

# Das Interpolationsfilter, eine Idee aus früheren Tagen

Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc.

[www.Zenithpoint.de](http://www.Zenithpoint.de)

Erstellt: 13. November 1995 / 15. September 1997

Letzte Revision: 23. März 2018

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Eine kurze Einleitung</b>	<b>3</b>
1.1	Die Idee des Interpolationsfilters . . . . .	3
1.2	Die Interpolation als mathematischer Begriff . . . . .	4
1.2.1	Allgemeines . . . . .	4
1.2.2	Lineare Interpolation . . . . .	4
1.2.3	Anwendung im vorliegenden Thema . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Die Beschreibung des primären Kalküls</b>	<b>8</b>
2.1	Durchführung der Linearen Interpolation . . . . .	9
2.1.1	Allgemeines . . . . .	9
2.1.2	Anwendung im vorliegenden Thema . . . . .	9
2.1.3	Der Rückführungstyp „ <i>Unsymmetrisch Vorwärts Interpoliert</i> “ . . . . .	10
2.1.4	Der Rückführungstyp „ <i>Unsymmetrisch Rückwärts Interpoliert</i> “ . . . . .	10
2.1.5	Der Rückführungstyp „ <i>Symmetrisch Vorwärts Interpoliert</i> “ . . . . .	10
2.1.6	Der Rückführungstyp „ <i>Symmetrisch Rückwärts Interpoliert</i> “ . . . . .	11
2.2	Die allgemeine Interpolationsgleichung . . . . .	12
2.3	Die typgebundenen Interpolationsgleichungen . . . . .	14
2.3.1	Typ „UVI“ . . . . .	14
2.3.2	Typ „URI“ . . . . .	14
2.3.3	Typ „SVI“ . . . . .	14
2.3.4	Typ „SRI“ . . . . .	14
2.4	Sonderfälle . . . . .	15
2.4.1	Sonderfälle für die Interpolationskonstante . . . . .	15
2.4.2	Sonderfälle für die Filtertypen . . . . .	15
2.4.3	Globaler Lösungsort . . . . .	15
2.4.4	Lokaler Lösungsort . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Die sekundären Berechnungsgrundlagen</b>	<b>17</b>
3.1	Vorbereitende Betrachtungen . . . . .	17
3.2	Die sekundären, typgebundenen Interpolationsgleichungen . . . . .	18
3.3	Die Grundgleichungen . . . . .	19
3.3.1	Typ „UVI“ . . . . .	19
3.3.2	Typ „URI“ . . . . .	19
3.3.3	Typ „SVI“ . . . . .	19
3.3.4	Typ „SRI“ . . . . .	19
3.4	Die Abklinggleichungen . . . . .	20
3.4.1	Typ „UVI“ . . . . .	20
3.4.2	Typ „URI“ . . . . .	20
3.4.3	Typ „SVI“ . . . . .	21
3.4.4	Typ „SRI“ . . . . .	22
3.5	Die Hüllkurvengleichungen . . . . .	23

3.5.1	Typ „SVI“	23
3.5.2	Typ „SRI“	24
<b>4</b>	<b>Die Übertragungsfunktionen</b>	<b>26</b>
4.1	Fall 1	27
4.2	Fall 2	28
4.3	Fall 3	29
4.4	Fall 4	30
4.5	Fall 5	31
4.6	Fall 6	32
4.7	Fall 7	33
4.8	Fall 8	34
4.9	Fall 9	35
4.10	Fall 10	37
4.11	Fall 11	39
4.12	Fall 12	41
<b>5</b>	<b>Der Phasen- und Amplitudengang</b>	<b>43</b>
5.1	Die Übertragungsfunktion $G_I(s)$	44
5.2	Die Übertragungsfunktion $G_{II}(s)$	45
5.3	Fallzusammenfassungen	46
5.3.1	Fall 8 + 9 = Typ „SRI“ und Fall 10 + 11 + 12 = Typ „SVI“	46
5.3.2	Fall 8 + 9 = Typ „SRI“ und Fall 10 + 11 + 12 = Typ „SVI“	48
<b>6</b>	<b>Synthese eines Autokorrelators als Anwendungsmöglichkeit</b>	<b>51</b>
6.1	Beschreibung eines Autokorrelators für weißes Rauschen	51
6.2	Voraussetzungen	52
6.3	Herleitung für eine ungestörte Gleichverteilung	53
6.4	Herleitung für eine gestörte Gleichverteilung	57
6.5	Ergebnis	60
<b>7</b>	<b>Analyse eines Autokorrelators als Anwendungsmöglichkeit</b>	<b>61</b>

---

## Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

## 4 Die Übertragungsfunktionen

[001]

Übertragungsf.

