Das Interpolationsfilter, eine Idee aus früheren Tagen
Synthese eines Autokorrelators

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 13. November 1995 / 15. September 1997

Letzte Revision: 2. April 2021

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Synthese eines Autokorrelators als Anwendungsmöglichkeit

1.1 Beschreibung eines Autokorrelators für weißes Rauschen

Für bestimmte Anwendungen sind Zahlenfolgen uneingeschränkter Zufälligkeit gefordert. Die Kontrolle dieser Bedingung ist über die Ermittlung der Autokorrelationsfunktion möglich. Ein System, welches diese Funktion ermöglicht, ist ein Autokorrelator. [001]ff.

Synthese

Ein digitales, weißes Rauschen aus unterschiedlichen Quellen soll so auf uneingeschränkter Zufälligkeit kontrolliert werden, Dazu ist folgende Funktion zu erfüllen:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\cdot\int\limits_0^T x(t)\cdot x(t+\tau)\cdot dt\right)$$

Anschließend wird normiert mit:

$$\rho_{xx}(\tau) = \left|\frac{R_{xx}(\tau)}{R_{xx}(0)}\right|$$

Da $\rho_{XX}(\tau)$ Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann, ist die Autokorrelationsfunktion selber wieder diskret darstellbar.

Beispiel anhand eines einfachen Sinussignales:

$$x(t) = \sin(t) \qquad \leftrightarrow \qquad x(t+\tau) = \sin(t+\tau)$$

$\Rightarrow$

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{T}\cdot\int\limits_0^T \sin(t)\cdot\sin(t+\tau)\cdot dt\right)$$

$\Rightarrow$

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{\cos\tau}{2} - \frac{\cos\tau\cdot\sin T\cdot\cos T}{2\cdot T} - \frac{\sin\tau\cdot\cos^2 T}{2\cdot T} + \frac{\sin\tau}{2\cdot T}\right)$$

$\Rightarrow$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2}\cdot\cos(\tau) \qquad R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2}$$

Für $\rho_{XX}(\tau)$ dann:

$$\rho_{XX}(\tau) = |\cos\tau|$$

Für $\tau = 0$ ist $\rho_{XX}(0) = 1$. Die Ausgangsfunktion korreliert vollendet mit sich selbst.

Für $\tau = \pi/2$ ergibt sich ein $\rho_{XX}(\pi/2) = 0$. Die Ausgangsfunktion ist vollkommen unkorreliert mit sich selbst.

1.2 Voraussetzungen

In den vorangegangenen Kapiteln wurden Filtertypen definiert:

- **SRI:**

$$_{SRI}y_{n+a} = (-\xi)^a \cdot y_n$$

  Mit:

$$0 \leq \xi \leq +1$$

- **SVI:**

$$_{SVI}y_{n+a} = (-\xi)^a \cdot (1+\xi)^a \cdot y_n$$

  Mit:

$$0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{5} - 1\right)$$

- **SVI:**

$$_{SVI}y_{n+a} = (-\xi)^a \cdot (1+\xi)^a \cdot y_n$$

  Mit:

$$-\frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{5} + 1\right) \leq \xi \leq -1$$

- Die drei Filtertypen können zusammengefasst werden:

$$y_{n+a} = (-\xi)^a \cdot y_n$$

  Mit:

$$-1 \leq \xi \leq +1$$

  Mittels dieser Abklinggleichung lässt sich die diskrete Funktion f(n) darstellen:

$$f(n) = (-\xi)^n \cdot y_1 + (-\xi)^{n-1} \cdot y_2 + (-\xi)^{n-2} \cdot y_3 + (-\xi)^{n-3} \cdot y_4 + \ldots + (-\xi)^1 \cdot y_n$$

  $\Rightarrow$

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} (-\xi)^{n+1-i} \cdot y_i$$

1.3 Herleitung für eine ungestörte Gleichverteilung

ungestört

Für ξ soll 1 eingesetzt werden, so das gilt:

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+1-i} \cdot y_i$$

Dann kann geschrieben werden:

$$f(n) = \begin{cases} n+1-i = \text{even:} & \sum\limits_{i=1}^{n} (+1) \cdot y_i \\ + & \\ n+1-i = \text{odd:} & \sum\limits_{i=1}^{n} (-1) \cdot y_i \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$f(n) = \begin{cases} n+1-i = \text{even:} & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \\ - & \\ n+1-i = \text{odd:} & \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

Mit „even = geradzahlig“ und „odd = ungeradzahlig“.

Es folgen die Fallunterscheidungen.

- $\mathbf{n+1-i=}$ **even:**

$$n+1-i = 2, 4, 6, 8, \ldots$$

$\Rightarrow$

$$n-i = 1, 3, 5, 7, \ldots$$

$\Rightarrow$

$$i = n-1, n-3, n-5, n-7, \ldots$$

$\Rightarrow$

Wenn	Und	Dann gilt
$n+1-i =$ even	$n =$ even	$i =$ odd
	$n =$ odd	$i =$ even

- $\mathbf{n+1-i=}$ **odd:**

$$n+1-i = 1, 3, 5, 7, \ldots$$

$\Rightarrow$

$$n-i = 0, 2, 4, 6, \ldots$$

$\Rightarrow$

$$i = n-0, n-2, n-4, n-6, \ldots$$

$\Rightarrow$

Wenn	Und	Dann gilt
$n+1-i=$ odd	$n=$ even	$i=$ even
	$n=$ odd	$i=$ odd

Damit lassen sich 4 Unterfälle unterscheiden:

$f_1(n)=\begin{cases} n+1-i=\text{ even: } \sum\limits_{i=1}^{n=\text{ even}} y_{i=\text{ odd}} \\ - \\ n+1-i=\text{ odd: } \sum\limits_{i=1}^{n=\text{ even}} y_{i=\text{ even}} \end{cases}$	$f_2(n)=\begin{cases} n+1-i=\text{ odd: } \sum\limits_{i=1}^{n=\text{ even}} y_{i=\text{ even}} \\ - \\ n+1-i=\text{ even: } \sum\limits_{i=1}^{n=\text{ even}} y_{i=\text{ odd}} \end{cases}$
$f_3(n)=\begin{cases} n+1-i=\text{ even: } \sum\limits_{i=1}^{n=\text{ odd:}} y_{i=\text{ even}} \\ - \\ n+1-i=\text{ odd: } \sum\limits_{i=1}^{n=\text{ odd}} y_{i=\text{ odd}} \end{cases}$	$f_4(n)=\begin{cases} n+1-i=\text{ odd: } \sum\limits_{i=1}^{n=\text{ odd}} y_{i=\text{ odd}} \\ - \\ n+1-i=\text{ even: } \sum\limits_{i=1}^{n=\text{ odd}} y_{i=\text{ even}} \end{cases}$

$\Rightarrow$

$$f_1(n)=-f_2(n) \qquad\qquad f_3(n)=-f_4(n)$$

Der arithmetische Mittelwert ist definiert:

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad \rightarrow \qquad n\cdot\bar{y}=\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$\Rightarrow$

$f_1(n)=n_{\text{ even}}\cdot(\bar{y}_{i=\text{ odd}}-\bar{y}_{i=\text{ even}})$	$f_2(n)=n_{\text{ even}}\cdot(\bar{y}_{i=\text{ even}}-\bar{y}_{i=\text{ odd}})$
$f_3(n)=n_{\text{ odd}}\cdot(\bar{y}_{i=\text{ even}}-\bar{y}_{i=\text{ odd}})$	$f_4(n)=n_{\text{ odd}}\cdot(\bar{y}_{i=\text{ odd}}-\bar{y}_{i=\text{ even}})$

Es sind Aussagen der Mittelwertdifferenzen beschreibbar:

Voraussetzung ist eine stetige Gleichverteilung. Dies soll hier als ausreichend angesehen werden, da der Autokorrelator später mit Weißen Rauschen geprüft werden soll. Die Herleitung erfolgt mit $\Delta x=1$:

- $\mathbf{n}_{\text{even}}$**:**

$$(1+0\cdot\Delta x)+(1+1\cdot\Delta x)+(1+2\cdot\Delta x)+(1+3\cdot\Delta x)+(1+4\cdot\Delta x)+(1+5\cdot\Delta x)+\ldots$$

