Elliptische Regression – Achsen und Winkel

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 21. Juni 2014 - Letzte Revision: 25. Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

Literatur

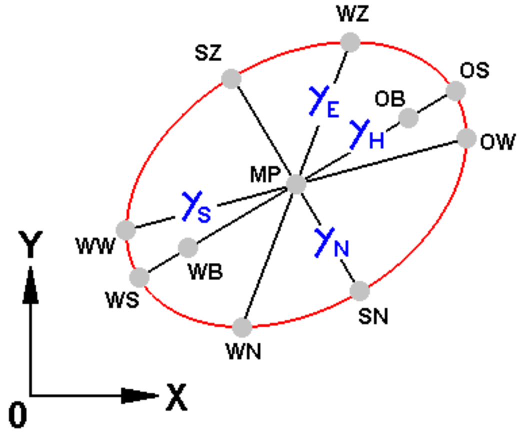
[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Die Elliptische Regression – Achsen und Winkel

1.1 Einleitung

Einleitung



Im Teil „Elliptische Regression von Datenpunkten“ wurde die Durchführung einer Regression beschrieben mit dem Ergebnis der mathematischen Darstellung einer Ellipse. [001]ff.

Im weiteren Verlauf werden die Achsen der Ellipse beschrieben. Dabei wird definiert:

– Die Hauptachse der Ellipse y_H
– Die Nebenachse der Ellipse y_N
– Die Scheitelachse der Ellipse y_S
– Die Extremaachse der Ellipse y_E

Drei Darstellungsformen der Achsfunktionen sind angegeben:

– Die Anstiegsdarstellung (der Anstieg a der Hauptachse als Basis der Beschreibung)
– Die Koeffizientendarstellung (die Koeffizienten A und B der Ellipse als Basis)
– Die goniometrische Darstellung (der Kippwinkel φ der Ellipse als Basis)

So kann als vorangehendes Beispiel die Hauptachse in drei funktionalen Zusammenhängen erscheinen.

$$y_H = a \cdot x_H + b = \tan\varphi \cdot x_H + b = \frac{B}{A - e^2} \cdot x_H + b$$

Zwecks weiterer Begriffsbestimmungen und zum Verständnis im Verlauf siehe zuerst [1] und [2].

[1]Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“
[2]Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression – Punkte“

1.2 Herleitung der Achsen

1.2.1 Die Hauptachse y_H – Punkte WS und OS

Hauptachse

Punktdefinitionen:

$$x_{WS} = x_{MP} - e \cdot f \cdot \sqrt{\frac{A}{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2}} \qquad y_{WS} = a \cdot x_{WS} + b$$

Sowie:

$$x_{OS} = x_{MP} + e \cdot f \cdot \sqrt{\frac{A}{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2}} \qquad y_{OS} = a \cdot x_{OS} + b$$

Zweipunktgleichung:

$$\frac{y_H - y_{WS}}{x_H - x_{WS}} = \frac{y_{OS} - y_{WS}}{x_{OS} - x_{WS}}$$

$\Rightarrow$

$$y_H = \frac{(y_{OS} - y_{WS}) \cdot (x_H - x_{WS}) + y_{WS} \cdot (x_{OS} - x_{WS})}{x_{OS} - x_{WS}}$$

Substituieren von y_{WS} und y_{OS} und anschließendes Umstellen.

$$y_H = a \cdot x_H + b$$

Was der allgemeinen Definition der Hauptachse entspricht.

1.2.2 Die Hauptachse y_H – Punkte WB und OB

Hauptachse

Punktdefinitionen:

$$x_{WB} = x_{MP} - \varepsilon_L \cdot \cos\varphi \qquad y_{WB} = y_{MP} - \varepsilon_L \cdot \sin\varphi$$

Sowie:

$$x_{OB} = x_{MP} + \varepsilon_L \cdot \cos\varphi \qquad y_{OB} = y_{MP} + \varepsilon_L \cdot \sin\varphi$$

