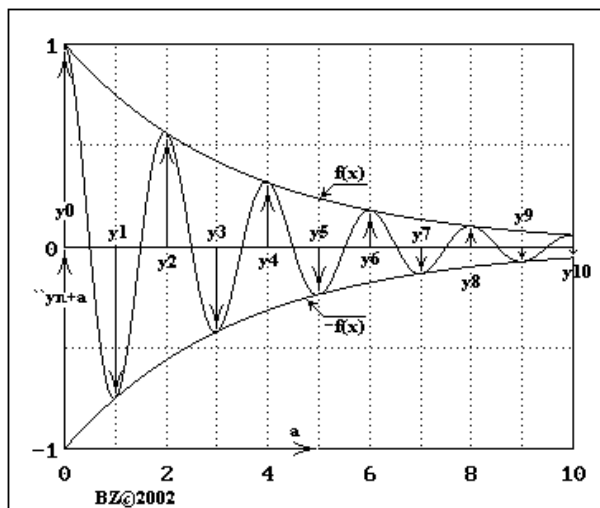
Als letztes der dritte Abschnitt entlang des Definitionsbereichs von ξ . Ist die Interpolationskonstante kleiner als -1 , wird der Ausdruck $(1 + \xi)^a$ negativ. Die Berechnungsgrundlage ändert sich nochmals leicht. Es ist ersichtlich, dass das Intervall $[0, 618; 0)$ symmetrisch mit dem des Intervalls $(-1; -1, 618]$ ist. Rein analytisch ist der Ausdruck $\xi^a \cdot (1 + \xi)^a$ gleich des dritten Intervalls $-\xi^a \cdot (-1 - \xi)^a$. Jedoch kann nicht endgültig umgestellt werden, da sonst die Kontinuität der Darstellung nicht gewährleistet wäre.

$$SVI \ \ddot{y}_{n+a} = (-\xi)^a \cdot (-1 - \xi)^a \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2a + 1)\right) \cdot y_n \quad SVI \ \ddot{y}_{n+a}^{Env} = \pm 1 \cdot (-\xi)^a \cdot (-1 - \xi)^a \cdot y_n$$

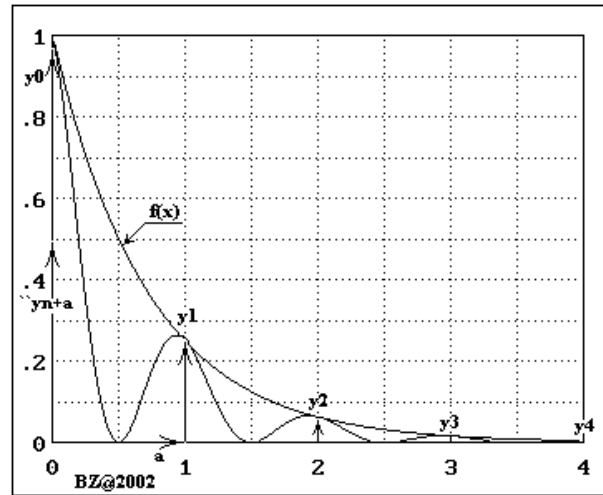
Mit:

$$\xi_{MAX} < -1 \quad \xi_{MIN} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = -1,618...$$

Zur visuellen Orientierung folgen nun zwei Abbildungen zum Thema des letzten Abschnittes.



Sinus- und Hüllkurve(n) für den Fall $y_0 = 1$ und $\xi = 1/2$; Typ „SVI“ sowie $\xi = -3/2$.



Sinus- und Hüllkurve für den Fall $y_0 = 1$ und $\xi = -1/2$; Typ „SVI“.

0.1.2 Typ „SRI“

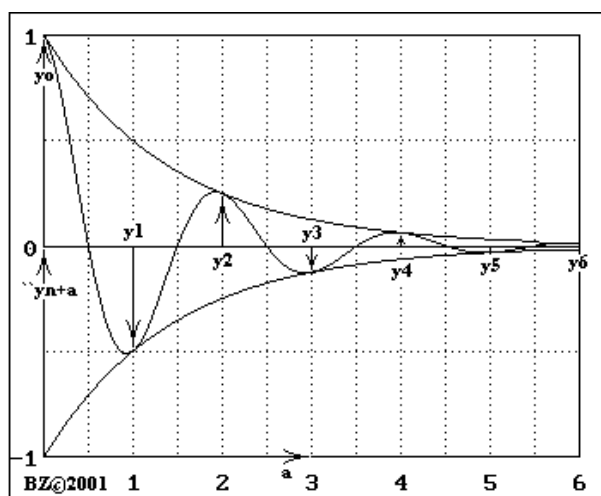
Die in den letzten Abschnitten schon kurz aufgezeigte Berechnungsgrundlagen für die Sinuskurve ähnelt der des Typs „SVI“. Es fehlt lediglich der Term $(1 + \xi)^a$, was in der Endkonsequenz bedeutet, dass es nur zwei zu betrachtende Intervalle geben kann. Ein Abbild verdeutlicht dies visuell. Für das erste Intervall gilt folgende Berechnungsgrundlage, dessen Ermittlung im vorhergehenden Abschnitt aufgezeigt wurde.

$$SRI \hat{y}_{n+a} = \xi^a \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2a + 1)\right) \cdot y_n \quad SRI \hat{y}_{n+a}^{Env} = \xi^a \cdot y_n$$

Mit:

$$\xi_{MAX} = +1 \quad \xi_{MIN} = 0$$

⇒



Sinus- und Hüllkurve(n) für den Fall $y_0 = 1$ und $\xi = 1/2$; Typ „SRI“.

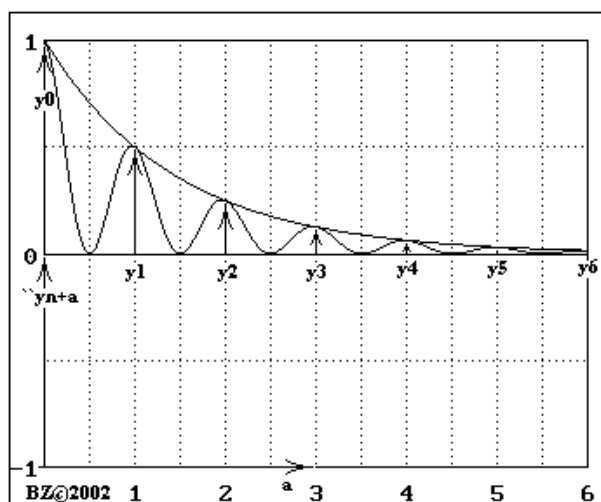
Für das zweite Intervall gelten andere Grundlagen. Ein Abbild zeigt dies auf.

$$SRI \hat{y}_{n+a} = (-\xi)^a \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2a + 1)\right) \cdot y_n \quad SRI \hat{y}_{n+a}^{Env} = (-\xi)^a \cdot y_n$$

Mit:

$$\xi_{MAX} = 0 \quad \xi_{MIN} = -1$$

⇒



Sinus- und Hüllkurve für den Fall $y_0 = 1$ und $\xi = -1/2$; Typ „SRI“.

L^AT_EX 2_ε