$\Rightarrow$

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+\ldots+n_{even}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=even} i=\frac{n}{2}\cdot(n+1)$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n=even} i = \frac{1}{2} \cdot (n+1)$$

Sowie:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + (n-1)_{even}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=even} i_{odd} = \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}_{odd} = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n=even} i_{odd} = \frac{1}{2} \cdot n$$

Sowie:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots + n_{even}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=even} i_{even} = \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right)$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}_{even} = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n=even} i_{even} = \frac{1}{2} \cdot n + 1$$

Zusammengefasst:

$$\bar{y}_{odd} - \bar{y}_{even} = -\Delta x$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}_{even} - \bar{y}_{odd} = \Delta x$$

- **$\mathbf{n_{odd}}$:**

$(1+0\cdot\Delta x)+(1+1\cdot\Delta x)+(1+2\cdot\Delta x)+(1+3\cdot\Delta x)+(1+4\cdot\Delta x)+(1+5\cdot\Delta x)+(1+6\cdot\Delta x)+\ldots$

$\Rightarrow$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + \ldots + n_{odd}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=odd} i = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n=odd} i = \frac{1}{2} \cdot (n+1)$$

Sowie:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \ldots + n_{odd}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=odd} i_{odd} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}_{odd} = \frac{2}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n=odd} i_{odd} = \frac{n+1}{2}$$

Sowie:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \ldots + (n-1)_{even}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=odd} i_{even} = \frac{n-1}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{2} + 1\right)$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}_{even} = \frac{2}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n=odd} i_{even} = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$$

Zusammengefasst:

$$\bar{y}_{odd} - \bar{y}_{even} = +0$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}_{even} - \bar{y}_{odd} = -0$$

Eingetragen in die Unterfalltabelle:

$-f_1(n) = n_{even} \cdot \Delta x$	$f_2(n) = n_{even} \cdot \Delta x$
$-f_3(n) = 0$	$f_4(n) = 0$

$\Rightarrow$

- Alle ungeraden Stützstellen besitzen den Wert 0.
- Alle geraden Stützstellen besitzen den Wert n$\cdot\Delta$x abwechselnd im Vorzeichen.

Eine Funktion, welche die vier Bedingungen erfüllt, ist die Cosinusfunktion. Der I- Filtertyp 1 $\rightarrow$ SRI $\rightarrow$ SVI beinhaltet als Ausgangssignal diese harmonische Funktion.

1.4 Herleitung für eine gestörte Gleichverteilung

gestört

Eine Störung S wird eingeführt:

- **n** **even**:

$(1+0\cdot\Delta x)+(1+1\cdot\Delta x)+(1+2\cdot\Delta x)+(1+3\cdot\Delta x)+(1+4\cdot\Delta x)+(1+5\cdot\Delta x)+(1+6\cdot\Delta x)+\ldots+S$

$\Rightarrow$

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+\ldots+n_{even}+S$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=even} i = \frac{n}{2}\cdot(n+1)+S$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}^S = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n=even} i = \frac{1}{2}\cdot(n+1)+\frac{S}{n}$$

Sowie:

$$1+3+5+7+9+\ldots(n-1)_{even}+S$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=even} i_{odd} = \left(\frac{n}{2}\right)^2+S$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}^S_{odd} = \frac{2}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n=even} i_{odd} = \frac{1}{2}\cdot n+\frac{2S}{n} = \frac{n^2+4S}{2n}$$

Sowie:

$$2+4+6+8+10+\ldots+n_{even}+S$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=even} i_{even} = \frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)+S$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}^S_{even} = \frac{2}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n=even} i_{even} = \frac{1}{2}\cdot n+1+\frac{2S}{n} = \frac{n^2+2n+4S}{2n}$$

Zusammengefasst:

$$\bar{y}_{odd}-\bar{y}^S_{even} = -\Delta x-2\cdot\frac{S}{n}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}^S_{even}-\bar{y}_{odd} = \Delta x+2\cdot\frac{S}{n}$$

Und:

$$\bar{y}^S_{odd}-\bar{y}_{even} = -\Delta x+2\cdot\frac{S}{n}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}_{even}-\bar{y}^S_{odd} = \Delta x-2\cdot\frac{S}{n}$$

