Folgende Fälle gibt es zwecks Berechnung der Filterübertragungsfunktion:

- Fall 1:

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t) \leftrightarrow E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt die obere Hüllkurve einer gedämpften Cosinusfunktion an mit $0 < \xi < 1$:

$$a(t) = \xi^t \leftrightarrow A(s) = \frac{1}{s - \ln \xi}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion "G(s)":

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s - \ln \xi}}$$

- Fall 2:

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t) \leftrightarrow E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt die untere Hüllkurve einer gedämpften Cosinusfunktion an mit $0 < \xi < 1$:

$$a(t) = -\xi^t \leftrightarrow A(s) = \frac{1}{\ln \xi - s}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion ”G(s)”:

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{\ln \xi - s}}$$

- Fall 3:

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t) \leftrightarrow E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt die obere Hüllkurve einer gedämpften Cosinusfunktion an mit $0 < \xi < \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$:

$$a(t) = \xi^t (1+\xi)^t \leftrightarrow A(s) = \frac{1}{s - \ln \xi - \ln(1+\xi)}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion ”G(s)”:

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s - \ln \xi (1+\xi)}}$$

- Fall 4:

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t) \leftrightarrow E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt die untere Hüllkurve einer gedämpften Cosinusfunktion an mit $0 < \xi < \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$:

$$a(t) = -\xi^t (1+\xi)^t \leftrightarrow A(s) = \frac{1}{\ln \xi + \ln(1+\xi) - s}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion ”G(s)”:

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{\ln \xi(1+\xi) - s}}$$

- Fall 5:

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t) \leftrightarrow E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt die obere Hüllkurve einer gedämpften Cosinusfunktion an mit $-\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right) < \xi < -1$:

$$a(t) = (-\xi)^t (-1-\xi)^t \leftrightarrow A(s) = \frac{1}{\ln \xi + \ln(-1-\xi) - s}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion ”G(s)”:

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{\ln(-\xi)(1+\xi) - s}}$$

- Fall 6:

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t) \leftrightarrow E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt eine Cosinusfunktion an:

$$a(t) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi[2t+1]\right) \leftrightarrow A(s) = \frac{s}{s^2+\pi^2}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion ”G(s)”:

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{G(s) = \frac{s}{\pi^2+s^2}}$$

- Fall 7:

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t)=\delta(t)\leftrightarrow E(s)=1$$

Am Ausgang liegt eine Quadratcosinusfunktion an:

$$a(t)=\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi[2t+1]\right)\leftrightarrow A(s)=\frac{s^2+2\pi^2}{\left(s^2+4\pi^2\right)s}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion ”G(s)”:

$$G(s)=\frac{A(s)}{E(s)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{G(s)=\frac{2\pi^2+s^2}{4\pi^2+s^2}\cdot\frac{1}{s}}$$

- Fall 8:

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t)=\delta(t)\leftrightarrow E(s)=1$$

Am Ausgang liegt eine gedämpfte Cosinusfunktion an mit $0<\xi<1$:

$$a(t)=\xi^t \sin\left(\frac{1}{2}\pi[2t+1]\right)=e^{t\ln\xi}\sin\left(\frac{1}{2}\pi[2t+1]\right)\leftrightarrow A(s)=\frac{s-\ln\xi}{(s-\ln\xi)^2+\pi^2}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion ”G(s)”:

$$G(s)=\frac{A(s)}{E(s)}$$

$\Rightarrow$

$$G(s)=\frac{-\frac{\ln\xi}{\ln^2\xi+\pi^2}+\frac{1}{\ln^2\xi+\pi^2}s}{1-\frac{2\ln\xi}{\ln^2\xi+\pi^2}s+\frac{1}{\ln^2\xi+\pi^2}s^2}$$

