

Das Interpolationsfilter, eine Idee aus früheren Tagen

Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 13. November 1995 / 15. September 1997

Letzte Revision: 23. März 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Eine kurze Einleitung	3
1.1	Die Idee des Interpolationsfilters	3
1.2	Die Interpolation als mathematischer Begriff	4
1.2.1	Allgemeines	4
1.2.2	Lineare Interpolation	4
1.2.3	Anwendung im vorliegenden Thema	6
2	Die Beschreibung des primären Kalküls	8
2.1	Durchführung der Linearen Interpolation	9
2.1.1	Allgemeines	9
2.1.2	Anwendung im vorliegenden Thema	9
2.1.3	Der Rückführungstyp „ <i>Unsymmetrisch Vorwärts Interpoliert</i> “	10
2.1.4	Der Rückführungstyp „ <i>Unsymmetrisch Rückwärts Interpoliert</i> “	10
2.1.5	Der Rückführungstyp „ <i>Symmetrisch Vorwärts Interpoliert</i> “	10
2.1.6	Der Rückführungstyp „ <i>Symmetrisch Rückwärts Interpoliert</i> “	11
2.2	Die allgemeine Interpolationsgleichung	12
2.3	Die typgebundenen Interpolationsgleichungen	14
2.3.1	Typ „UVI“	14
2.3.2	Typ „URI“	14
2.3.3	Typ „SVI“	14
2.3.4	Typ „SRI“	14
2.4	Sonderfälle	15
2.4.1	Sonderfälle für die Interpolationskonstante	15
2.4.2	Sonderfälle für die Filtertypen	15
2.4.3	Globaler Lösungsort	15
2.4.4	Lokaler Lösungsort	16
3	Die sekundären Berechnungsgrundlagen	17
3.1	Vorbereitende Betrachtungen	17
3.2	Die sekundären, typgebundenen Interpolationsgleichungen	18
3.3	Die Grundgleichungen	19
3.3.1	Typ „UVI“	19
3.3.2	Typ „URI“	19
3.3.3	Typ „SVI“	19
3.3.4	Typ „SRI“	19
3.4	Die Abklinggleichungen	20
3.4.1	Typ „UVI“	20
3.4.2	Typ „URI“	20
3.4.3	Typ „SVI“	21
3.4.4	Typ „SRI“	22
3.5	Die Hüllkurvengleichungen	23

3.5.1	Typ „SVI“	23
3.5.2	Typ „SRI“	24
4	Die Übertragungsfunktionen	26
4.1	Fall 1	27
4.2	Fall 2	28
4.3	Fall 3	29
4.4	Fall 4	30
4.5	Fall 5	31
4.6	Fall 6	32
4.7	Fall 7	33
4.8	Fall 8	34
4.9	Fall 9	35
4.10	Fall 10	37
4.11	Fall 11	39
4.12	Fall 12	41
5	Der Phasen- und Amplitudengang	43
5.1	Die Übertragungsfunktion $G_I(s)$	44
5.2	Die Übertragungsfunktion $G_{II}(s)$	45
5.3	Fallzusammenfassungen	46
5.3.1	Fall 8 + 9 = Typ „SRI“ und Fall 10 + 11 + 12 = Typ „SVI“	46
5.3.2	Fall 8 + 9 = Typ „SRI“ und Fall 10 + 11 + 12 = Typ „SVI“	48
6	Synthese eines Autokorrelators als Anwendungsmöglichkeit	51
6.1	Beschreibung eines Autokorrelators für weißes Rauschen	51
6.2	Voraussetzungen	52
6.3	Herleitung für eine ungestörte Gleichverteilung	53
6.4	Herleitung für eine gestörte Gleichverteilung	57
6.5	Ergebnis	60
7	Analyse eines Autokorrelators als Anwendungsmöglichkeit	61

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

5 Der Phasen- und Amplitudengang

Im vorangegangenen Kapitel wurden die Übertragungsfunktionen ermittelt bei einem Einheitsimpuls am Eingang und verschiedenen Ausgangssignalszenarien. Insgesamt wurden zwei Übertragungsfunktionen als global nutzbar extrahiert. 001
Phase / Amplitude

$$G_I(s) = \frac{A + B \cdot s}{1 + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2} \quad \text{und} \quad G_{II}(s) = \frac{C + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2}{1 + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2} \cdot \frac{1}{s + D}$$

Diese werden im folgenden Abschnitt in die komplexe Ebene transformiert und nach dem allgemein gültigen Vorgehen daraus der Amplituden- und Phasengang ermittelt.

