# Das Interpolationsfilter, eine Idee aus früheren Tagen
# Die Übertragungsfunktionen

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 13. November 1995 / 15. September 1997
Letzte Revision: 2. April 2021

## Inhaltsverzeichnis



---

## Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

# 1 Die Übertragungsfunktionen

In diesem Abschnitt soll die Übertragungsfunktion $G(s)$ ermittelt werden. Es wird in den Fällen 1 bis 12 ein Einheitsimpuls am Eingang des Filters erwartet. Die im letzten Abschnitt ermittelten Hüllkurven und Abklinggleichungen sind die Repräsentanten des Ausgangssignales. Damit ist $G(s)$ definiert. [001]ff.

Übertragungsf.

Folgende Fälle gibt es zwecks Berechnung der Filterübertragungsfunktion.

Für die Ermittlung der Bildfunktionen $F(s)$ aus den Zeitfunktionen $f(t)$ wird die Laplace- Transformation genutzt.

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt$$

## 1.1 Fall 1

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t)$$

$\leftrightarrow$

$$E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt die obere Hüllkurve einer gedämpften Cosinusfunktion an mit $0 < \xi < 1$:

$$a(t) = \xi^t$$

$\leftrightarrow$

$$A(s) = \frac{1}{s - \ln \xi}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion $G(s)$:

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

$\Rightarrow$

$$G(s) = \frac{1}{s - \ln \xi}$$

## 1.2 Fall 2

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e\left(t\right)=\delta\left(t\right)$$

$\leftrightarrow$

$$E\left(s\right)=1$$

Am Ausgang liegt die untere Hüllkurve einer gedämpften Cosinusfunktion an mit $0<\xi<1$:

$$a\left(t\right)=-\xi^{t}$$

$\leftrightarrow$

$$A\left(s\right)=\frac{1}{\ln\xi-s}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion $G\left(s\right)$:

$$G\left(s\right)=\frac{A\left(s\right)}{E\left(s\right)}$$

$\Rightarrow$

$$G\left(s\right)=\frac{1}{\ln\xi-s}$$

## 1.3 Fall 3

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t)$$

$\leftrightarrow$

$$E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt die obere Hüllkurve einer gedämpften Cosinusfunktion an mit $0 < \xi < \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$:

$$a(t) = \xi^t \cdot (1 + \xi)^t$$

$\leftrightarrow$

$$A(s) = \frac{1}{s - \ln \xi - \ln(1 + \xi)}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion $G(s)$:

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

$\Rightarrow$

$$G(s) = \frac{1}{s - \ln \xi (1 + \xi)}$$

## 1.4 Fall 4

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t)$$

$\leftrightarrow$

$$E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt die untere Hüllkurve einer gedämpften Cosinusfunktion an mit $0 < \xi < \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$:

$$a(t) = -\xi^t \cdot (1+\xi)^t$$

$\leftrightarrow$

$$A(s) = \frac{1}{\ln\xi + \ln(1+\xi) - s}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion $G(s)$:

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

$\Rightarrow$

$$G(s) = \frac{1}{\ln\xi\,(1+\xi) - s}$$

## 1.5 Fall 5

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e\left(t\right)=\delta\left(t\right)$$

$\leftrightarrow$

$$E\left(s\right)=1$$

Am Ausgang liegt die obere Hüllkurve einer gedämpften Cosinusfunktion an mit $-\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)<\xi<-1$:

$$a\left(t\right)=\left(-\xi\right)\cdot^{t}\left(-1-\xi\right)^{t}$$

$\leftrightarrow$

$$A\left(s\right)=\frac{1}{\ln\xi+\ln\left(-1-\xi\right)-s}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion $G\left(s\right)$:

$$G\left(s\right)=\frac{A\left(s\right)}{E\left(s\right)}$$

$\Rightarrow$

$$G\left(s\right)=\frac{1}{\ln\left(-\xi\right)\left(1+\xi\right)-s}$$

## 1.6 Fall 6

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e\left(t\right) = \delta\left(t\right)$$

$\leftrightarrow$

$$E\left(s\right) = 1$$

Am Ausgang liegt eine Cosinusfunktion an:

$$a\left(t\right) = \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(2t+1\right)\right)$$