Zweipunktgleichung:

$$\frac{y_H - y_{WB}}{x_H - x_{WB}} = \frac{y_{OB} - y_{WB}}{x_{OB} - x_{WB}}$$

$\Rightarrow$

$$y_H = \frac{(y_{OB} - y_{WB}) \cdot (x_H - x_{WB}) + y_{WB} \cdot (x_{OB} - x_{WB})}{x_{OB} - x_{WB}}$$

Substituieren von $y_{WB}; y_{OB}$ und $x_{WB}; x_{OB}$ sowie anschließendes Umstellen.

$$y_H = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \cdot (x_H - x_{WB}) + y_{WB}$$

Substituieren von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ sowie anschließendes Umstellen.

$$\sin^2\varphi = \frac{a^2}{1+a^2} \qquad \cos^2\varphi = \frac{1}{1+a^2}$$

$\Rightarrow$

$$y_H = a \cdot x_H - a \cdot x_{WB} + y_{WB}$$

Eine Nebenbedingung für WB wird genutzt.

$$y_{WB} = a \cdot x_{WB} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_H = a \cdot x_H + b$$

Was der allgemeinen Definition der Hauptachse entspricht.

Hauptachse

1.2.3 Die Hauptachse y_H – Punkt MP und Anstieg a

Gegeben ist der Anstieg a und der Mittelpunkt der Ellipse mit den Koordinaten:

$$x_{MP} = (d - b) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \qquad y_{MP} = \left(a^2 \cdot d + b\right) \cdot \cos^2\varphi$$

Die Punktrichtungsform wird genutzt.

$$\frac{y_H - y_{MP}}{x_H - x_{MP}} = a$$

$\Rightarrow$

$$y_H = a \cdot (x_H - x_{MP}) + y_{MP}$$

Substituieren von y_{MP} und x_{MP} sowie anschließendes Umstellen. (Die Nebenbedingung $y_{MP} = a \cdot x_{MP} + b$ kann auch genutzt werden)

$$y_H = a \cdot x_H - a \cdot d \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + a \cdot b \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + a^2 \cdot d \cdot \cos^2\varphi + b \cdot \cos^2\varphi$$

Substituieren von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ sowie anschließendes Umstellen.

$$\sin^2\varphi = \frac{a^2}{1 + a^2} \qquad \cos^2\varphi = \frac{1}{1 + a^2}$$

$\Rightarrow$

$$y_H = a \cdot x_H + b$$

Was der allgemeinen Definition der Hauptachse entspricht.

1.2.4 Die Nebenachse y_N – Punkte SZ und SN

Nebenachse

Punktdefinitionen:

$$y_{SN} = y_{MP} - e \cdot \cos\varphi \qquad x_{SN} = x_{MP} + e \cdot \sin\varphi$$

Sowie:

$$y_{SZ} = y_{MP} + e \cdot \cos\varphi \qquad x_{SZ} = x_{MP} - e \cdot \sin\varphi$$

Zweipunktgleichung:

$$\frac{y_N - y_{SN}}{x_N - x_{SN}} = \frac{y_{SN} - y_{SZ}}{x_{SN} - x_{SZ}}$$

$\Rightarrow$

$$y_N = \frac{(y_{SN} - y_{SZ}) \cdot (x_N - x_{SN}) + y_{SN} \cdot (x_{SN} - x_{SZ})}{x_{SN} - x_{SZ}}$$

Substituieren von y_{SZ} in und y_{SN} in der Klammer sowie anschließendes Umstellen.

$$y_N = y_{SN} - 2 \cdot e \cdot \cos\varphi \cdot \frac{x_N - x_{SN}}{x_{SN} - x_{SZ}}$$

Substituieren von x_{SZ} in und x_{SN} im Nenner sowie anschließendes Umstellen.

$$y_N = y_{SN} - \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \cdot (x_N - x_{SN})$$

Substituieren von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ sowie anschließendes Umstellen.

$$\sin^2\varphi = \frac{a^2}{1 + a^2} \qquad \cos^2\varphi = \frac{1}{1 + a^2}$$

$\Rightarrow$

$$y_N = y_{SN} - \frac{1}{a} \cdot (x_N - x_{SN})$$

Eine Nebenbedingung für SN wird genutzt.

$$y_{SN} = -\frac{1}{a} \cdot x_{SN} + d$$

$\Rightarrow$

$$y_N = -\frac{1}{a} \cdot x_N + d$$

Eine Nebenbedingung für a wird genutzt.

$$a \cdot c = -1$$

$\Rightarrow$

$$y_N = c \cdot x_N + d$$

Was der allgemeinen Definition der Nebenachse entspricht.