5.1 Die Übertragungsfunktion $G_I(s)$

Ü.funktion I

Gegeben ist die Übertragungsfunktion $G_I(s)$:

$$G_I(s) = \frac{A + B \cdot s}{1 + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2}$$

⇒

$$|G_1(j\omega)| = \frac{\sqrt{(1 - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2}}{(1 - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2}$$

↔

$$\angle G_1(j\omega) = -\arctan \frac{2 \cdot A \cdot \omega}{1 - B \cdot \omega^2}$$

Und:

$$|G_2(j\omega)| = \sqrt{A^2 + B^2 \cdot \omega^2}$$

↔

$$\angle G_2(j\omega) = \arctan \frac{B}{A} \omega$$

Der Betrag und die Phase werden zusammengesetzt:

$$|G_I(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)|$$

⇒

$$|G_I(j\omega)| = \frac{\sqrt{(1 - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2}}{(1 - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 \cdot \omega^2}$$

Damit ergibt sich für den Betrag endgültig:

$$|G_I(j\omega)| = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 \cdot \omega^2}{(1 - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2}}$$

Weiterhin:

$$\angle G_I(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega)$$

⇒

$$\angle G_I(j\omega) = \arctan \frac{B}{A} \omega - \arctan \frac{2 \cdot A \cdot \omega}{1 - B \cdot \omega^2}$$

⇒

$$\angle G_I(j\omega) = \arctan \frac{\frac{B}{A} \cdot \omega - \frac{2 \cdot A \cdot \omega}{1 - B \cdot \omega^2}}{1 + \frac{B}{A} \cdot \omega \frac{2 \cdot A \cdot \omega}{1 - B \cdot \omega^2}}$$

⇒

$$\angle G_I(j\omega) = \arctan \frac{B \cdot (1 - B \cdot \omega^2) - 2 \cdot A^2}{A \cdot (1 + B \cdot \omega^2)} \cdot \omega$$

5.2 Die Übertragungsfunktion $G_{II}(s)$

Gegeben ist die Übertragungsfunktion $G_{II}(s)$:

Ü.funktion II

$$G_{II}(s) = \frac{C + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2}{1 + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2} \cdot \frac{1}{s + D}$$

⇒

$$|G_1(j\omega)| = \frac{\sqrt{(1 - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2}}{(1 - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2}$$

↔

$$\angle G_1(j\omega) = -\arctan \frac{2 \cdot A \cdot \omega}{1 - B \cdot \omega^2}$$

Und:

$$|G_3(j\omega)| = \sqrt{(C - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2}$$

↔

$$\angle G_3(j\omega) = \arctan \frac{2 \cdot A \cdot \omega}{C - B \cdot \omega^2}$$

Und:

$$|G_4(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{D^2 + \omega^2}}$$

↔

$$\angle G_4(j\omega) = -\arctan \frac{\omega}{D}$$

Der Betrag und die Phase werden zusammengesetzt:

$$|G_{II}(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_3(j\omega)| \cdot |G_4(j\omega)|$$

⇒

$$|G_{II}(j\omega)| = \frac{\sqrt{(1 - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2}}{(1 - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2} \cdot \sqrt{(C - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{D^2 + \omega^2}}$$

Damit ergibt sich für den Betrag endgültig:

$$|G_{II}(j\omega)| = \sqrt{\frac{(C - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2}{(1 - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{D^2 + \omega^2}}$$

Weiterhin:

$$\angle G_{II}(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_3(j\omega) + \angle G_4(j\omega)$$

⇒

$$\angle G_{II}(j\omega) = \arctan \frac{2 \cdot A \cdot \omega}{C - B \cdot \omega^2} - \arctan \frac{2 \cdot A \cdot \omega}{1 - B \cdot \omega^2} - \arctan \frac{\omega}{D}$$

⇒

$$\angle G_{II}(j\omega) = \arctan \frac{2 \cdot A \cdot \omega \cdot (1 - C)}{(C - B \cdot \omega^2) \cdot (1 - B \cdot \omega^2) + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2} - \arctan \frac{\omega}{D}$$

⇒

$$\angle G_{II}(j\omega) = \arctan \frac{2 \cdot A \cdot D \cdot \omega \cdot (1 - C) - (C - B \cdot \omega^2) \cdot (1 - B \cdot \omega^2) \cdot \omega - 4 \cdot A^2 \cdot \omega^3}{2 \cdot A \cdot \omega^2 \cdot (1 - C) + (C - B \cdot \omega^2) \cdot (1 - B \cdot \omega^2) \cdot D + 4 \cdot A^2 \cdot D \cdot \omega^2}$$

Im weiteren Verlauf werden der ermittelte Phasen- und Amplitudengang von $G_I(s)$ und $G_{II}(s)$ auf die betrachteten Typen „SVI“ und „SRI“ wieder aufgeteilt und weiter betrachtet.

