Das Interpolationsfilter, eine Idee aus früheren Tagen
Der Phasen- und Amplitudengang

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 13. November 1995 / 15. September 1997

Letzte Revision: 2. April 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Der Phasen- und Amplitudengang **3**

1.1 Die Übertragungsfunktion $G_I(s)$ 4

1.2 Die Übertragungsfunktion $G_{II}(s)$ 5

1.3 Fallzusammenfassungen 6

1.3.1 Fall 8 + 9 = Typ „SRI“ und Fall 10 + 11 + 12 = Typ „SVI“ 6

1.3.2 Fall 8 + 9 = Typ „SRI“ und Fall 10 + 11 + 12 = Typ „SVI“ 8

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Der Phasen- und Amplitudengang

Im vorangegangenen Kapitel wurden die Übertragungsfunktionen ermittelt bei einem Einheitsimpuls am Eingang und verschiedenen Ausgangssignalszenarien. Insgesamt wurden zwei Übertragungsfunktionen als global nutzbar extrahiert. [001]ff.

Phase / Amplitude

$$G_I\left(s\right) = \frac{A + B \cdot s}{1 + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2} \qquad \text{und} \qquad G_{II}\left(s\right) = \frac{C + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2}{1 + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2} \cdot \frac{1}{s + D}$$

Diese werden im folgenden Abschnitt in die komplexe Ebene transformiert und nach dem allgemein gültigen Vorangehen daraus der Amplituden- und Phasengang ermittelt.

1.1 Die Übertragungsfunktion $G_I(s)$

Ü.funktion I

Gegeben ist die Übertragungsfunktion $G_I(s)$:

$$G_I(s) = \frac{A + B \cdot s}{1 + 2 \cdot A \cdot s + B \cdot s^2}$$

$\Rightarrow$

$$|G_1(j\omega)| = \frac{\sqrt{(1 - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2}}{(1 - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2}$$

$\leftrightarrow$

$$\angle G_1(j\omega) = -\arctan \frac{2 \cdot A \cdot \omega}{1 - B \cdot \omega^2}$$

Und:

$$|G_2(j\omega)| = \sqrt{A^2 + B^2 \cdot \omega^2}$$

$\leftrightarrow$

$$\angle G_2(j\omega) = \arctan \frac{B}{A}\omega$$

Der Betrag und die Phase werden zusammengesetzt:

$$|G_I(j\omega)| = |G_1(j\omega)| \cdot |G_2(j\omega)|$$

$\Rightarrow$

$$|G_I(j\omega)| = \frac{\sqrt{(1 - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2}}{(1 - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 \cdot \omega^2}$$

Damit ergibt sich für den Betrag endgültig:

$$|G_I(j\omega)| = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 \cdot \omega^2}{(1 - B \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2}}$$

Weiterhin:

$$\angle G_I(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega)$$

$\Rightarrow$

$$\angle G_I(j\omega) = \arctan \frac{B}{A}\omega - \arctan \frac{2 \cdot A \cdot \omega}{1 - B \cdot \omega^2}$$

$\Rightarrow$

$$\angle G_I(j\omega) = \arctan \frac{\frac{B}{A} \cdot \omega - \frac{2 \cdot A \cdot \omega}{1 - B \cdot \omega^2}}{1 + \frac{B}{A} \cdot \omega \frac{2 \cdot A \cdot \omega}{1 - B \cdot \omega^2}}$$

$\Rightarrow$

$$\angle G_I(j\omega) = \arctan \frac{B \cdot \left(1 - B \cdot \omega^2\right) - 2 \cdot A^2}{A \cdot (1 + B \cdot \omega^2)} \cdot \omega$$

1.2 Die Übertragungsfunktion $G_{II}(s)$

Gegeben ist die Übertragungsfunktion $G_{II}(s)$: Ü.funktion II

$$G_{II}(s) = \frac{C + 2\cdot A\cdot s + B\cdot s^2}{1 + 2\cdot A\cdot s + B\cdot s^2}\cdot\frac{1}{s+D}$$

$\Rightarrow$

$$|G_1(j\omega)| = \frac{\sqrt{\left(1 - B\cdot\omega^2\right)^2 + 4\cdot A^2\cdot\omega^2}}{\left(1 - B\cdot\omega^2\right)^2 + 4\cdot A^2\cdot\omega^2}$$

$\leftrightarrow$

$$\angle G_1(j\omega) = -\arctan\frac{2\cdot A\cdot\omega}{1 - B\cdot\omega^2}$$

Und:

$$|G_3(j\omega)| = \sqrt{\left(C - B\cdot\omega^2\right)^2 + 4\cdot A^2\cdot\omega^2}$$

$\leftrightarrow$

$$\angle G_3(j\omega) = \arctan\frac{2\cdot A\cdot\omega}{C - B\cdot\omega^2}$$

Und:

$$|G_4(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{D^2+\omega^2}}$$

$\leftrightarrow$

$$\angle G_4(j\omega) = -\arctan\frac{\omega}{D}$$

Der Betrag und die Phase werden zusammengesetzt:

$$|G_{II}(j\omega)| = |G_1(j\omega)|\cdot|G_3(j\omega)|\cdot|G_4(j\omega)|$$

$\Rightarrow$

$$|G_{II}(j\omega)| = \frac{\sqrt{\left(1 - B\cdot\omega^2\right)^2 + 4\cdot A^2\cdot\omega^2}}{\left(1 - B\cdot\omega^2\right)^2 + 4\cdot A^2\cdot\omega^2}\cdot\sqrt{\left(C - B\cdot\omega^2\right)^2 + 4\cdot A^2\cdot\omega^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{D^2+\omega^2}}$$

Damit ergibt sich für den Betrag endgültig:

$$|G_{II}(j\omega)| = \sqrt{\frac{\left(C - B\cdot\omega^2\right)^2 + 4\cdot A^2\cdot\omega^2}{\left(1 - B\cdot\omega^2\right)^2 + 4\cdot A^2\cdot\omega^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{D^2+\omega^2}}$$

Weiterhin:

$$\angle G_{II}(j\omega) = \angle G_1(j\omega) + \angle G_3(j\omega) + \angle G_4(j\omega)$$

$\Rightarrow$

$$\angle G_{II}(j\omega) = \arctan\frac{2\cdot A\cdot\omega}{C - B\cdot\omega^2} - \arctan\frac{2\cdot A\cdot\omega}{1 - B\cdot\omega^2} - \arctan\frac{\omega}{D}$$

$\Rightarrow$

$$\angle G_{II}(j\omega) = \arctan\frac{2\cdot A\cdot\omega\cdot(1-C)}{\left(C - B\cdot\omega^2\right)\cdot\left(1 - B\cdot\omega^2\right) + 4\cdot A^2\cdot\omega^2} - \arctan\frac{\omega}{D}$$

$\Rightarrow$

$$\angle G_{II}(j\omega) = \arctan\frac{2\cdot A\cdot D\cdot\omega\cdot(1-C) - \left(C - B\cdot\omega^2\right)\cdot\left(1 - B\cdot\omega^2\right)\cdot\omega - 4\cdot A^2\cdot\omega^3}{2\cdot A\cdot\omega^2\cdot(1-C) + \left(C - B\cdot\omega^2\right)\cdot\left(1 - B\cdot\omega^2\right)\cdot D + 4\cdot A^2\cdot D\cdot\omega^2}$$

Im weiteren Verlauf werden der ermittelte Phasen- und Amplitudengang von $G_I(s)$ und $G_{II}(s)$ auf die betrachteten Typen „SVI“ und „SRI“ wieder aufgeteilt und weiter betrachtet.

Fallzusammenf.

1.3 Fallzusammenfassungen

1.3.1 Fall 8 + 9 = Typ „SRI“ und Fall 10 + 11 + 12 = Typ „SVI“

Es liegt demnach ein Bandpass vor. Dessen Mittenfrequenz ist berechenbar durch das Maximum von $|G_{Fall8}(j\omega)|$:

$$|G_I(j\omega)| = \sqrt{\frac{A^2 + B^2 \cdot \omega^2}{\left(1 - B \cdot \omega^2\right)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2}} \to \infty$$

$\Rightarrow$

$$\left(1 - B \cdot \omega^2\right)^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2 \to 0$$

$\Rightarrow$

$$B^2 \cdot \omega^4 - 2 \cdot B \cdot \omega^2 + 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2 - 1 \to 0$$

$\Rightarrow$

$$\omega^4 - 2 \cdot \omega^2 \cdot \frac{B - 2 \cdot A^2}{B^2} - \frac{1}{B^2} \to 0$$

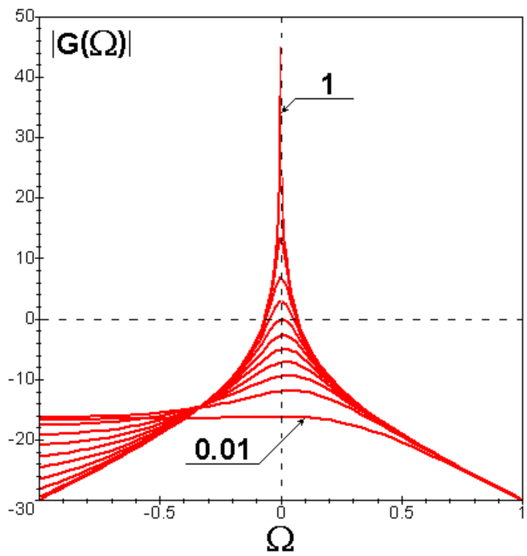
$\Rightarrow \quad f'(x)$

$$\omega^2 - \frac{B - 2 \cdot A^2}{B^2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\omega_{MAX} = \frac{1}{B} \cdot \sqrt{B - 2 \cdot A^2}$$

Grafisch dargestellt in Abhängigkeit von $0.01 \leq \xi \leq 1$:



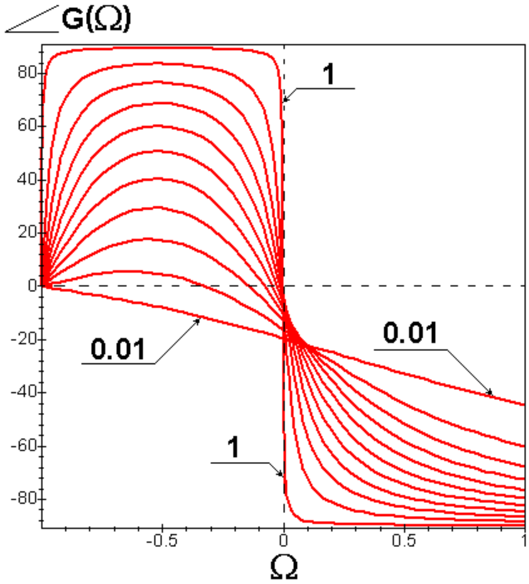
Mit:

$$\omega = \pi \cdot 10^{\Omega} \qquad \leftrightarrow \qquad \Omega = \lg \frac{\omega}{\pi}$$

$\Rightarrow$

$$\omega_{MIN} = \frac{1}{10} \cdot \pi \qquad \omega_0 = \pi \qquad \omega_{MAX} = 10 \cdot \pi$$

Die Phase besitzt folgendes grafisches Ergebnis in Abhängigkeit von ξ:



Mit:

$$\omega = \pi \cdot (\Omega + 1) \qquad \leftrightarrow \qquad \Omega = \frac{\omega - \pi}{\pi}$$

Die dazugehörige Durchtrittsfrequenz ω_D:

$$\angle G_I(j\omega) = 0°$$

$\Rightarrow$

$$\arctan \frac{B \cdot \left(1 - B \cdot \omega^2\right) - 2 \cdot A^2}{A \cdot (1 + B \cdot \omega^2)} \cdot \omega = 0$$

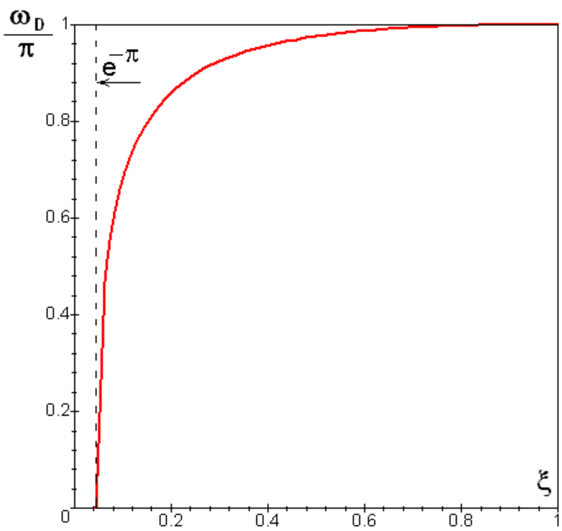
$\Rightarrow$

$$B \cdot \left(1 - B \cdot \omega^2\right) - 2 \cdot A^2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$\omega_D = \frac{1}{B} \cdot \sqrt{B - 2 \cdot A^2}$$

Grafisch:



Der Wert der Durchtrittsfrequenz ist gleich des Ortes des Betragsmaximums.