Scheitelachse

1.2.5 Die Scheitelachse y_S – Punkte OW und WW

Punktdefinitionen:

$$x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{A} \qquad y_{OW} = y_{MP} + \frac{B}{\sqrt{A}}$$

Sowie:

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{A} \qquad y_{WW} = y_{MP} - \frac{B}{\sqrt{A}}$$

Zweipunktgleichung:

$$\frac{y_S - y_{OW}}{x_S - x_{OW}} = \frac{y_{WW} - y_{OW}}{x_{WW} - x_{OW}}$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{(y_{WW} - y_{OW}) \cdot (x_S - x_{OW}) + y_{OW} \cdot (x_{WW} - x_{OW})}{x_{WW} - x_{OW}}$$

Substituieren von y_{WW} in und y_{OW} sowie anschließendes Umstellen.

$$y_S = 2 \cdot \frac{-B}{\sqrt{A}} \cdot \frac{x_S - x_{OW}}{x_{WW} - x_{OW}} + y_{MP} + \frac{B}{\sqrt{A}}$$

Substituieren von x_{WW} in und x_{OW} im Nenner sowie anschließendes Umstellen.

$$y_S = \frac{B}{A} \cdot (x_S - x_{OW}) + y_{MP} + \frac{B}{\sqrt{A}}$$

Substituieren von x_{OW} sowie anschließendes Umstellen.

$$y_S = \frac{B}{A} \cdot x_S - \frac{B}{A} \cdot x_{MP} + y_{MP}$$

Eine Nebenbedingung für MP wird genutzt.

$$y_{MP} = a \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{B}{A} \cdot x_S + \left(a - \frac{B}{A}\right) \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\frac{B}{A} = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2}$$

Lässt sich y_S leicht vereinfachen.

$$y_S = \frac{B}{A} \cdot x_S + \frac{e^2 \cdot a}{A} \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\frac{B}{A} = \frac{\left(f^2 - e^2\right) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi}$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_S + \frac{e^2 \cdot a}{A} \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$A = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_S + \frac{e^2 \cdot a}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$a = \tan\varphi$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \frac{\sin\varphi \cdot \cos\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_S + e^2 \cdot \frac{\tan\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\tan\varphi = a$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{f^2 - e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2} \cdot a \cdot x_S + \frac{e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2} \cdot a \cdot \left(1 + a^2\right) \cdot x_{MP} + b$$

Eine Kontrolle von y_S ist möglich über die Tatsache, dass auf y_S der Mittelpunkt $(x_{MP}; y_{MP})$ der Ellipse liegt, daher:

$$y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot x_{MP} + \left(a - \frac{B}{A}\right) \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_{MP} = a \cdot x_{MP} + b$$

Was der geforderten Nebenbedingung entspricht.

Mit der Berechnungsgrundlage der linearen Exzentrizität ε_L ist eine weitere Vereinfachung möglich. Da vorangegangen per Definition $f > e$ sowie $f > 1\,[PIX]$ und $e > 1\,[PIX]$ gilt, ist $f^2 - e^2$ substituierbar:

$$\varepsilon_L^2 = f^2 - e^2$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{\varepsilon_L^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_S + \frac{e^2 \cdot \tan\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \varepsilon_L^2 \cdot \frac{a}{e^2 \cdot a^2 + f^2} \cdot x_S + \frac{e^2 \cdot a \cdot \left(1 + a^2\right)}{e^2 \cdot a^2 + f^2} \cdot x_{MP} + b$$

Extremaachse

1.2.6 Die Extremaachse y_E – Punkte WZ und WN

Punktdefinitionen:

$$x_{WZ} = x_{MP} + B \cdot \sqrt{\frac{A}{B^2 + f^2 \cdot e^2}} \qquad y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A}}$$

