

Das Interpolationsfilter, eine Idee aus früheren Tagen

Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 13. November 1995 / 15. September 1997

Letzte Revision: 23. März 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Eine kurze Einleitung	3
1.1	Die Idee des Interpolationsfilters	3
1.2	Die Interpolation als mathematischer Begriff	4
1.2.1	Allgemeines	4
1.2.2	Lineare Interpolation	4
1.2.3	Anwendung im vorliegenden Thema	6
2	Die Beschreibung des primären Kalküls	8
2.1	Durchführung der Linearen Interpolation	9
2.1.1	Allgemeines	9
2.1.2	Anwendung im vorliegenden Thema	9
2.1.3	Der Rückführungstyp „ <i>Unsymmetrisch Vorwärts Interpoliert</i> “	10
2.1.4	Der Rückführungstyp „ <i>Unsymmetrisch Rückwärts Interpoliert</i> “	10
2.1.5	Der Rückführungstyp „ <i>Symmetrisch Vorwärts Interpoliert</i> “	10
2.1.6	Der Rückführungstyp „ <i>Symmetrisch Rückwärts Interpoliert</i> “	11
2.2	Die allgemeine Interpolationsgleichung	12
2.3	Die typgebundenen Interpolationsgleichungen	14
2.3.1	Typ „UVI“	14
2.3.2	Typ „URI“	14
2.3.3	Typ „SVI“	14
2.3.4	Typ „SRI“	14
2.4	Sonderfälle	15
2.4.1	Sonderfälle für die Interpolationskonstante	15
2.4.2	Sonderfälle für die Filtertypen	15
2.4.3	Globaler Lösungsort	15
2.4.4	Lokaler Lösungsort	16
3	Die sekundären Berechnungsgrundlagen	17
3.1	Vorbereitende Betrachtungen	17
3.2	Die sekundären, typgebundenen Interpolationsgleichungen	18
3.3	Die Grundgleichungen	19
3.3.1	Typ „UVI“	19
3.3.2	Typ „URI“	19
3.3.3	Typ „SVI“	19
3.3.4	Typ „SRI“	19
3.4	Die Abklinggleichungen	20
3.4.1	Typ „UVI“	20
3.4.2	Typ „URI“	20
3.4.3	Typ „SVI“	21
3.4.4	Typ „SRI“	22
3.5	Die Hüllkurvengleichungen	23

3.5.1	Typ „SVI“	23
3.5.2	Typ „SRI“	24
4	Die Übertragungsfunktionen	26
4.1	Fall 1	27
4.2	Fall 2	28
4.3	Fall 3	29
4.4	Fall 4	30
4.5	Fall 5	31
4.6	Fall 6	32
4.7	Fall 7	33
4.8	Fall 8	34
4.9	Fall 9	35
4.10	Fall 10	37
4.11	Fall 11	39
4.12	Fall 12	41
5	Der Phasen- und Amplitudengang	43
5.1	Die Übertragungsfunktion $G_I(s)$	44
5.2	Die Übertragungsfunktion $G_{II}(s)$	45
5.3	Fallzusammenfassungen	46
5.3.1	Fall 8 + 9 = Typ „SRI“ und Fall 10 + 11 + 12 = Typ „SVI“	46
5.3.2	Fall 8 + 9 = Typ „SRI“ und Fall 10 + 11 + 12 = Typ „SVI“	48
6	Synthese eines Autokorrelators als Anwendungsmöglichkeit	51
6.1	Beschreibung eines Autokorrelators für weißes Rauschen	51
6.2	Voraussetzungen	52
6.3	Herleitung für eine ungestörte Gleichverteilung	53
6.4	Herleitung für eine gestörte Gleichverteilung	57
6.5	Ergebnis	60
7	Analyse eines Autokorrelators als Anwendungsmöglichkeit	61

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

6 Synthese eines Autokorrelators als Anwendungsmöglichkeit

6.1 Beschreibung eines Autokorrelators für weißes Rauschen

Für bestimmte Anwendungen sind Zahlenfolgen uneingeschränkter Zufälligkeit gefordert. Die Kontrolle dieser Bedingung ist über die Ermittlung der Autokorrelationsfunktion möglich. Ein System, welches diese Funktion ermöglicht, ist ein Autokorrelator. [001]
Synthese

Ein digitales, weißes Rauschen aus unterschiedlichen Quellen soll so auf uneingeschränkter Zufälligkeit kontrolliert werden, Dazu ist folgende Funktion zu erfüllen:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot x(t + \tau) \cdot dt \right)$$

Anschließend wird normiert mit:

$$\rho_{xx}(\tau) = \left| \frac{R_{xx}(\tau)}{R_{xx}(0)} \right|$$

Da $\rho_{XX}(\tau)$ Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann, ist die Autokorrelationsfunktion selber wieder diskret darstellbar.