1.3.2 Fall 8 + 9 = Typ „SRI“ und Fall 10 + 11 + 12 = Typ „SVI“

Die Betragsextrema sind berechenbar über:

$$|G_{II}(j\omega)| = \sqrt{\frac{\left(C - B\cdot\omega^2\right)^2 + 4\cdot A^2\cdot\omega^2}{\left(1 - B\cdot\omega^2\right)^2 + 4\cdot A^2\cdot\omega^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{D^2+\omega^2}}$$

$\Rightarrow$

$$\left(C - B\cdot\omega^2\right)^2 + 4\cdot A^2\cdot\omega^2 \to 0$$

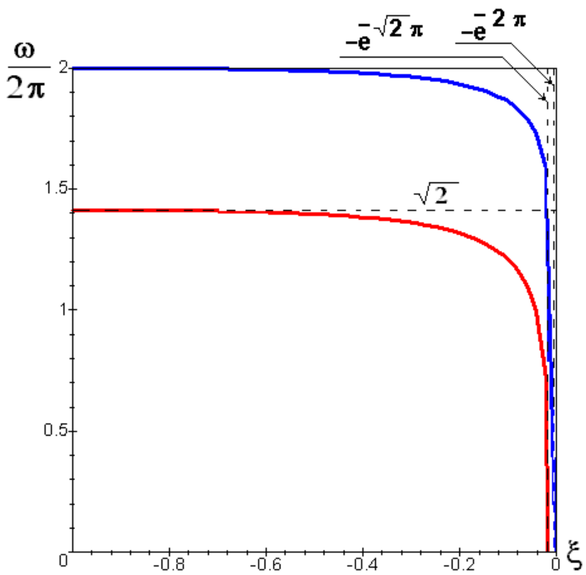
$$\left(1 - B\cdot\omega^2\right)^2 + 4\cdot A^2\cdot\omega^2 \to 0$$

$$\sqrt{D^2+\omega^2} \to 0$$

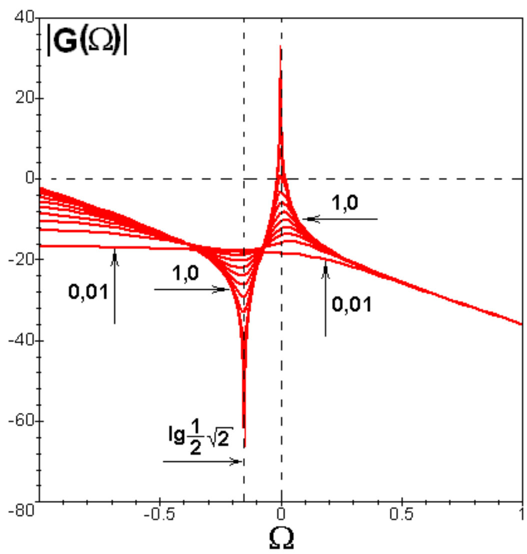
$\Rightarrow$

$$\omega_{MAX_1} = \frac{1}{B}\cdot\sqrt{B\cdot C - 2\cdot A^2} \qquad \omega_{MAX_2} = \frac{1}{B}\cdot\sqrt{B - 2\cdot A^2}$$

$\Rightarrow$



Der Betrag selbst, grafisch dargestellt in Abhängigkeit von $-0.9 \le \xi \le -0.01$ sowie $-1 \le \xi \le -0.9$:



Mit:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot 10^{\Omega} \qquad \leftrightarrow \qquad \Omega = \lg \frac{\omega}{2\pi}$$

$\Rightarrow$

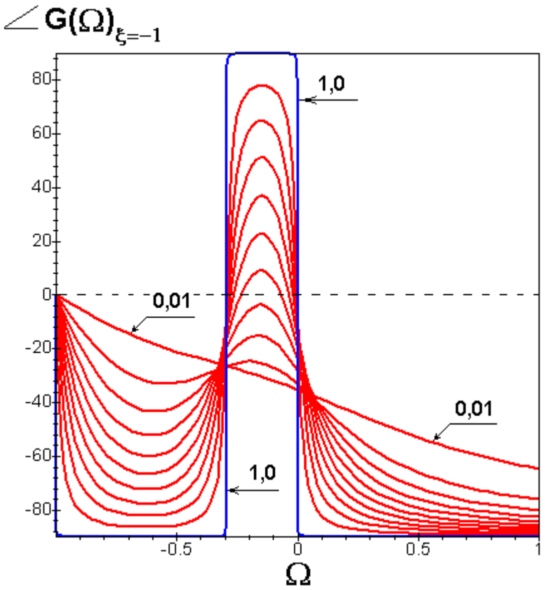
$$\omega_{MIN} = \frac{1}{5} \cdot \pi \qquad \omega_1 = \sqrt{2} \cdot \pi \qquad \omega_0 = 2 \cdot \pi \qquad \omega_{MAX} = 20 \cdot \pi$$

Es liegt global ein Tiefpass vor, kombiniert mit einem Bandpass bei „$2 \cdot \pi$“ und einer Bandsperre bei „$\sqrt{2} \cdot \pi$“.

Weiterhin gilt für die Phase:

$$\angle G_{II}(j\omega) = \arctan \frac{2 \cdot A \cdot D \cdot \omega \cdot (1 - C) - \left(C - B \cdot \omega^2\right) \cdot \left(1 - B \cdot \omega^2\right) \cdot \omega - 4 \cdot A^2 \cdot \omega^3}{2 \cdot A \cdot \omega^2 \cdot (1 - C) + \left(C - B \cdot \omega^2\right) \cdot \left(1 - B \cdot \omega^2\right) \cdot D + 4 \cdot A^2 \cdot D \cdot \omega^2}$$

$\Rightarrow$



Mit:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot (\Omega + 1) \qquad \leftrightarrow \qquad \Omega = \frac{\omega - 2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi}$$

Die dazugehörige Durchtrittsfrequenz ω_D:

$$\angle G_{II}(j\omega) = 0^{\circ}$$

$\Rightarrow$

$$2 \cdot A \cdot D \cdot (1 - C) - \left(C - B \cdot \omega^2\right) \cdot \left(1 - B \cdot \omega^2\right) - 4 \cdot A^2 \cdot \omega^2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$\omega^4 - \omega^2 \cdot \frac{(C+1) \cdot B - 4 \cdot A^2}{B^2} - \frac{2 \cdot A \cdot D \cdot (1 - C) - C}{B^2} = 0$$

Kurzzeitige Substitution:

$$\Omega^2 - \Omega \cdot \frac{(C+1) \cdot B - 4 \cdot A^2}{B^2} - \frac{2 \cdot A \cdot D \cdot (1 - C) - C}{B^2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\Omega_{1;2} = \frac{(C+1) \cdot B - 4 \cdot A^2}{2 \cdot B^2} \pm \frac{1}{2 \cdot B^2} \cdot \sqrt{\begin{cases} \left((C+1) \cdot B - 4 \cdot A^2\right)^2 \\ + \\ 4 \cdot B^2 \cdot (2 \cdot A \cdot D \cdot (1 - C) - C) \end{cases}}$$

Resubstitution:

$$\omega_{1;2} = \frac{1}{2B} \sqrt{2(C+1)B - 8A^2 \pm 2\sqrt{\left((C+1)B - 4A^2\right)^2 + 4B^2(2AD(1-C) - C)}}$$

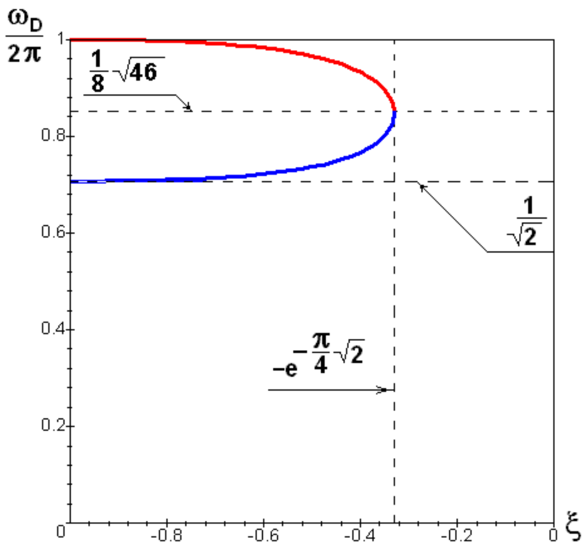
$\Rightarrow$

$$\omega_{D;1} = \frac{1}{2 \cdot B} \cdot \sqrt{\begin{cases} 2 \cdot B \cdot (C+1) \\ - \\ 8 \cdot A^2 \\ + \\ 2 \cdot \sqrt{(B \cdot (C+1) - 4 \cdot A^2)^2 + 4 \cdot B^2 \cdot (2 \cdot A \cdot D \cdot (1-C) - C)} \end{cases}}$$

Und:

$$\omega_{D;2} = \frac{1}{2 \cdot B} \cdot \sqrt{\begin{cases} 2 \cdot B \cdot (C+1) \\ - \\ 8 \cdot A^2 \\ - \\ 2 \cdot \sqrt{(B \cdot (C+1) - 4 \cdot A^2)^2 + 4 \cdot B^2 \cdot (2 \cdot A \cdot D \cdot (1-C) - C)} \end{cases}}$$

Grafisch:



LaTeX 2ε