In diesem Abschnitt soll die Übertragungsfunktion  $G(s)$  ermittelt werden. Es wird in den Fällen 1 bis 12 ein Einheitsimpuls am Eingang des Filters erwartet. Die im letzten Abschnitt ermittelten Hüllkurven und Abklinggleichungen sind die Repräsentanten des Ausgangssignales. Damit ist  $G(s)$  definiert.

Folgende Fälle gibt es zwecks Berechnung der Filterübertragungsfunktion.

Für die Ermittlung der Bildfunktionen  $F(s)$  aus den Zeitfunktionen  $f(t)$  wird die Laplace-Transformation genutzt.

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt$$

**4.1 Fall 1**

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t)$$

↔

$$E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt die obere Hüllkurve einer gedämpften Cosinusfunktion an mit  $0 < \xi < 1$ :

$$a(t) = \xi^t$$

↔

$$A(s) = \frac{1}{s - \ln \xi}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

⇒

$$G(s) = \frac{1}{s - \ln \xi}$$

## 4.2 Fall 2

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t)$$

↔

$$E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt die untere Hüllkurve einer gedämpften Cosinusfunktion an mit  $0 < \xi < 1$ :

$$a(t) = -\xi^t$$

↔

$$A(s) = \frac{1}{\ln \xi - s}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

⇒

$$G(s) = \frac{1}{\ln \xi - s}$$

**4.3 Fall 3**

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t)$$

↔

$$E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt die obere Hüllkurve einer gedämpften Cosinusfunktion an mit  $0 < \xi < \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ :

$$a(t) = \xi^t \cdot (1 + \xi)^t$$

↔

$$A(s) = \frac{1}{s - \ln \xi - \ln(1 + \xi)}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

⇒

$$G(s) = \frac{1}{s - \ln \xi (1 + \xi)}$$

**4.4 Fall 4**

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t)$$

$\leftrightarrow$

$$E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt die untere Hüllkurve einer gedämpften Cosinusfunktion an mit  $0 < \xi < \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1)$ :

$$a(t) = -\xi^t \cdot (1 + \xi)^t$$

$\leftrightarrow$

$$A(s) = \frac{1}{\ln \xi + \ln(1 + \xi) - s}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

$\Rightarrow$

$$G(s) = \frac{1}{\ln \xi (1 + \xi) - s}$$

**4.5 Fall 5**

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t)$$

↔

$$E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt die obere Hüllkurve einer gedämpften Cosinusfunktion an mit  $-\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) < \xi < -1$ :

$$a(t) = (-\xi)^t \cdot (-1 - \xi)^t$$

↔

$$A(s) = \frac{1}{\ln \xi + \ln(-1 - \xi) - s}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

⇒

$$G(s) = \frac{1}{\ln(-\xi)(1 + \xi) - s}$$



### 4.6 Fall 6

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t)$$

↔

$$E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt eine Cosinusfunktion an:

$$a(t) = \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2t + 1)\right)$$

↔

$$A(s) = \frac{s}{s^2 + \pi^2}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

⇒

$$G(s) = \frac{s}{\pi^2 + s^2}$$

**4.7 Fall 7**

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t)$$

↔

$$E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt eine Quadratcosinusfunktion an:

$$a(t) = \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2t + 1)\right)$$

↔

$$A(s) = \frac{s^2 + 2\pi^2}{(s^2 + 4\pi^2) \cdot s}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

⇒

$$G(s) = \frac{2\pi^2 + s^2}{4\pi^2 + s^2} \cdot \frac{1}{s}$$

### 4.8 Fall 8

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t)$$

↔

$$E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt eine gedämpfte Cosinusfunktion an mit  $0 < \xi < 1$ :

$$a(t) = \xi^t \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2t + 1)\right) = e^{t \cdot \ln \xi} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2t + 1)\right)$$

↔

$$A(s) = \frac{s - \ln \xi}{(s - \ln \xi)^2 + \pi^2}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

⇒

$$G(s) = \left( -\frac{\ln \xi}{\ln^2 \xi + \pi^2} + \frac{1}{\ln^2 \xi + \pi^2} \cdot s \right) / \left( 1 - 2 \cdot \frac{\ln \xi}{\ln^2 \xi + \pi^2} \cdot s + \frac{1}{\ln^2 \xi + \pi^2} \cdot s^2 \right)$$

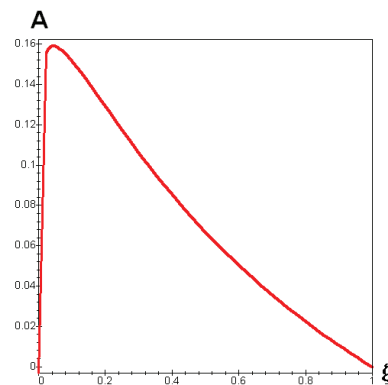
⇒

$$G(s) = \frac{A + B \cdot s}{1 + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2}$$

Mit:

$$A = -\frac{\ln \xi}{\ln^2 \xi + \pi^2}$$

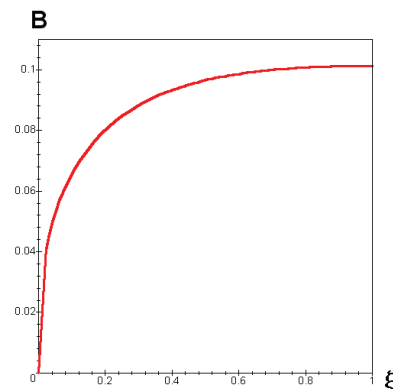
⇒



Und:

$$B = \frac{1}{\ln^2 \xi + \pi^2}$$

⇒



## 4.9 Fall 9

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t)$$

↔

$$E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt eine gedämpfte Quadratcosinusfunktion mit  $-1 < \xi < 0$ :

$$a(t) = (-\xi)^t \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2t + 1)\right) = e^{t \cdot \ln(-\xi)} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2t + 1)\right)$$

↔

$$A(s) = \frac{(s - \ln(-\xi))^2 + 2\pi^2}{(s - \ln(-\xi))^2 + 4\pi^2} \cdot \frac{1}{s - \ln(-\xi)}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

⇒

$$G(s) = \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\ln^2(-\xi) + 2\pi^2}{\ln^2(-\xi) + 4\pi^2} - 2 \cdot \frac{\ln(-\xi)}{\ln^2(-\xi) + 4\pi^2} \cdot s + \frac{1}{\ln^2(-\xi) + 4\pi^2} \cdot s^2 \right) \\ / \\ \left( 1 - 2 \cdot \frac{\ln(-\xi)}{\ln^2(-\xi) + 4\pi^2} \cdot s + \frac{1}{\ln^2(-\xi) + 4\pi^2} \cdot s^2 \right) \\ \cdot \\ \frac{1}{s - \ln(-\xi)} \end{array} \right.$$

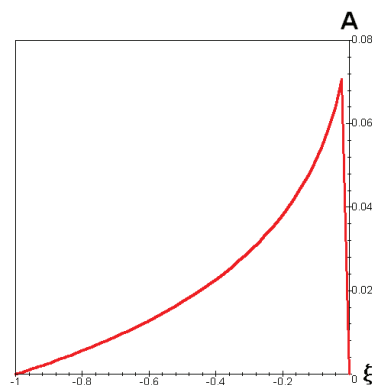
⇒

$$G(s) = \frac{C + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2}{1 + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2} \cdot \frac{1}{s + D}$$

Mit:

$$A = -\frac{\ln(-\xi)}{\ln^2(-\xi) + 4\pi^2}$$

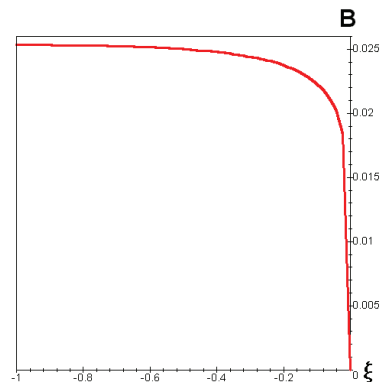
⇒



Und:

$$B = \frac{1}{\ln^2(-\xi) + 4\pi^2}$$

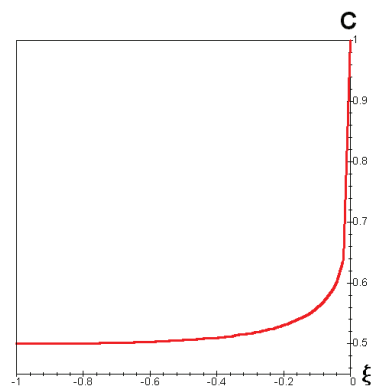
⇒



Und:

$$C = \frac{\ln^2(-\xi) + 2\pi^2}{\ln^2(-\xi) + 4\pi^2}$$

⇒



**4.10 Fall 10**

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t)$$

↔

$$E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt eine gedämpfte Cosinusfunktion mit  $0 < \xi < \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1)$ :

$$a(t) = \xi^t \cdot (1 + \xi)^t \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2t + 1)\right) = e^{t \cdot \ln \xi (1 + \xi)} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2t + 1)\right)$$

↔

$$A(s) = \frac{s - \ln \xi (1 + \xi)}{(s - \ln \xi (1 + \xi))^2 + \pi^2}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

⇒

$$G(s) = \left\{ \begin{array}{l} \left( -\frac{\ln \xi (1 + \xi)}{\ln^2 \xi (1 + \xi) + \pi^2} + \frac{1}{\ln^2 \xi (1 + \xi) + \pi^2} \cdot s \right) \\ / \\ \left( 1 - 2 \cdot \frac{\ln \xi (1 + \xi)}{\ln^2 \xi (1 + \xi) + \pi^2} \cdot s + \frac{1}{\ln^2 \xi (1 + \xi) + \pi^2} \cdot s^2 \right) \end{array} \right.$$

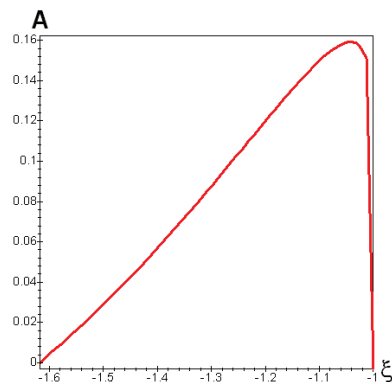
⇒

$$G(s) = \frac{A + B \cdot s}{1 + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2}$$

Mit:

$$A = -\frac{\ln \xi (1 + \xi)}{\ln^2 \xi (1 + \xi) + \pi^2}$$

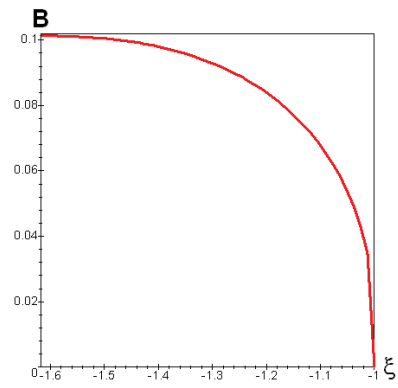
⇒



Und:

$$B = \frac{1}{\ln^2 \xi (1 + \xi) + \pi^2}$$

⇒



## 4.11 Fall 11

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t)$$

↔

$$E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt eine gedämpfte Cosinusfunktion mit  $-\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) < \xi < -1$ :

$$a(t) = (-\xi)^t \cdot (-1 - \xi)^t \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2t + 1)\right) = e^{t \cdot \ln \xi(1+\xi)} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2t + 1)\right)$$

↔

$$A(s) = \frac{s - \ln \xi(1 + \xi)}{(s - \ln \xi(1 + \xi))^2 + \pi^2}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

⇒

$$G(s) = \frac{\left(-\frac{\ln \xi(1+\xi)}{\ln^2 \xi(1+\xi) + \pi^2} + \frac{1}{\ln^2 \xi(1+\xi) + \pi^2} \cdot s\right)}{\left(1 - 2 \cdot \frac{\ln \xi(1+\xi)}{\ln^2 \xi(1+\xi) + \pi^2} \cdot s + \frac{1}{\ln^2 \xi(1+\xi) + \pi^2} \cdot s^2\right)}$$

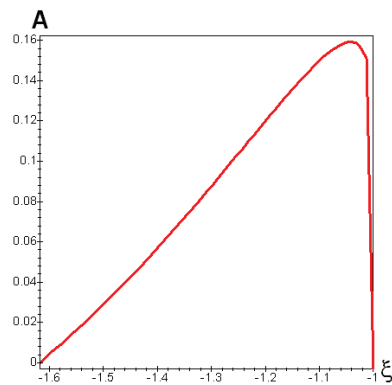
⇒

$$G(s) = \frac{A + B \cdot s}{1 + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2}$$

Mit:

$$A = -\frac{\ln \xi(1 + \xi)}{\ln^2 \xi(1 + \xi) + \pi^2}$$

⇒

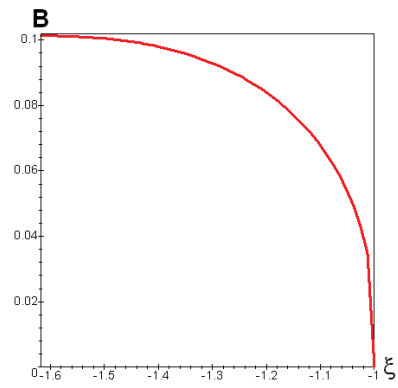




Und:

$$B = \frac{1}{\ln^2 \xi (1 + \xi) + \pi^2}$$

⇒



## 4.12 Fall 12

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t)$$

↔

$$E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt eine gedämpfte Quadratcosinusfunktion mit  $-1 < \xi < 0$ :

$$a(t) = (-\xi)^t \cdot (1 + \xi)^t \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2t + 1)\right) = e^{t \cdot \ln(-\xi)(1+\xi)} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2t + 1)\right)$$

↔

$$A(s) = \frac{(s - \ln(-\xi)(1 + \xi))^2 + 2\pi^2}{(s - \ln(-\xi)(1 + \xi))^2 + 4\pi^2} \cdot \frac{1}{s - \ln(-\xi)(1 + \xi)}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

⇒

$$G(s) = \frac{\left( \frac{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+2\pi^2}{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+4\pi^2} - 2 \cdot \frac{\ln(-\xi)(1+\xi)}{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+4\pi^2} \cdot s + \frac{1}{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+4\pi^2} \cdot s^2 \right)}{\left( 1 - 2 \cdot \frac{\ln(-\xi)(1+\xi)}{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+4\pi^2} \cdot s + \frac{1}{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+4\pi^2} \cdot s^2 \right)} \cdot \frac{1}{s - \ln(-\xi)(1+\xi)}$$

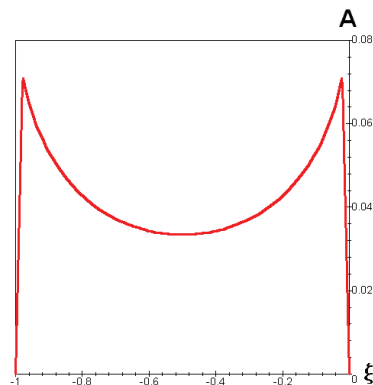
⇒

$$G(s) = \frac{C + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2}{1 + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2} \cdot \frac{1}{s + D}$$

Mit:

$$A = -\frac{\ln(-\xi)(1 + \xi)}{\ln^2(-\xi)(1 + \xi) + 4\pi^2}$$

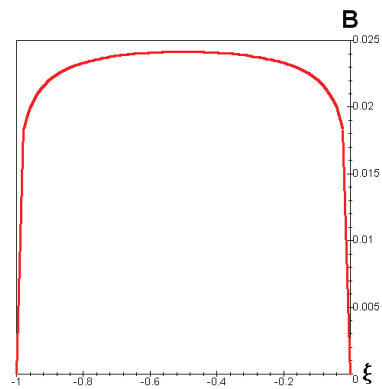
⇒



Und:

$$B = \frac{1}{\ln^2(-\xi)(1+\xi) + 4\pi^2}$$

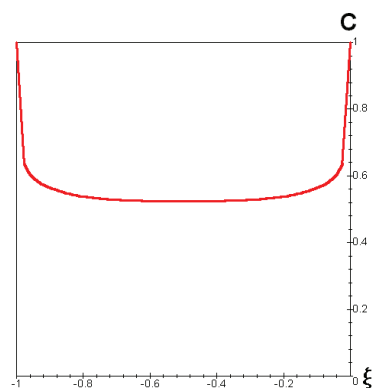
⇒



Und:

$$C = \frac{\ln^2(-\xi)(1+\xi) + 2\pi^2}{\ln^2(-\xi)(1+\xi) + 4\pi^2}$$

⇒



Und:

$$D = -\ln(-\xi)(1+\xi)$$

⇒