$\leftrightarrow$

$$A\left(s\right) = \frac{s}{s^2+\pi^2}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion $G\left(s\right)$:

$$G\left(s\right) = \frac{A\left(s\right)}{E\left(s\right)}$$

$\Rightarrow$

$$G\left(s\right) = \frac{s}{\pi^2+s^2}$$

## 1.7 Fall 7

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e\left(t\right) = \delta\left(t\right)$$

$\leftrightarrow$

$$E\left(s\right) = 1$$

Am Ausgang liegt eine Quadratcosinusfunktion an:

$$a\left(t\right) = \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2t+1)\right)$$

$\leftrightarrow$

$$A\left(s\right) = \frac{s^2 + 2\pi^2}{\left(s^2 + 4\pi^2\right) \cdot s}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion $G\left(s\right)$:

$$G\left(s\right) = \frac{A\left(s\right)}{E\left(s\right)}$$

$\Rightarrow$

$$G\left(s\right) = \frac{2\pi^2 + s^2}{4\pi^2 + s^2} \cdot \frac{1}{s}$$

## 1.8 Fall 8

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t)$$

$\leftrightarrow$

$$E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt eine gedämpfte Cosinusfunktion an mit $0 < \xi < 1$:

$$a(t) = \xi^t \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2t+1)\right) = e^{t \cdot \ln \xi} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2t+1)\right)$$

$\leftrightarrow$

$$A(s) = \frac{s - \ln \xi}{(s - \ln \xi)^2 + \pi^2}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion $G(s)$:

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

$\Rightarrow$

$$G(s) = \left(-\frac{\ln \xi}{\ln^2 \xi + \pi^2} + \frac{1}{\ln^2 \xi + \pi^2} \cdot s\right) / \left(1 - 2 \cdot \frac{\ln \xi}{\ln^2 \xi + \pi^2} \cdot s + \frac{1}{\ln^2 \xi + \pi^2} \cdot s^2\right)$$

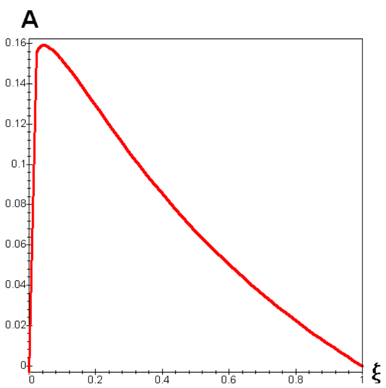
$\Rightarrow$

$$G(s) = \frac{A + B \cdot s}{1 + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2}$$

Mit:

$$A = -\frac{\ln \xi}{\ln^2 \xi + \pi^2}$$

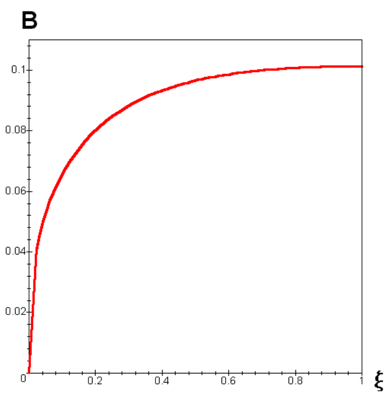
$\Rightarrow$




Und:

$$B = \frac{1}{\ln^2 \xi + \pi^2}$$

$\Rightarrow$



## 1.9 Fall 9

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t)$$

$\leftrightarrow$

$$E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt eine gedämpfte Quadratcosinusfunktion mit $-1 < \xi < 0$:

$$a(t) = (-\xi)^t \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2t+1)\right) = e^{t \cdot \ln(-\xi)} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2t+1)\right)$$

$\leftrightarrow$

$$A(s) = \frac{(s - \ln(-\xi))^2 + 2\pi^2}{(s - \ln(-\xi))^2 + 4\pi^2} \cdot \frac{1}{s - \ln(-\xi)}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion $G(s)$:

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

$\Rightarrow$

$$G(s) = \begin{cases} \left(\frac{\ln^2(-\xi)+2\pi^2}{\ln^2(-\xi)+4\pi^2} - 2 \cdot \frac{\ln(-\xi)}{\ln^2(-\xi)+4\pi^2} \cdot s + \frac{1}{\ln^2(-\xi)+4\pi^2} \cdot s^2\right) \\ / \\ \left(1 - 2 \cdot \frac{\ln(-\xi)}{\ln^2(-\xi)+4\pi^2} \cdot s + \frac{1}{\ln^2(-\xi)+4\pi^2} \cdot s^2\right) \\ \cdot \\ \frac{1}{s-\ln(-\xi)} \end{cases}$$

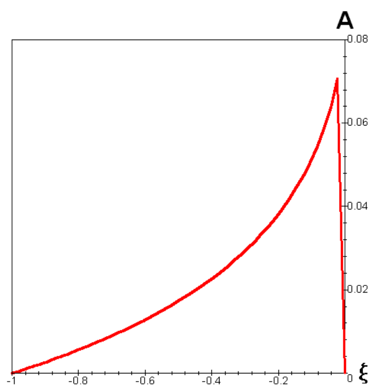
$\Rightarrow$

$$G(s) = \frac{C + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2}{1 + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2} \cdot \frac{1}{s + D}$$

Mit:

$$A = -\frac{\ln(-\xi)}{\ln^2(-\xi) + 4\pi^2}$$

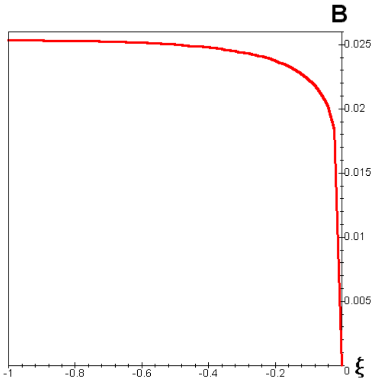
$\Rightarrow$



Und:

$$B = \frac{1}{\ln^2(-\xi) + 4\pi^2}$$

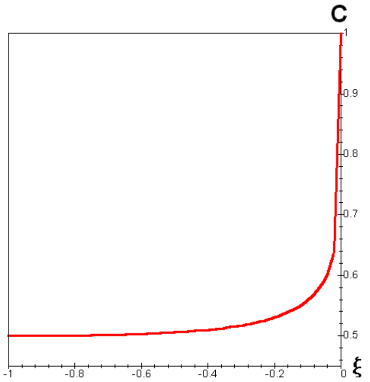
$\Rightarrow$




Und:

$$C = \frac{\ln^2(-\xi) + 2\pi^2}{\ln^2(-\xi) + 4\pi^2}$$

$\Rightarrow$



## 1.10 Fall 10

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e\left(t\right)=\delta\left(t\right)$$

$\leftrightarrow$

$$E\left(s\right)=1$$

Am Ausgang liegt eine gedämpfte Cosinusfunktion mit $0<\xi<\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$:

$$a\left(t\right)=\xi^{t}\cdot\left(1+\xi\right)^{t}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(2t+1\right)\right)=e^{t\cdot\ln\xi\left(1+\xi\right)}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(2t+1\right)\right)$$

$\leftrightarrow$

$$A\left(s\right)=\frac{s-\ln\xi\left(1+\xi\right)}{\left(s-\ln\xi\left(1+\xi\right)\right)^{2}+\pi^{2}}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion $G\left(s\right)$:

$$G\left(s\right)=\frac{A\left(s\right)}{E\left(s\right)}$$

$\Rightarrow$

$$G\left(s\right)=\begin{cases}\left(-\frac{\ln\xi(1+\xi)}{\ln^{2}\xi(1+\xi)+\pi^{2}}+\frac{1}{\ln^{2}\xi(1+\xi)+\pi^{2}}\cdot s\right)\\ /\\ \left(1-2\cdot\frac{\ln\xi(1+\xi)}{\ln^{2}\xi(1+\xi)+\pi^{2}}\cdot s+\frac{1}{\ln^{2}\xi(1+\xi)+\pi^{2}}\cdot s^{2}\right)\end{cases}$$