Beispiel anhand eines einfachen Sinussignales:

$$x(t) = \sin(t) \quad \leftrightarrow \quad x(t + \tau) = \sin(t + \tau)$$

⇒

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \sin(t) \cdot \sin(t + \tau) \cdot dt \right)$$

⇒

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{\cos \tau}{2} - \frac{\cos \tau \cdot \sin T \cdot \cos T}{2 \cdot T} - \frac{\sin \tau \cdot \cos^2 T}{2 \cdot T} + \frac{\sin \tau}{2 \cdot T} \right)$$

⇒

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2} \cdot \cos(\tau) \quad R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2}$$

Für $\rho_{XX}(\tau)$ dann:

$$\rho_{XX}(\tau) = |\cos \tau|$$

Für $\tau = 0$ ist $\rho_{XX}(0) = 1$. Die Ausgangsfunktion korreliert vollendet mit sich selbst.

Für $\tau = \pi/2$ ergibt sich ein $\rho_{XX}(\pi/2) = 0$. Die Ausgangsfunktion ist vollkommen unkorreliert mit sich selbst.

6.2 Voraussetzungen

In den vorangegangenen Kapiteln wurden Filtertypen definiert:

- **SRI:**

$$SRI y_{n+a} = (-\xi)^a \cdot y_n$$

Mit:

$$0 \leq \xi \leq +1$$

- **SVI:**

$$SVI y_{n+a} = (-\xi)^a \cdot (1 + \xi)^a \cdot y_n$$

Mit:

$$0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1)$$

- **SVI:**

$$SVI y_{n+a} = (-\xi)^a \cdot (1 + \xi)^a \cdot y_n$$

Mit:

$$-\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{5} + 1) \leq \xi \leq -1$$

- Die drei Filtertypen können zusammengefasst werden:

$$y_{n+a} = (-\xi)^a \cdot y_n$$

Mit:

$$-1 \leq \xi \leq +1$$

Mittels dieser Abklinggleichung lässt sich die diskrete Funktion $f(n)$ darstellen:

$$f(n) = (-\xi)^n \cdot y_1 + (-\xi)^{n-1} \cdot y_2 + (-\xi)^{n-2} \cdot y_3 + (-\xi)^{n-3} \cdot y_4 + \dots + (-\xi)^1 \cdot y_n$$

\Rightarrow

$$f(n) = \sum_{i=1}^n (-\xi)^{n+1-i} \cdot y_i$$

6.3 Herleitung für eine ungestörte Gleichverteilung

ungestört

Für ξ soll 1 eingesetzt werden, so das gilt:

$$f(n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{n+1-i} \cdot y_i$$

Dann kann geschrieben werden:

$$f(n) = \begin{cases} n+1-i = \text{even:} & \sum_{i=1}^n (+1) \cdot y_i \\ + \\ n+1-i = \text{odd:} & \sum_{i=1}^n (-1) \cdot y_i \end{cases}$$

⇒

$$f(n) = \begin{cases} n+1-i = \text{even:} & \sum_{i=1}^n y_i \\ - \\ n+1-i = \text{odd:} & \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}$$

Mit „even = geradzahlig“ und „odd = ungeradzahlig“.

Es folgen die Fallunterscheidungen.

- **$n + 1 - i = \text{even:}$**

$$n + 1 - i = 2, 4, 6, 8, \dots$$

⇒

$$n - i = 1, 3, 5, 7, \dots$$

⇒

$$i = n - 1, n - 3, n - 5, n - 7, \dots$$

⇒

Wenn	Und	Dann gilt
$n + 1 - i = \text{even}$	$n = \text{even}$	$i = \text{odd}$
	$n = \text{odd}$	$i = \text{even}$

- **$n + 1 - i = \text{odd:}$**

$$n + 1 - i = 1, 3, 5, 7, \dots$$

⇒

$$n - i = 0, 2, 4, 6, \dots$$

⇒

$$i = n - 0, n - 2, n - 4, n - 6, \dots$$

⇒

Wenn	Und	Dann gilt
$n + 1 - i = \text{odd}$	$n = \text{even}$	$i = \text{even}$
	$n = \text{odd}$	$i = \text{odd}$

Damit lassen sich 4 Unterfälle unterscheiden:

$f_1(n) = \begin{cases} n+1-i = \text{even: } \sum_{i=1}^{n=\text{even}} y_{i=\text{odd}} \\ - \\ n+1-i = \text{odd: } \sum_{i=1}^{n=\text{even}} y_{i=\text{even}} \end{cases}$	$f_2(n) = \begin{cases} n+1-i = \text{odd: } \sum_{i=1}^{n=\text{even}} y_{i=\text{even}} \\ - \\ n+1-i = \text{even: } \sum_{i=1}^{n=\text{even}} y_{i=\text{odd}} \end{cases}$
$f_3(n) = \begin{cases} n+1-i = \text{even: } \sum_{i=1}^{n=\text{odd}} y_{i=\text{even}} \\ - \\ n+1-i = \text{odd: } \sum_{i=1}^{n=\text{odd}} y_{i=\text{odd}} \end{cases}$	$f_4(n) = \begin{cases} n+1-i = \text{odd: } \sum_{i=1}^{n=\text{odd}} y_{i=\text{odd}} \\ - \\ n+1-i = \text{even: } \sum_{i=1}^{n=\text{odd}} y_{i=\text{even}} \end{cases}$

⇒

$$f_1(n) = -f_2(n) \quad f_3(n) = -f_4(n)$$

Der arithmetische Mittelwert ist definiert:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i \quad \rightarrow \quad n \cdot \bar{y} = \sum_{i=1}^n y_i$$

⇒

$f_1(n) = n_{\text{even}} \cdot (\bar{y}_{i=\text{odd}} - \bar{y}_{i=\text{even}})$	$f_2(n) = n_{\text{even}} \cdot (\bar{y}_{i=\text{even}} - \bar{y}_{i=\text{odd}})$
$f_3(n) = n_{\text{odd}} \cdot (\bar{y}_{i=\text{even}} - \bar{y}_{i=\text{odd}})$	$f_4(n) = n_{\text{odd}} \cdot (\bar{y}_{i=\text{odd}} - \bar{y}_{i=\text{even}})$

Es sind Aussagen der Mittelwertdifferenzen beschreibbar:

Voraussetzung ist eine stetige Gleichverteilung. Dies soll hier als ausreichend angesehen werden, da der Autokorrelator später mit Weißen Rauschen geprüft werden soll. Die Herleitung erfolgt mit $\Delta x = 1$:

• **n_{even} :**

$$(1 + 0 \cdot \Delta x) + (1 + 1 \cdot \Delta x) + (1 + 2 \cdot \Delta x) + (1 + 3 \cdot \Delta x) + (1 + 4 \cdot \Delta x) + (1 + 5 \cdot \Delta x) + \dots$$

⇒

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \dots + n_{\text{even}}$$

⇒

$$\sum_{i=1}^{n=\text{even}} i = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$$

⇒

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n=\text{even}} i = \frac{1}{2} \cdot (n+1)$$

Sowie:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (n-1)_{\text{even}}$$

⇒

$$\sum_{i=1}^{n=\text{even}} i_{\text{odd}} = \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

⇒

$$\bar{y}_{odd} = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n=even} i_{odd} = \frac{1}{2} \cdot n$$

Sowie:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + n_{even}$$

⇒

$$\sum_{i=1}^{n=even} i_{even} = \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} + 1 \right)$$

⇒

$$\bar{y}_{even} = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n=even} i_{even} = \frac{1}{2} \cdot n + 1$$

Zusammengefasst:

$$\bar{y}_{odd} - \bar{y}_{even} = -\Delta x$$

⇒

$$\bar{y}_{even} - \bar{y}_{odd} = \Delta x$$

• **n_{odd}:**

$$(1 + 0 \cdot \Delta x) + (1 + 1 \cdot \Delta x) + (1 + 2 \cdot \Delta x) + (1 + 3 \cdot \Delta x) + (1 + 4 \cdot \Delta x) + (1 + 5 \cdot \Delta x) + (1 + 6 \cdot \Delta x) + \dots$$

⇒

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + \dots + n_{odd}$$

⇒

$$\sum_{i=1}^{n=odd} i = \frac{n}{2} \cdot (n + 1)$$

⇒

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n=odd} i = \frac{1}{2} \cdot (n + 1)$$

Sowie:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + n_{odd}$$

⇒

$$\sum_{i=1}^{n=odd} i_{odd} = \left(\frac{n+1}{2} \right)^2$$

⇒

$$\bar{y}_{odd} = \frac{2}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n=odd} i_{odd} = \frac{n+1}{2}$$

Sowie:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + (n-1)_{even}$$

⇒

$$\sum_{i=1}^{n=odd} i_{even} = \frac{n-1}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{2} + 1 \right)$$

⇒

$$\bar{y}_{even} = \frac{2}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n=odd} i_{even} = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$$

Zusammengefasst:

$$\bar{y}_{odd} - \bar{y}_{even} = +0$$

⇒

$$\bar{y}_{even} - \bar{y}_{odd} = -0$$

Eingetragen in die Unterfalltabelle:

$-f_1(n) = n_{even} \cdot \Delta x$	$f_2(n) = n_{even} \cdot \Delta x$
$-f_3(n) = 0$	$f_4(n) = 0$

⇒

- Alle ungeraden Stützstellen besitzen den Wert 0.
- Alle geraden Stützstellen besitzen den Wert $n \cdot \Delta x$ abwechselnd im Vorzeichen.

Eine Funktion, welche die vier Bedingungen erfüllt, ist die Cosinusfunktion. Der I- Filtertyp 1 → SRI → SVI beinhaltet als Ausgangssignal diese harmonische Funktion.

6.4 Herleitung für eine gestörte Gleichverteilung

gestört

Eine Störung S wird eingeführt:

- n_{even} :

$$(1 + 0 \cdot \Delta x) + (1 + 1 \cdot \Delta x) + (1 + 2 \cdot \Delta x) + (1 + 3 \cdot \Delta x) + (1 + 4 \cdot \Delta x) + (1 + 5 \cdot \Delta x) + (1 + 6 \cdot \Delta x) + \dots + S$$

⇒

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + \dots + n_{\text{even}} + S$$

⇒

$$\sum_{i=1}^{n=\text{even}} i = \frac{n}{2} \cdot (n + 1) + S$$

⇒

$$\bar{y}^S = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n=\text{even}} i = \frac{1}{2} \cdot (n + 1) + \frac{S}{n}$$

Sowie:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (n - 1)_{\text{even}} + S$$

⇒

$$\sum_{i=1}^{n=\text{even}} i_{\text{odd}} = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + S$$

⇒

$$\bar{y}_{\text{odd}}^S = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n=\text{even}} i_{\text{odd}} = \frac{1}{2} \cdot n + \frac{2S}{n} = \frac{n^2 + 4S}{2n}$$

Sowie:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + n_{\text{even}} + S$$

⇒

$$\sum_{i=1}^{n=\text{even}} i_{\text{even}} = \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) + S$$

⇒

$$\bar{y}_{\text{even}}^S = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n=\text{even}} i_{\text{even}} = \frac{1}{2} \cdot n + 1 + \frac{2S}{n} = \frac{n^2 + 2n + 4S}{2n}$$

Zusammengefasst:

$$\bar{y}_{\text{odd}} - \bar{y}_{\text{even}}^S = -\Delta x - 2 \cdot \frac{S}{n}$$

⇒

$$\bar{y}_{\text{even}}^S - \bar{y}_{\text{odd}} = \Delta x + 2 \cdot \frac{S}{n}$$

Und:

$$\bar{y}_{\text{odd}}^S - \bar{y}_{\text{even}} = -\Delta x + 2 \cdot \frac{S}{n}$$

⇒

$$\bar{y}_{\text{even}} - \bar{y}_{\text{odd}}^S = \Delta x - 2 \cdot \frac{S}{n}$$

- n_{odd} :

$$(1 + 0 \cdot \Delta x) + (1 + 1 \cdot \Delta x) + (1 + 2 \cdot \Delta x) + (1 + 3 \cdot \Delta x) + (1 + 4 \cdot \Delta x) + (1 + 5 \cdot \Delta x) + \dots + S$$

⇒

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + \dots + n_{\text{odd}} + S$$

⇒

$$\sum_{i=1}^{n=\text{odd}} i = \frac{n}{2} \cdot (n + 1) + S$$

⇒

$$\bar{y}^S = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n=\text{odd}} i = \frac{1}{2} \cdot (n + 1) + \frac{S}{n}$$

Sowie:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + n_{\text{odd}} + S$$

⇒

$$\sum_{i=1}^{n=\text{odd}} i_{\text{odd}} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 + S$$

⇒

$$\bar{y}_{\text{odd}}^S = \frac{2}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n=\text{odd}} i_{\text{odd}} = \frac{(n+1)^2 + 4S}{2 \cdot (n+1)}$$

Sowie:

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + (n-1)_{\text{even}} + S$$

⇒

$$\sum_{i=1}^{n=\text{odd}} i_{\text{even}} = \frac{n-1}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{2} + 1\right) + S$$

⇒

$$\bar{y}_{\text{even}}^S = \frac{2}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n=\text{odd}} i_{\text{even}} = \frac{n-1}{2} + 1 + \frac{2S}{n-1} = \frac{(n-1) \cdot (n+1) + 4S}{2 \cdot (n-1)}$$

Zusammengefasst:

$$\bar{y}_{\text{odd}} - \bar{y}_{\text{even}}^S = -2 \cdot \frac{S}{n-1}$$

⇒

$$\bar{y}_{\text{even}}^S - \bar{y}_{\text{odd}} = 2 \cdot \frac{S}{n-1}$$

Und:

$$\bar{y}_{\text{odd}}^S - \bar{y}_{\text{even}} = 2 \cdot \frac{S}{n+1}$$

⇒

$$\bar{y}_{\text{even}} - \bar{y}_{\text{odd}}^S = -2 \cdot \frac{S}{n+1}$$

Eingetragen in die Unterfalltabelle:

$-f_1(n) = n_{\text{even}} \cdot \Delta x \pm 2 \cdot S$	$f_2(n) = n_{\text{even}} \cdot \Delta x \pm 2 \cdot S$
$-f_3(n) = \pm \frac{n_{\text{odd}}}{n_{\text{odd}}-1} \cdot 2 \cdot S$	$f_4(n) = \pm \frac{n_{\text{odd}}}{n_{\text{odd}}+1} \cdot 2 \cdot S$

Die Untersuchung einer stochastischen Messung erfolgt in einem begrenzten Intervall $[a; b]$, so dass gilt für die Anzahl der Stützstellen n und deren Abstände:

$$n \cdot \Delta x \Big|_a^b = n \cdot \frac{1}{n} \Big|_a^b = 1$$

Um kleinste Abweichungen in der Stochastik erkennen zu können wird die Maximierung der Stützstellen angestrebt:

$$n \rightarrow \infty$$

Damit ergibt sich für $f(n)$:

$-f_1(n) = 1 \pm 2 \cdot S$	$f_2(n) = 1 \pm 2 \cdot S$
$-f_3(n) = \pm 2 \cdot S$	$f_4(n) = \pm 2 \cdot S$

⇒

$-f_1(n) = 1 - f_3(n)$	$f_2(n) = 1 + f_4(n)$
------------------------	-----------------------

Kontrolle, dass weiterhin gilt:

$$-f_1(n) = f_2(n)$$

⇒

$$1 - f_3(n) = 1 + f_4(n)$$

⇒

$$-f_3(n) = f_4(n)$$

Was zu zeigen war.

6.5 Ergebnis

Ergebnis

Jede Störung der Gleichverteilung wird im Ausgangssignal unverändert erkennbar sein.

Wenn die Interpolationskonstante $(-\xi)^a$ kleiner 1 für den Einsatz optimiert gewählt wird, kommt es in der ungestörten Gleichverteilung am Ausgang des I- Filters zu einer Dämpfung des Cosinus-signales bis hin zu Null bei großen Messintervallen. Dies gilt nicht für eine Störung S , da diese die Voraussetzung $y_{n+a} = (-\xi)^a \cdot y_n$ verletzt und sich als Peak aus dem Messbild abhebt.