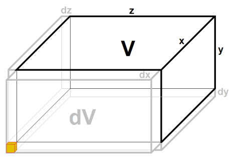
Ein paar Fehler zuviel



Fehlerfortpflanzung am Beispiel

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 20. Januar 2016 – Letzte Revision: 4. September 2024

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Einleitung

Wer braucht schon einen Fehler? Wer behält ihn und schaut zu, wie er sich fortpflanzt? Gemeint ist hier der Fehler, welcher bei einer Messung unweigerlich generiert wird und den man mitschleppt durch die weitere Prozesskette. [001]ff.

Einleitung

Im Folgenden wird anhand eines einfachen Beispiels die vorliegende Problematik beschrieben. Das ist zwar nicht mathematisch korrekt, jedoch erspart es Zeit, jedes Mal bei Null anzufangen, wenn wieder die Frage ansteht: „Wie berechnet man denn nun den Gesamtfehler?“

2 Fehlerfortpflanzung allgemein

Allgemein

Die Fortpflanzung eines Messfehlers, im neuen deutsch einer Messungenauigkeit ist definiert für eine Gesamtungenauigkeit ΔA am Ende der Messung mit:

$$\Delta A = f'(a) \cdot \Delta a$$

Wobei $f'(a)$ die erste Ableitung der mathematischen Beschreibung der zu messenden Größe darstellt.

Sollte sichergestellt sein, dass die Differenzen sehr klein sind, kann auch geschrieben werden:

$$dA = f'(a) \cdot da$$

Für einen werdenden Jünger der Mathematik ist es unverständlich, wie so etwas Banales wie ein Fehler solch eine kryptische Beschreibung besitzen kann. Noch schlimmer kommt es, wenn mehrere, voneinander unabhängige Ungenauigkeiten vorhanden sind.

$$dA = \left|\frac{\partial}{\partial a}A\right| \cdot da + \left|\frac{\partial}{\partial b}A\right| \cdot db + \left|\frac{\partial}{\partial c}A\right| \cdot dc + \ldots$$

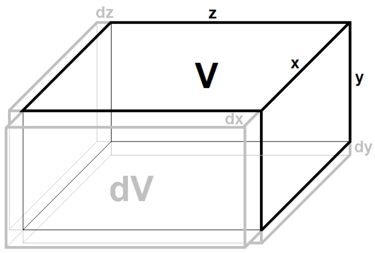
Deshalb jetzt anhand eines einfachen Beispiels, wie sich der Gesamtfehler zusammensetzt und fortpflanzt und wie man diesen berechnen kann.

3 Fehlerfortpflanzung am Beispiel

3.1 Das Modell

Modell

Als Modell wird ein Quader ausgewählt. Die drei Kantenlängen x, y und z sollen ausgemessen und daraus das Gesamtvolumen V berechnet werden. Interessant ist hier die Ungenauigkeit dV der Messung resultierend aus dx, dy und dz.



Das wahre Volumen V des Quaders sei aus der Theorie bekannt.

$$V = x \cdot y \cdot z$$

Sowie die Teilungenauigkeiten.

$$dV_X = dx \cdot y \cdot z \qquad dV_Y = x \cdot dy \cdot z \qquad dV_Z = x \cdot y \cdot dz$$

Es wird **vorerst** davon ausgegangen, dass die Teilungenauigkeiten untereinander Abhängigkeiten besitzen. Dann kann für das Volumen V geschrieben werden:

$$V + dV = (x + dx) \cdot (y + dy) \cdot (z + dz)$$

Mit:

$$dx \in R \qquad dy \in R \qquad dz \in R$$

Folgt:

$$V + dV = (x \cdot y + x \cdot dy + y \cdot dx + dx \cdot dy) \cdot (z + dz)$$

$\Rightarrow$

$$V + dV = x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot dz + x \cdot dy \cdot z + x \cdot dy \cdot dz + y \cdot dx \cdot z + y \cdot dx \cdot dz + dx \cdot dy \cdot z + dx \cdot dy \cdot dz$$