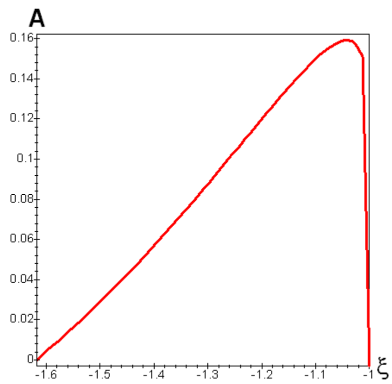
$\Rightarrow$

$$G\left(s\right)=\frac{A+B\cdot s}{1+2\cdot A\cdot s+B\cdot s^{2}}$$

Mit:

$$A=-\frac{\ln\xi\left(1+\xi\right)}{\ln^{2}\xi\left(1+\xi\right)+\pi^{2}}$$

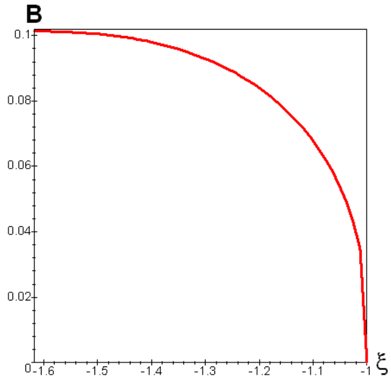
$\Rightarrow$



Und:

$$B = \frac{1}{\ln^2 \xi \,(1+\xi) + \pi^2}$$

$\Rightarrow$



## 1.11 Fall 11

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t)$$

$\leftrightarrow$

$$E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt eine gedämpfte Cosinusfunktion mit $-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) < \xi < -1$:

$$a(t) = (-\xi)^t \cdot (-1-\xi)^t \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2t+1)\right) = e^{t \cdot \ln \xi(1+\xi)} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2t+1)\right)$$

$\leftrightarrow$

$$A(s) = \frac{s - \ln \xi (1+\xi)}{(s - \ln \xi (1+\xi))^2 + \pi^2}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion $G(s)$:

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

$\Rightarrow$

$$G(s) = \begin{cases} \left(-\frac{\ln \xi(1+\xi)}{\ln^2 \xi(1+\xi)+\pi^2} + \frac{1}{\ln^2 \xi(1+\xi)+\pi^2} \cdot s\right) \\ / \\ \left(1 - 2 \cdot \frac{\ln \xi(1+\xi)}{\ln^2 \xi(1+\xi)+\pi^2} \cdot s + \frac{1}{\ln^2 \xi(1+\xi)+\pi^2} \cdot s^2\right) \end{cases}$$

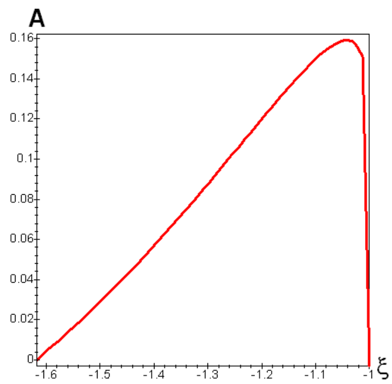
$\Rightarrow$

$$G(s) = \frac{A + B \cdot s}{1 + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2}$$

Mit:

$$A = -\frac{\ln \xi (1+\xi)}{\ln^2 \xi (1+\xi) + \pi^2}$$

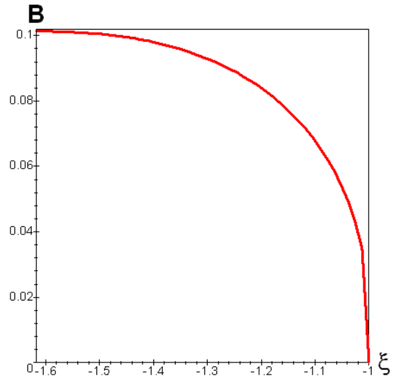
$\Rightarrow$



Und:

$$B = \frac{1}{\ln^2 \xi \,(1+\xi) + \pi^2}$$

$\Rightarrow$



## 1.12 Fall 12

Am Eingang liegt ein Einheitsimpuls an:

$$e(t) = \delta(t)$$

$\leftrightarrow$

$$E(s) = 1$$

Am Ausgang liegt eine gedämpfte Quadratcosinusfunktion mit $-1 < \xi < 0$:

$$a(t) = (-\xi)^t \cdot (1+\xi)^t \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2t+1)\right) = e^{t \cdot \ln(-\xi)(1+\xi)} \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot (2t+1)\right)$$