5.3 Fallzusammenfassungen

Fallzusammenf.

5.3.1 Fall 8 + 9 = Typ „SRI“ und Fall 10 + 11 + 12 = Typ „SVI“

Es liegt demnach ein Bandpass vor. Dessen Mittenfrequenz ist berechenbar durch das Maximum von $|G_{Fall8}(j\omega)|$:

$$|G_I(j\omega)| = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 \cdot \omega^2}{(1 - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2}} \rightarrow \infty$$

⇒

$$(1 - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2 \rightarrow 0$$

⇒

$$B^2 \cdot \omega^4 - 2 \cdot B \cdot \omega^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2 - 1 \rightarrow 0$$

⇒

$$\omega^4 - 2 \cdot \omega^2 \cdot \frac{B - 2 \cdot A^2}{B^2} - \frac{1}{B^2} \rightarrow 0$$

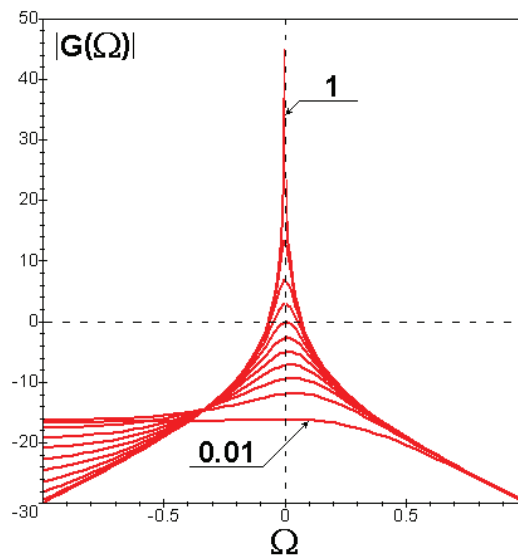
⇒ $f'(x)$

$$\omega^2 - \frac{B - 2 \cdot A^2}{B^2} = 0$$

⇒

$$\omega_{MAX} = \frac{1}{B} \cdot \sqrt{B - 2 \cdot A^2}$$

Grafisch dargestellt in Abhängigkeit von $0.01 \leq \xi \leq 1$:



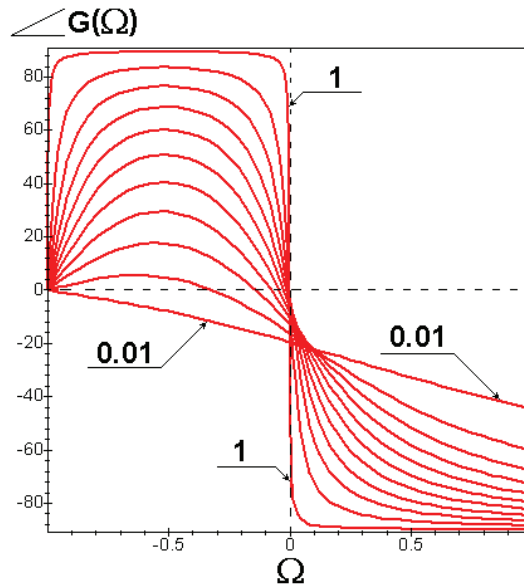
Mit:

$$\omega = \pi \cdot 10^\Omega \quad \leftrightarrow \quad \Omega = \lg \frac{\omega}{\pi}$$

⇒

$$\omega_{MIN} = \frac{1}{10} \cdot \pi \quad \omega_0 = \pi \quad \omega_{MAX} = 10 \cdot \pi$$

Die Phase besitzt folgendes grafisches Ergebnis in Abhängigkeit von ξ :



Mit:

$$\omega = \pi \cdot (\Omega + 1) \quad \Leftrightarrow \quad \Omega = \frac{\omega - \pi}{\pi}$$

Die dazugehörige Durchtrittsfrequenz ω_D :

$$\angle G_I(j\omega) = 0^\circ$$

\Rightarrow

$$\arctan \frac{B \cdot (1 - B \cdot \omega^2) - 2 \cdot A^2}{A \cdot (1 + B \cdot \omega^2)} \cdot \omega = 0$$