$\Rightarrow$

$$x \cdot y \cdot z + dV = x \cdot y \cdot z + x \cdot y \cdot dz + x \cdot dy \cdot z + x \cdot dy \cdot dz + y \cdot dx \cdot z + y \cdot dx \cdot dz + dx \cdot dy \cdot z + dx \cdot dy \cdot dz$$

Der allgemeine Fall letztendlich:

$$dV = x \cdot y \cdot dz + x \cdot dy \cdot z + x \cdot dy \cdot dz + y \cdot dx \cdot z + y \cdot dx \cdot dz + dx \cdot dy \cdot z + dx \cdot dy \cdot dz$$

Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass obiger Ausdruck noch Abhängigkeiten zwischen dx, dy und dz besitzt.

In der Technischen Mechanik wären das

Verwindungen,
Streckungen,
Verdrehungen,
...

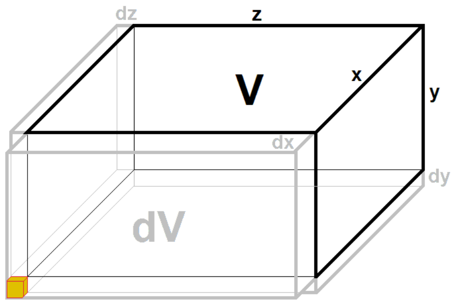
3.2 Die notwendigen Eliminierungen

Eliminierungen

Die Abhängigkeiten müssen/sollen eliminiert werden.[1]

- $\mathbf{dx \cdot dy \cdot dz}$

Als erstes $dx \cdot dy \cdot dz$. Der Wert dieser Messungenauigkeit soll Null betragen.

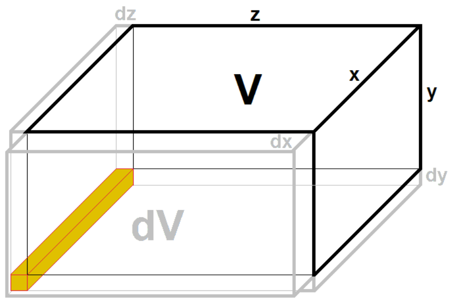


$\Rightarrow$

$$dV = x \cdot y \cdot dz + x \cdot dy \cdot z + x \cdot dy \cdot dz + y \cdot dx \cdot z + y \cdot dx \cdot dz + dx \cdot dy \cdot z$$

- $\mathbf{x \cdot dy \cdot dz}$

Die nächste Abhängigkeit sei $x \cdot dy \cdot dz$.

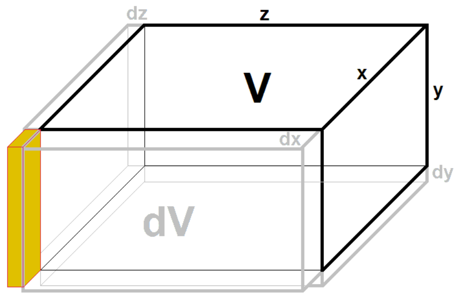


$\Rightarrow$

$$x \cdot dy \cdot dz = 0 \quad \rightarrow \quad dV = x \cdot y \cdot dz + x \cdot dy \cdot z + y \cdot dx \cdot z + y \cdot dx \cdot dz + dx \cdot dy \cdot z$$

- $\mathbf{y \cdot dx \cdot dz}$

Weiter mit $y \cdot dx \cdot dz$:



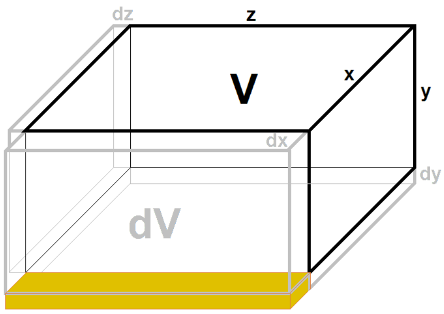
$\Rightarrow$

$$y \cdot dx \cdot dz = 0 \quad \rightarrow \quad dV = x \cdot y \cdot dz + x \cdot dy \cdot z + y \cdot dx \cdot z + dx \cdot dy \cdot z$$

[1] Die Abhängigkeiten erkennt man im vorliegenden Beispiel an deren Produktverknüpfungen.

- $\mathbf{dx \cdot dy \cdot z}$

Zum Schluss $dx \cdot dy \cdot z$.



$\Rightarrow$

$$dx \cdot dy \cdot z = 0 \quad \rightarrow \quad dV = x \cdot y \cdot dz + x \cdot dy \cdot z + dx \cdot y \cdot z$$

Damit ist der endgültige Fehler für einen Quader bekannt, der mit drei unabhängigen Messmitteln ermittelt wurde.

$$dV = x \cdot y \cdot dz + x \cdot dy \cdot z + dx \cdot y \cdot z$$

3.3 Die Rückführung auf einen Würfel

Rückführung I Im vorliegenden Fall soll es sich um einen Würfel handeln. Bekanntermaßen gilt dann:

$$x = y = z$$

$\Rightarrow$

$$dV = x \cdot x \cdot dx_1 + x \cdot dx_2 \cdot x + dx_3 \cdot x \cdot x$$

$\Rightarrow$

$$dV = x^2 \cdot (dx_1 + dx_2 + dx_3)$$

3.4 Die Rückführung auf ein Messmittel

Rückführung II

Im allgemeinen Fall misst ein Fachmann jede Dimension des Würfels nicht mit drei verschiedenen Messgeräten aus, so gilt dann auch hier:

$$dx_1 = dx_2 = dx_3 = dx$$

$\Rightarrow$

$$dV = x^2 \cdot (dx + dx + dx)$$

$\Rightarrow$

$$dV = 3x^2 \cdot dx$$

Eine kleine Probe folgt, es wird aufgeleitet.

$$V = \int \mathrm{d}V = 3 \cdot \int x^2 \cdot \mathrm{d}x$$

$\Rightarrow$

$$V = x^3$$

So muss es sein.

3.5 Die Konsistenz zum allgemeinen Fall

Konsistenz

Jetzt kann auch nachvollzogen werden, was bedeutet:

$$dA = f'(a) \cdot da$$

$\Rightarrow$

$$dV = V' \cdot dx = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot x^3 \right) \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$dV = 3 \cdot x^2 \cdot dx$$

Beziehungsweise mit dem allgemeineren Fall:

$$dA = \left| \frac{\partial}{\partial a} A \right| \cdot da + \left| \frac{\partial}{\partial b} A \right| \cdot db + \left| \frac{\partial}{\partial c} A \right| \cdot dc + \ldots$$

$\Rightarrow$

$$dV = \left| \frac{\partial}{\partial x} \cdot V \right| \cdot dx + \left| \frac{\partial}{\partial y} \cdot V \right| \cdot dy + \left| \frac{\partial}{\partial z} \cdot V \right| \cdot dz$$

$\Rightarrow$

$$dV = \left| \frac{\partial}{\partial x} \cdot x \cdot y \cdot z \right| \cdot dx + \left| \frac{\partial}{\partial y} \cdot x \cdot y \cdot z \right| \cdot dy + \left| \frac{\partial}{\partial z} \cdot x \cdot y \cdot z \right| \cdot dz$$

$\Rightarrow$

$$dV = |y \cdot z| \cdot dx + |x \cdot z| \cdot dy + |x \cdot y| \cdot dz$$

$\Rightarrow$

$$dV = dx \cdot y \cdot z + x \cdot dy \cdot z + x \cdot y \cdot dz$$

Mit dem aus Abschnitt 3.2 bekannten Ausdruck.

LaTeX 2_ε