- **n** **odd**:

$(1+0\cdot\Delta x)+(1+1\cdot\Delta x)+(1+2\cdot\Delta x)+(1+3\cdot\Delta x)+(1+4\cdot\Delta x)+(1+5\cdot\Delta x)+\ldots+S$

$\Rightarrow$

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+\ldots+n_{odd}+S$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=odd} i = \frac{n}{2}\cdot(n+1)+S$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}^S = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n=odd} i = \frac{1}{2}\cdot(n+1)+\frac{S}{n}$$

Sowie:

$$1+3+5+7+9+11+\ldots+n_{odd}+S$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=odd} i_{odd} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + S$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}_{odd}^{S} = \frac{2}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n=odd} i_{odd} = \frac{(n+1)^2+4S}{2\cdot(n+1)}$$

Sowie:

$$2+4+6+8+10+\ldots+(n-1)_{even}+S$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n=odd} i_{even} = \frac{n-1}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{2}+1\right) + S$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}_{even}^{S} = \frac{2}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n=odd} i_{even} = \frac{n-1}{2} + 1 + \frac{2S}{n-1} = \frac{(n-1)\cdot(n+1)+4S}{2\cdot(n-1)}$$

Zusammengefasst:

$$\bar{y}_{odd} - \bar{y}_{even}^{S} = -2 \cdot \frac{S}{n-1}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}_{even}^{S} - \bar{y}_{odd} = 2 \cdot \frac{S}{n-1}$$

Und:

$$\bar{y}_{odd}^{S} - \bar{y}_{even} = 2 \cdot \frac{S}{n+1}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{y}_{even} - \bar{y}_{odd}^{S} = -2 \cdot \frac{S}{n+1}$$

Eingetragen in die Unterfalltabelle:

$-f_1(n) = n_{\text{even}} \cdot \Delta x \pm 2 \cdot S$	$f_2(n) = n_{\text{even}} \cdot \Delta x \pm 2 \cdot S$
$-f_3(n) = \pm \frac{n_{\text{odd}}}{n_{\text{odd}}-1} \cdot 2 \cdot S$	$f_4(n) = \pm \frac{n_{\text{odd}}}{n_{\text{odd}}+1} \cdot 2 \cdot S$

Die Untersuchung einer stochastischen Messung erfolgt in einem begrenzten Intervall $[a;b]$, so dass gilt für die Anzahl der Stützstellen n und deren Abstände:

$$n \cdot \Delta x\Big|_a^b = n \cdot \frac{1}{n}\Big|_a^b = 1$$

Um kleinste Abweichungen in der Stochastik erkennen zu können wird die Maximierung der Stützstellen angestrebt:

$$n \to \infty$$

Damit ergibt sich für $f(n)$:

$-f_1(n) = 1 \pm 2 \cdot S$	$f_2(n) = 1 \pm 2 \cdot S$
$-f_3(n) = \pm 2 \cdot S$	$f_4(n) = \pm 2 \cdot S$

$\Rightarrow$

$-f_1(n) = 1 - f_3(n)$	$f_2(n) = 1 + f_4(n)$

Kontrolle, dass weiterhin gilt:

$$-f_1(n) = f_2(n)$$

$\Rightarrow$

$$1 - f_3(n) = 1 + f_4(n)$$

$\Rightarrow$

$$-f_3(n) = f_4(n)$$

Was zu zeigen war.

1.5 Ergebnis

Ergebnis

Jede Störung der Gleichverteilung wird im Ausgangssignal unverändert erkennbar sein.

Wenn die Interpolationskonstante $(-\xi)^a$ kleiner 1 für den Einsatz optimiert gewählt wird, kommt es in der ungestörten Gleichverteilung am Ausgang des I- Filters zu einer Dämpfung des Cosinussignales bis hin zu Null bei großen Messintervallen. Dies gilt nicht für eine Störung S, da diese die Voraussetzung $y_{n+a} = (-\xi)^a \cdot y_n$ verletzt und sich als Peak aus dem Messbild abhebt.

$\LaTeX\,2_\varepsilon$