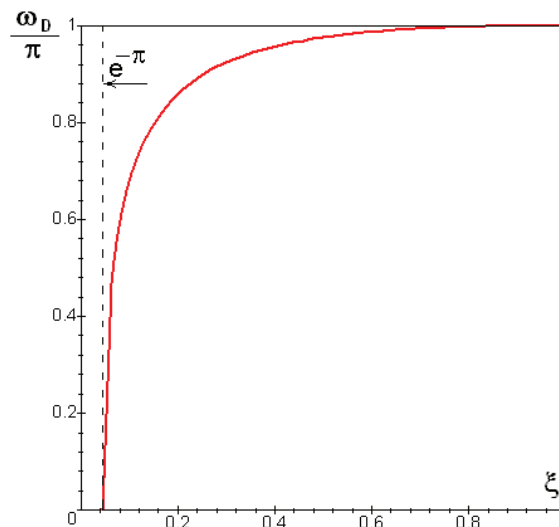
\Rightarrow

$$B \cdot (1 - B \cdot \omega^2) - 2 \cdot A^2 = 0$$

\Rightarrow

$$\omega_D = \frac{1}{B} \cdot \sqrt{B - 2 \cdot A^2}$$

Grafisch:



Der Wert der Durchtrittsfrequenz ist gleich des Ortes des Betragsmaximums.

5.3.2 Fall 8 + 9 = Typ „SRI“ und Fall 10 + 11 + 12 = Typ „SVI“

Die Betragsextrema sind berechenbar über:

$$|G_{II}(j\omega)| = \sqrt{\frac{(C - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2}{(1 - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{D^2 + \omega^2}}$$

⇒

$$(C - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2 \rightarrow 0$$

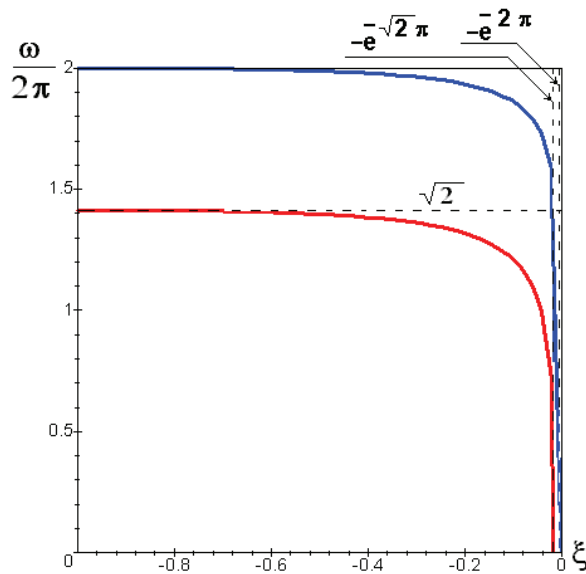
$$(1 - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2 \rightarrow 0$$

$$\sqrt{D^2 + \omega^2} \rightarrow 0$$

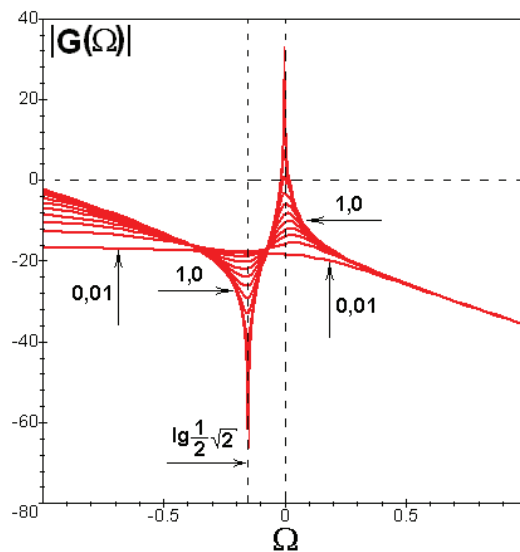
⇒

$$\omega_{MAX_1} = \frac{1}{B} \cdot \sqrt{B \cdot C - 2 \cdot A^2} \qquad \omega_{MAX_2} = \frac{1}{B} \cdot \sqrt{B - 2 \cdot A^2}$$

⇒



Der Betrag selbst, grafisch dargestellt in Abhängigkeit von $-0.9 \leq \xi \leq -0.01$ sowie $-1 \leq \xi \leq -0.9$:



Mit:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot 10^\Omega \quad \leftrightarrow \quad \Omega = \lg \frac{\omega}{2\pi}$$