$\leftrightarrow$

$$A(s) = \frac{(s - \ln(-\xi)(1+\xi))^2 + 2\pi^2}{(s - \ln(-\xi)(1+\xi))^2 + 4\pi^2} \cdot \frac{1}{s - \ln(-\xi)(1+\xi)}$$

Damit ergibt sich eine Übertragungsfunktion $G(s)$:

$$G(s) = \frac{A(s)}{E(s)}$$

$\Rightarrow$

$$G(s) = \begin{cases} \left(\frac{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+2\pi^2}{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+4\pi^2} - 2 \cdot \frac{\ln(-\xi)(1+\xi)}{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+4\pi^2} \cdot s + \frac{1}{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+4\pi^2} \cdot s^2\right) \\ / \\ \left(1 - 2 \cdot \frac{\ln(-\xi)(1+\xi)}{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+4\pi^2} \cdot s + \frac{1}{\ln^2(-\xi)(1+\xi)+4\pi^2} \cdot s^2\right) \\ \cdot \\ \frac{1}{s - \ln(-\xi)(1+\xi)} \end{cases}$$

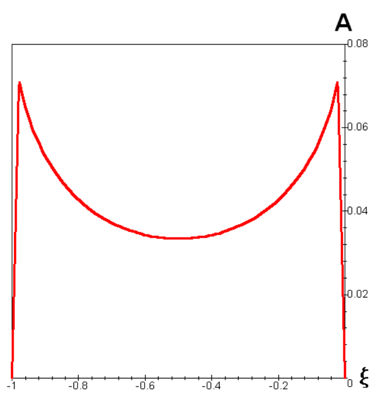
$\Rightarrow$

$$G(s) = \frac{C + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2}{1 + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2} \cdot \frac{1}{s + D}$$

Mit:

$$A = -\frac{\ln(-\xi)(1+\xi)}{\ln^2(-\xi)(1+\xi) + 4\pi^2}$$

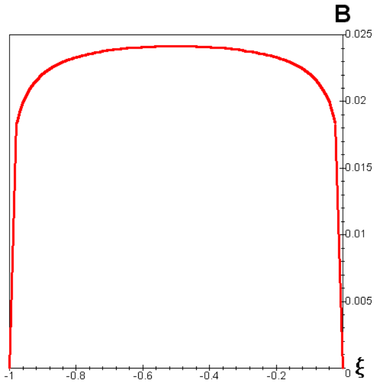
$\Rightarrow$



Und:

$$B = \frac{1}{\ln^2(-\xi)(1+\xi) + 4\pi^2}$$

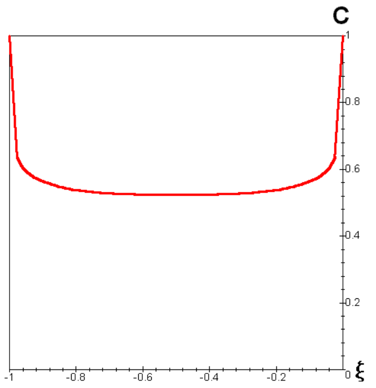
$\Rightarrow$




Und:

$$C = \frac{\ln^2(-\xi)(1+\xi) + 2\pi^2}{\ln^2(-\xi)(1+\xi) + 4\pi^2}$$

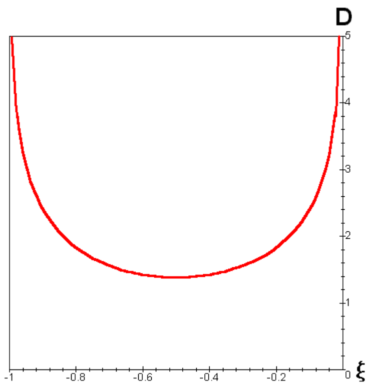
$\Rightarrow$




Und:

$$D = -\ln(-\xi)(1+\xi)$$

$\Rightarrow$



$\LaTeX\,2_\varepsilon$