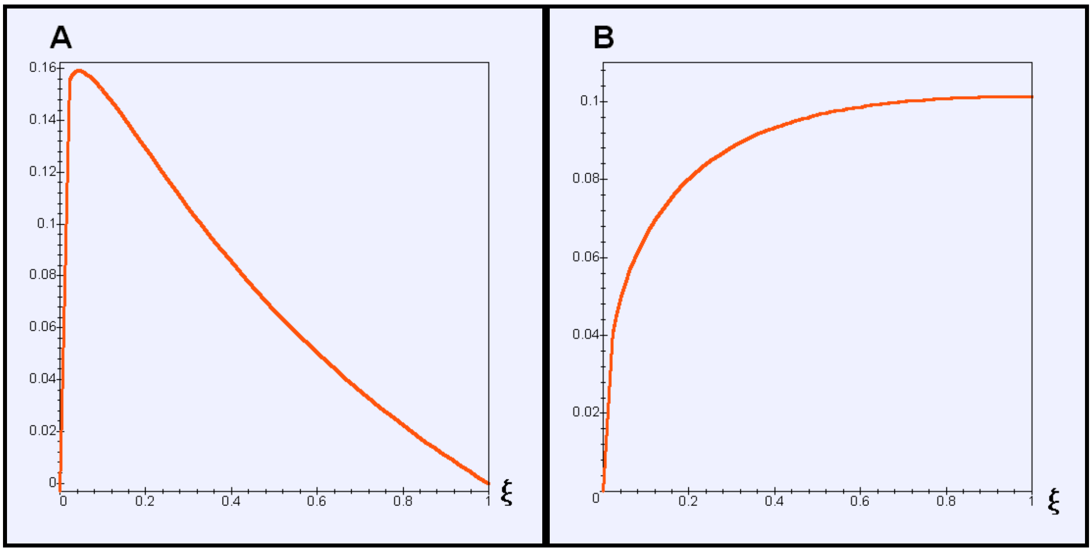
$\Rightarrow$

$$\boxed{G(s)=\frac{A+Bs}{1+2As+Bs^2}}$$

Mit:

$$\boxed{A=-\frac{\ln\xi}{\ln^2\xi+\pi^2}\qquad B=\frac{1}{\ln^2\xi+\pi^2}}$$

$\Rightarrow$



- Fall 9:

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t)=\delta(t)\leftrightarrow E(s)=1$$

Am Ausgang liegt eine gedämpfte Quadratcosinusfunktion mit $-1<\xi<0$:

$$a(t)=(-\xi)^t\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi[2t+1]\right)=e^{t\ln(-\xi)}\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi[2t+1]\right)\leftrightarrow A(s)=\frac{(s-\ln(-\xi))^2+2\pi^2}{(s-\ln(-\xi))^2+4\pi^2}\cdot\frac{1}{s-\ln(-\xi)}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion "G(s)":

$$G(s)=\frac{A(s)}{E(s)}$$

$\Rightarrow$

$$G(s)=\frac{\frac{\ln^2(-\xi)+2\pi^2}{\ln^2(-\xi)+4\pi^2}-2\frac{\ln(-\xi)}{\ln^2(-\xi)+4\pi^2}s+\frac{1}{\ln^2(-\xi)+4\pi^2}s^2}{1-2\frac{s}{\ln^2(-\xi)+4\pi^2}\ln(-\xi)+\frac{1}{\ln^2(-\xi)+4\pi^2}s^2}\cdot\frac{1}{s-\ln(-\xi)}$$

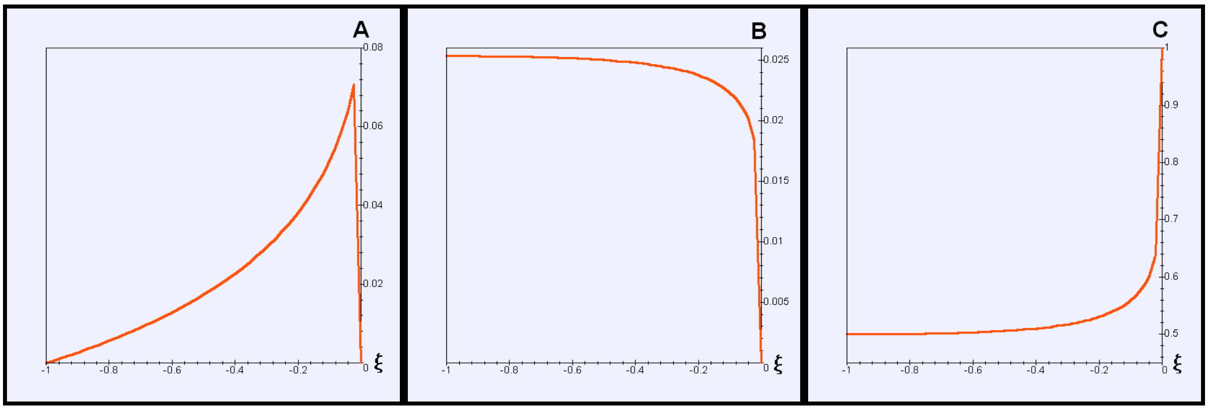
$\Rightarrow$

$$\boxed{G(s)=\frac{C+2As+Bs^2}{1+2As+Bs^2}\cdot\frac{1}{s+D}}$$

Mit:

$$\boxed{A=-\frac{\ln(-\xi)}{\ln^2(-\xi)+4\pi^2}\qquad B=\frac{1}{\ln^2(-\xi)+4\pi^2}\qquad C=\frac{\ln^2(-\xi)+2\pi^2}{\ln^2(-\xi)+4\pi^2}\qquad D=-\ln(-\xi)}$$

$\Rightarrow$



- Fall 10:

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t) \leftrightarrow E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt eine gedämpfte Cosinusfunktion mit $0 < \xi < \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$:

$$a(t) = \xi^t (1+\xi)^t \sin\left(\frac{1}{2}\pi[2t+1]\right) = e^{t \ln \xi(1+\xi)} \sin\left(\frac{1}{2}\pi[2t+1]\right) \leftrightarrow A(s) = \frac{s - \ln \xi(1+\xi)}{(s - \ln \xi(1+\xi))^2 + \pi^2}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion "G(s)":

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

$\Rightarrow$

$$G(s) = \frac{-\frac{\ln \xi(1+\xi)}{\ln^2 \xi(1+\xi) + \pi^2} + \frac{1}{\ln^2 \xi(1+\xi) + \pi^2} s}{1 - 2\frac{\ln \xi(1+\xi)}{\ln^2 \xi(1+\xi) + \pi^2} s + \frac{1}{\ln^2 \xi(1+\xi) + \pi^2} s^2}$$

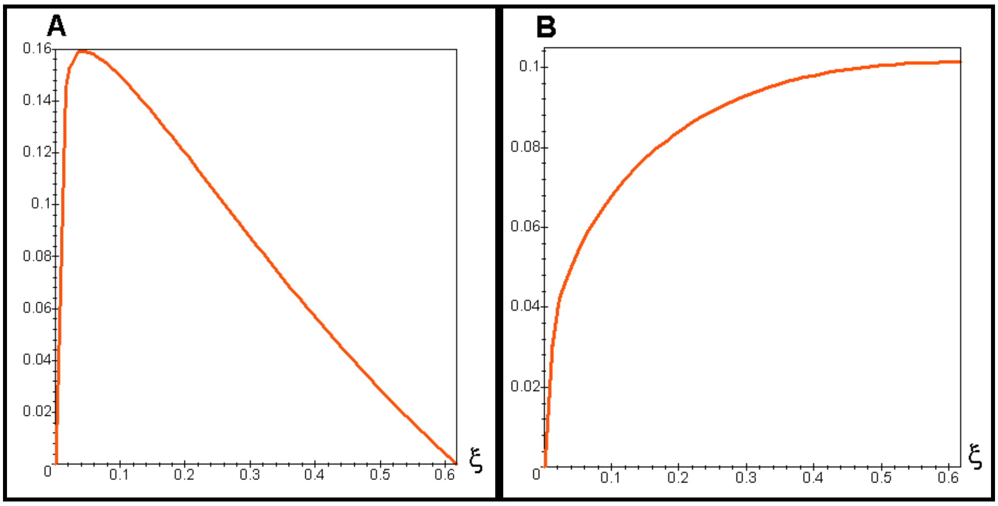
$\Rightarrow$

$$\boxed{G(s) = \frac{A + Bs}{1 + 2As + Bs^2}}$$

Mit:

$$\boxed{A = -\frac{\ln \xi(1+\xi)}{\ln^2 \xi(1+\xi) + \pi^2} \qquad B = \frac{1}{\ln^2 \xi(1+\xi) + \pi^2}}$$

$\Rightarrow$



- Fall 11:

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t)=\delta(t)\leftrightarrow E(s)=1$$

Am Ausgang liegt eine gedämpfte Cosinusfunktion mit $-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)<\xi<-1$:

$$a(t)=(-\xi)^t(-1-\xi)^t\sin\left(\frac{1}{2}\pi[2t+1]\right)=e^{t\ln\xi(1+\xi)}\sin\left(\frac{1}{2}\pi[2t+1]\right)\leftrightarrow A(s)=\frac{s-\ln\xi(1+\xi)}{(s-\ln\xi(1+\xi))^2+\pi^2}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion ”G(s)”:

$$G(s)=\frac{A(s)}{E(s)}$$

$\Rightarrow$

$$G(s)=\frac{-\frac{\ln\xi(1+\xi)}{\ln^2\xi(1+\xi)+\pi^2}+\frac{1}{\ln^2\xi(1+\xi)+\pi^2}s}{1-2\frac{\ln\xi(1+\xi)}{\ln^2\xi(1+\xi)+\pi^2}s+\frac{1}{\ln^2\xi(1+\xi)+\pi^2}s^2}$$

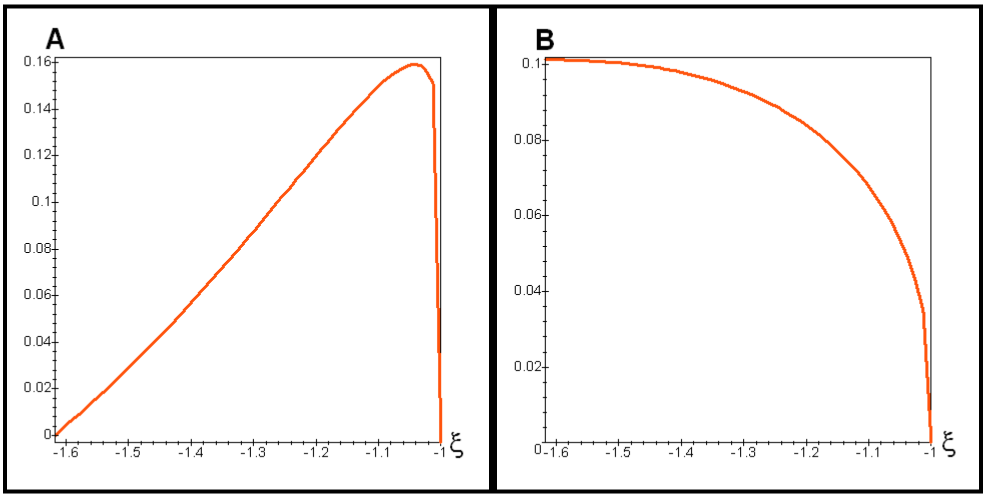
$\Rightarrow$

$$\boxed{G(s)=\frac{A+Bs}{1+2As+Bs^2}}$$

Mit:

$$\boxed{A=-\frac{\ln\xi(1+\xi)}{\ln^2\xi(1+\xi)+\pi^2}\qquad B=\frac{1}{\ln^2\xi(1+\xi)+\pi^2}}$$

$\Rightarrow$



- Fall 12:

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t)=\delta(t)\leftrightarrow E(s)=1$$

Am Ausgang liegt eine gedämpfte Quadratcosinusfunktion mit $-1<\xi<0$:

$$a(t)=(-\xi)^t(1+\xi)^t\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi[2t+1]\right)=e^{t\ln(-\xi)(1+\xi)}\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi[2t+1]\right)$$

$$\leftrightarrow$$

$$A(s)=\frac{(s-\ln(-\xi)(1+\xi))^2+2\pi^2}{(s-\ln(-\xi)(1+\xi))^2+4\pi^2}\cdot\frac{1}{s-\ln(-\xi)(1+\xi)}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion "G(s)":

$$G(s)=\frac{A(s)}{E(s)}$$

$\Rightarrow$

$$G(s)=\frac{\frac{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+2\pi^2}{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+4\pi^2}-2\frac{\ln(-\xi)(1+\xi)}{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+4\pi^2}s+\frac{1}{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+4\pi^2}s^2}{1-2\frac{\ln(-\xi)(1+\xi)}{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+4\pi^2}s+\frac{1}{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+4\pi^2}s^2}\cdot\frac{1}{s-\ln(-\xi)(1+\xi)}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{G(s)=\frac{C+2As+Bs^2}{1+2As+Bs^2}\cdot\frac{1}{s+D}}$$

Mit:

$$\boxed{A=-\frac{\ln(-\xi)(1+\xi)}{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+4\pi^2}\qquad B=\frac{1}{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+4\pi^2}\qquad C=\frac{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+2\pi^2}{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+4\pi^2}\qquad D=-\ln(-\xi)(1+\xi)}$$

$\Rightarrow$