⇒

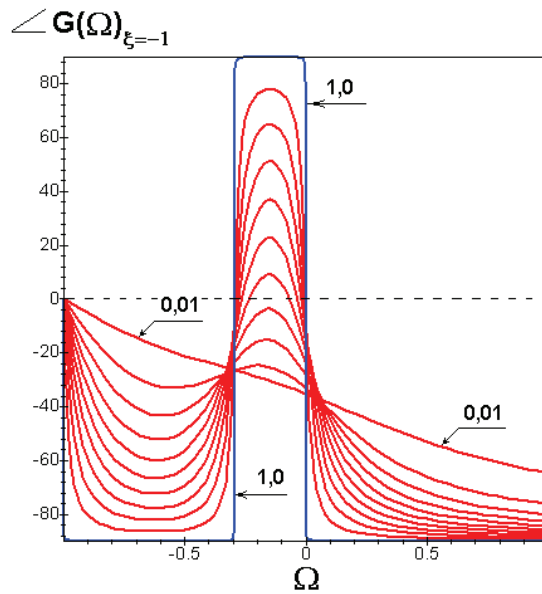
$$\omega_{MIN} = \frac{1}{5} \cdot \pi \quad \omega_1 = \sqrt{2} \cdot \pi \quad \omega_0 = 2 \cdot \pi \quad \omega_{MAX} = 20 \cdot \pi$$

Es liegt global ein Tiefpass vor, kombiniert mit einem Bandpass bei „ $2 \cdot \pi$ “ und einer Bandsperre bei „ $\sqrt{2} \cdot \pi$ “.

Weiterhin gilt für die Phase:

$$\angle G_{II}(j\omega) = \arctan \frac{2 \cdot A \cdot D \cdot \omega \cdot (1 - C) - (C - B \cdot \omega^2) \cdot (1 - B \cdot \omega^2) \cdot \omega - 4 \cdot A^2 \cdot \omega^3}{2 \cdot A \cdot \omega^2 \cdot (1 - C) + (C - B \cdot \omega^2) \cdot (1 - B \cdot \omega^2) \cdot D + 4 \cdot A^2 \cdot D \cdot \omega^2}$$

⇒



Mit:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot (\Omega + 1) \quad \leftrightarrow \quad \Omega = \frac{\omega - 2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi}$$

Die dazugehörige Durchtrittsfrequenz ω_D :

$$\angle G_{II}(j\omega) = 0^\circ$$

⇒

$$2 \cdot A \cdot D \cdot (1 - C) - (C - B \cdot \omega^2) \cdot (1 - B \cdot \omega^2) - 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2 = 0$$

⇒

$$\omega^4 - \omega^2 \cdot \frac{(C + 1) \cdot B - 4 \cdot A^2}{B^2} - \frac{2 \cdot A \cdot D \cdot (1 - C) - C}{B^2} = 0$$

Kurzzeitige Substitution:

$$\Omega^2 - \Omega \cdot \frac{(C + 1) \cdot B - 4 \cdot A^2}{B^2} - \frac{2 \cdot A \cdot D \cdot (1 - C) - C}{B^2} = 0$$

⇒

$$\Omega_{1;2} = \frac{(C + 1) \cdot B - 4 \cdot A^2}{2 \cdot B^2} \pm \frac{1}{2 \cdot B^2} \cdot \sqrt{\left\{ \begin{array}{l} ((C + 1) \cdot B - 4 \cdot A^2)^2 \\ + \\ 4 \cdot B^2 \cdot (2 \cdot A \cdot D \cdot (1 - C) - C) \end{array} \right.}}$$

Resubstitution:

$$\omega_{1;2} = \frac{1}{2B} \sqrt{2(C + 1)B - 8A^2 \pm 2\sqrt{((C + 1)B - 4A^2)^2 + 4B^2(2AD(1 - C) - C)}}$$

⇒

$$\omega_{D;1} = \frac{1}{2 \cdot B} \cdot \sqrt{\begin{cases} 2 \cdot B \cdot (C + 1) \\ - \\ 8 \cdot A^2 \\ + \\ 2 \cdot \sqrt{(B \cdot (C + 1) - 4 \cdot A^2)^2 + 4 \cdot B^2 \cdot (2 \cdot A \cdot D \cdot (1 - C) - C)} \end{cases}}$$

Und:

$$\omega_{D;2} = \frac{1}{2 \cdot B} \cdot \sqrt{\begin{cases} 2 \cdot B \cdot (C + 1) \\ - \\ 8 \cdot A^2 \\ - \\ 2 \cdot \sqrt{(B \cdot (C + 1) - 4 \cdot A^2)^2 + 4 \cdot B^2 \cdot (2 \cdot A \cdot D \cdot (1 - C) - C)} \end{cases}}$$

Grafisch:

