

Ein paar Fehler zuviel

—

Fehlerfortpflanzung am Beispiel

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 20. Januar 2016 – Letzte Revision: 11. September 2020

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|----------|
| 1 | Einleitung | 3 |
| 2 | Fehlerfortpflanzung allgemein | 4 |
| 3 | Fehlerfortpflanzung am Beispiel | 5 |
| 3.1 | Das Modell | 5 |
| 3.2 | Die notwendigen Eliminierungen | 6 |
| 3.3 | Die Rückführung auf einen Würfel | 8 |
| 3.4 | Die Rückführung auf ein Messmittel | 9 |
| 3.5 | Die Konsistenz zum allgemeinen Fall | 10 |

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

1 Einleitung

Wer braucht schon einen Fehler? Wer behält ihn und schaut zu, wie er sich fortpflanzt? Gemeint ist hier der Fehler, welcher bei einer Messung unweigerlich generiert wird und den man mitschleppt durch die weitere Prozesskette. [001]ff.

Im Folgenden wird anhand eines einfachen Beispiels die vorliegende Problematik beschrieben. Das ist zwar nicht mathematisch korrekt, jedoch erspart es Zeit jedes Mal bei Null anzufangen, wenn wieder die Frage ansteht: „Wie berechnet man denn nun den Gesamtfehler?“

2 Fehlerfortpflanzung allgemein

Die Fortpflanzung eines Messfehlers, im neuen deutsch einer Messungenauigkeit ist definiert für eine Gesamtungenauigkeit ΔA am Ende der Messung mit:

$$\Delta A = f'(a) \cdot \Delta a$$

Wobei $f'(a)$ die erste Ableitung der mathematischen Beschreibung der zu messenden Größe darstellt.

Sollte sichergestellt sein, dass die Differenzen sehr klein sind, kann auch geschrieben werden:

$$dA = f'(a) \cdot da$$

Für einen werdenden Jünger der Mathematik ist es unverständlich, wie so etwas Banales wie ein Fehler solch eine kryptische Beschreibung besitzen kann. Noch schlimmer kommt es, wenn mehrere, voneinander unabhängige Ungenauigkeiten vorhanden sind.

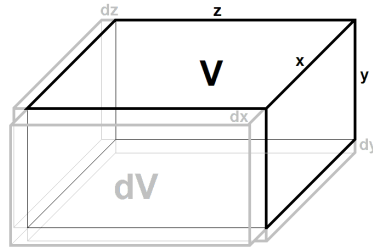
$$dA = \left| \frac{\partial}{\partial a} A \right| \cdot da + \left| \frac{\partial}{\partial b} A \right| \cdot db + \left| \frac{\partial}{\partial c} A \right| \cdot dc + \dots$$

Deshalb jetzt anhand eines einfachen Beispiels, wie sich der Gesamtfehler zusammensetzt und fort-pflanzt und wie man diesen berechnen kann.

3 Fehlerfortpflanzung am Beispiel

3.1 Das Modell

Als Modell wird ein Quader ausgewählt. Die drei Kantenlängen x, y und z sollen ausgemessen und daraus das Gesamtvolumen V berechnet werden. Interessant ist hier die Ungenauigkeit dV der Messung resultierend aus dx, dy und dz .



Das wahre Volumen V des Quaders sei bekannt.

$$V = x \cdot y \cdot z$$

Sowie die Teilungenauigkeiten.

$$dV_X = dx \cdot y \cdot z \quad dV_Y = x \cdot dy \cdot z \quad dV_Z = x \cdot y \cdot dz$$

Es wird **vorerst** davon ausgegangen, dass die Teilungenauigkeiten untereinander Abhängigkeiten besitzen. Dann kann für das Volumen V geschrieben werden:

$$V + dV = (x + dx) \cdot (y + dy) \cdot (z + dz)$$

Mit:

$$dx \in R \quad dy \in R \quad dz \in R$$

Folgt:

$$V + dV = (x \cdot y + x \cdot dy + y \cdot dx + dx \cdot dy) \cdot (z + dz)$$

\Rightarrow

$$V + dV = x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot dz + x \cdot dy \cdot z + x \cdot dy \cdot dz + y \cdot dx \cdot z + y \cdot dx \cdot dz + dx \cdot dy \cdot z + dx \cdot dy \cdot dz$$

\Rightarrow

$$x \cdot y \cdot z + dV = x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot dz + x \cdot dy \cdot z + x \cdot dy \cdot dz + y \cdot dx \cdot z + y \cdot dx \cdot dz + dx \cdot dy \cdot z + dx \cdot dy \cdot dz$$

Der allgemeine Fall letztendlich:

$$dV = x \cdot y \cdot dz + x \cdot dy \cdot z + x \cdot dy \cdot dz + y \cdot dx \cdot z + y \cdot dx \cdot dz + dx \cdot dy \cdot z + dx \cdot dy \cdot dz$$

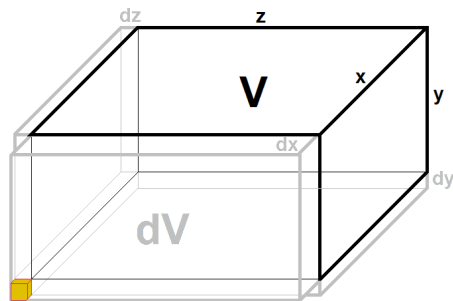
Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass obiger Ausdruck noch Abhängigkeiten zwischen dx, dy und dz besitzt. In der Technischen Mechanik wären das Verwindungen, Steckungen, Verdrehungen, ...

3.2 Die notwendigen Eliminierungen

Die Abhängigkeiten müssen eliminiert werden.

- $dx \cdot dy \cdot dz$:

Als erstes $dx \cdot dy \cdot dz$. Der Wert dieser Messungenauigkeit beträgt Null.

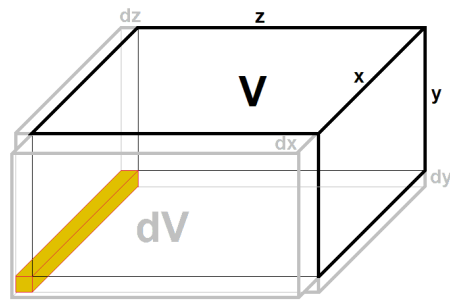


⇒

$$dV = x \cdot y \cdot dz + x \cdot dy \cdot z + x \cdot dy \cdot dz + y \cdot dx \cdot z + y \cdot dx \cdot dz + dx \cdot dy \cdot z$$

- $x \cdot dy \cdot dz$:

Die nächste Abhängigkeit sei $x \cdot dy \cdot dz$.

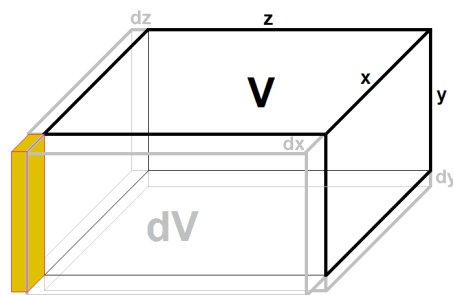


⇒

$$x \cdot dy \cdot dz = 0 \rightarrow dV = x \cdot y \cdot dz + x \cdot dy \cdot z + y \cdot dx \cdot z + y \cdot dx \cdot dz + dx \cdot dy \cdot z$$

- $y \cdot dx \cdot dz$:

Weiter mit $y \cdot dx \cdot dz$:

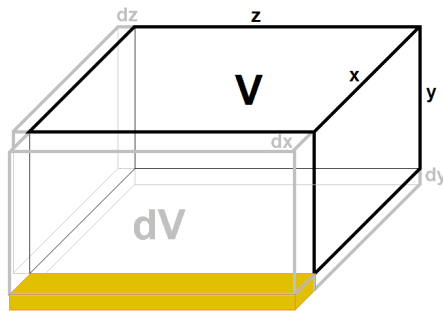


⇒

$$y \cdot dx \cdot dz = 0 \rightarrow dV = x \cdot y \cdot dz + x \cdot dy \cdot z + y \cdot dx \cdot z + dx \cdot dy \cdot z$$

- $dx \cdot dy \cdot z$:

Zum Schluss $dx \cdot dy \cdot z$.



⇒

$$dx \cdot dy \cdot z = 0 \rightarrow dV = x \cdot y \cdot dz + x \cdot dy \cdot z + dx \cdot y \cdot z$$

Damit ist der endgültige Fehler für einen Quader bekannt, der mit drei unabhängigen Messmitteln ermittelt wurde.

$$dV = x \cdot y \cdot dz + x \cdot dy \cdot z + dx \cdot y \cdot z$$

3.3 Die Rückführung auf einen Würfel

Im vorliegenden Fall soll es sich um einen Würfel handeln. Bekanntermaßen gilt dann:

$$x = y = z$$

⇒

$$dV = x \cdot x \cdot dx_1 + x \cdot dx_2 \cdot x + dx_3 \cdot x \cdot x$$

⇒

$$dV = x^2 \cdot (dx_1 + dx_2 + dx_3)$$

3.4 Die Rückführung auf ein Messmittel

Im allgemeinen Fall misst ein Fachmann jede Dimension des Würfels nicht mit drei verschiedenen Messgeräten aus, so gilt dann auch hier:

$$dx_1 = dx_2 = dx_3 = dx$$

⇒

$$dV = x^2 \cdot (dx + dx + dx)$$

⇒

$$dV = 3x^2 \cdot dx$$

Eine kleine Probe folgt, es wird aufgeleitet.

$$V = \int dV = 3 \cdot \int x^2 \cdot dx$$

⇒

$$V = x^3$$

So muss es sein.

3.5 Die Konsistenz zum allgemeinen Fall

Jetzt kann auch nachvollzogen werden, was bedeutet:

$$dA = f'(a) \cdot da$$

⇒

$$dV = V' \cdot dx = \left(\frac{d}{dx} \cdot x^3 \right) \cdot dx$$

⇒

$$dV = 3 \cdot x^2 \cdot dx$$

Beziehungswise mit dem allgemeineren Fall:

$$dA = \left| \frac{\partial}{\partial a} A \right| \cdot da + \left| \frac{\partial}{\partial b} A \right| \cdot db + \left| \frac{\partial}{\partial c} A \right| \cdot dc + \dots$$

⇒

$$dV = \left| \frac{\partial}{\partial x} \cdot V \right| \cdot dx + \left| \frac{\partial}{\partial y} \cdot V \right| \cdot dy + \left| \frac{\partial}{\partial z} \cdot V \right| \cdot dz$$

⇒

$$dV = \left| \frac{\partial}{\partial x} \cdot x \cdot y \cdot z \right| \cdot dx + \left| \frac{\partial}{\partial y} \cdot x \cdot y \cdot z \right| \cdot dy + \left| \frac{\partial}{\partial z} \cdot x \cdot y \cdot z \right| \cdot dz$$

⇒

$$dV = |y \cdot z| \cdot dx + |x \cdot z| \cdot dy + |x \cdot y| \cdot dz$$

⇒

$$dV = dx \cdot y \cdot z + x \cdot dy \cdot z + x \cdot y \cdot dz$$

L^AT_EX 2_ε