Sowie:

$$x_{WN} = x_{MP} - B \cdot \sqrt{\frac{A}{B^2 + f^2 \cdot e^2}} \qquad y_{WN} = y_{MP} - \sqrt{\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A}}$$

Zweipunktgleichung:

$$\frac{y_E - y_{WZ}}{x_E - x_{WZ}} = \frac{y_{WN} - y_{WZ}}{x_{WN} - x_{WZ}}$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{(y_{WN} - y_{WZ}) \cdot (x_E - x_{WZ}) + y_{WZ} \cdot (x_{WN} - x_{WZ})}{x_{WN} - x_{WZ}}$$

Substituieren von y_{WN} in und y_{WZ} sowie anschließendes Umstellen.

$$y_E = -2\sqrt{\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A}} \cdot \frac{x_E - x_{WZ}}{x_{WN} - x_{WZ}} + y_{MP} + \sqrt{\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A}}$$

Substituieren von x_{WN} in und x_{WZ} im Nenner sowie anschließendes Umstellen.

$$y_E = \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} \cdot (x_E - x_{WZ}) + y_{MP} + \sqrt{\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A}}$$

Substituieren von x_{WZ} sowie anschließendes Umstellen.

$$y_E = \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} \cdot x_E - \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} \cdot x_{MP} + y_{MP}$$

Eine Nebenbedingung für MP wird genutzt.

$$y_{MP} = a \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} \cdot x_E + \left(a - \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B}\right) \cdot x_{MP} + b$$

Der Koeffizient wird gesplittet:

$$y_E = \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} \cdot x_E + \left(a - \frac{B}{A} - \frac{f^2 \cdot e^2}{A \cdot B}\right) \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\frac{B}{A} = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2}$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} \cdot x_E + a \cdot e^2 \cdot \left(\frac{1 + a^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2} - \frac{f^2}{a \cdot A \cdot B}\right) \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\frac{1}{A} = \frac{1 + a^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2}$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} \cdot x_E + e^2 \cdot \frac{a \cdot B - f^2}{A \cdot B} \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} = \frac{f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi}{(f^2 - e^2) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi}$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}{(f^2 - e^2) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi} \cdot x_E + e^2 \cdot \frac{a \cdot B - f^2}{A \cdot B} \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\frac{a \cdot B - f^2}{A \cdot B} = \frac{-1}{(f^2 - e^2) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}{(f^2 - e^2) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi} \cdot x_E - \frac{e^2}{(f^2 - e^2) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi} \cdot x_{MP} + b$$

Mit der Nebenbedingung:

$$\tan\varphi = a$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{f^2 \cdot a^2 + e^2}{f^2 - e^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot x_E - \frac{e^2}{f^2 - e^2} \cdot \frac{1 + a^2}{a} \cdot x_{MP} + b$$

Eine Kontrolle von y_E ist möglich über die Tatsache, dass auf y_E der Mittelpunkt $(x_{MP}; y_{MP})$ der Ellipse liegt, daher:

$$y_{MP} = \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} \cdot x_{MP} + \left(a - \frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B}\right) \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_{MP} = a \cdot x_{MP} + b$$

Was der geforderten Nebenbedingung entspricht.

Mit der Berechnungsgrundlage der linearen Exzentrizität ε_L ist eine weitere Vereinfachung möglich. Da per Definition $f > e$ sowie $f > 1\,[PIX]$ und $e > 1\,[PIX]$ gilt, ist $f^2 - e^2$ substituierbar:

$$\varepsilon_L^2 = f^2 - e^2$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}{\varepsilon_L^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi} \cdot x_E - \frac{e^2}{\varepsilon_L^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi} \cdot x_{MP} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_E = \frac{f^2 \cdot a^2 + e^2}{\varepsilon_L^2 \cdot a} \cdot x_E - \frac{e^2 \cdot \left(1 + a^2\right)}{\varepsilon_L^2 \cdot a} \cdot x_{MP} + b$$

1.3 Herleitung der Schnittwinkel

1.3.1 Der Winkel α zwischen der Abszisse und den Achsen $y_H; y_N; y_S$ und y_E

Winkel α

Erfolgt mit den betreffenden Anstieg m nach der Berechnungsgrundlage:

$$\tan\alpha = m$$

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S	y_E
Darstellung	$\tan\alpha =$	$\tan\alpha =$	$\tan\alpha =$	$\tan\alpha =$
Koeffizienten-	$\frac{B}{A-e^2}$	$\frac{e^2-A}{B}$	$\frac{B}{A}$	$\frac{B^2+f^2\cdot e^2}{A\cdot B}$
Anstiegs-	a	$-\frac{1}{a}$	$\frac{f^2-e^2}{e^2\cdot a^2+f^2}\cdot a$	$\frac{f^2\cdot a^2+e^2}{f^2-e^2}\cdot\frac{1}{a}$
Goniometrische	$\tan\varphi$	$-\cot\varphi$	$\frac{\left(f^2-e^2\right)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{e^2\cdot\sin^2\varphi+f^2\cdot\cos^2\varphi}$	$\frac{f^2\cdot\sin^2\varphi+e^2\cdot\cos^2\varphi}{(f^2-e^2)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi}$

1.3.2 Der Winkel β zwischen den Achsen $y_H; y_N; y_S$ und y_E

Winkel β

Erfolgt mit den betreffenden Anstiegen m_1 und m_2 nach der Berechnungsgrundlage:

$$\tan\beta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|$$

$\Rightarrow$

Rechts – Koeffizientendarstellung

	y_H	y_N	y_S	y_E
	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$
y_H	0	∞	$\left\lvert\frac{B-A\cdot a}{A+B\cdot a}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{B\cdot(B-A\cdot a)+e^2\cdot f^2}{B\cdot(A+B\cdot a)+a\cdot e^2\cdot f^2}\right\rvert$
y_N	∞	0	$\left\lvert\frac{A+B\cdot a}{B-A\cdot a}\right\rvert$	$\left\lvert\frac{B\cdot(A+B\cdot a)+a\cdot e^2\cdot f^2}{B\cdot(B-A\cdot a)+e^2\cdot f^2}\right\rvert$
y_S	$\left\lvert\frac{e^2}{f^2}\cdot\tan\varphi\right\rvert$	$\left\lvert\frac{f^2}{e^2}\cdot\cot\varphi\right\rvert$	0	$\left\lvert\frac{A}{B}\cdot\frac{e^2\cdot f^2}{A^2+B^2+e^2\cdot f^2}\right\rvert$
y_E	$\left\lvert\frac{e^2}{f^2}\cdot\cot\varphi\right\rvert$	$\left\lvert\frac{f^2}{e^2}\cdot\tan\varphi\right\rvert$	$\left\lvert\frac{e^2\cdot f^2}{e^4-f^4}\cdot\sin^{-1}\varphi\cdot\cos^{-1}\varphi\right\rvert$	0

Links – Goniometrische Darstellung

Koeffizient ρ

1.3.3 Der Zusammenhang zwischen Korrelationskoeffizient ρ_{XY} und Winkel β

In „Elliptische Regression von Datenpunkten“ wurde der lineare Korrelationskoeffizient ρ_{XY} definiert. Mit dessen Hilfe ist der Schnittwinkel β ebenfalls beschreibbar, so gilt:

$$\rho_{XY}^2 = a^2 \cdot \frac{f^2}{e^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{f^2}{e^2} = \rho_{XY}^2 \cdot \cot^2\varphi \qquad \leftrightarrow \qquad \frac{e^2}{f^2} = \frac{\tan^2\varphi}{\rho_{XY}^2}$$

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S
	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$
y_S	$\rho_{XY}^{-2} \cdot \left\|\tan^3\varphi\right\|$	$\rho_{XY}^{+2} \cdot \left\|\cot^3\varphi\right\|$	-
y_E	$\rho_{XY}^{-2} \left\|\tan\varphi\right\|$	$\rho_{XY}^{+2} \cdot \left\|\cot\varphi\right\|$	$\rho_{XY}^{+2} \cdot \left\|\frac{\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\sin^4\varphi - \rho_{XY}^{+4}\cdot\cos^4\varphi}\right\|$

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S
	$\rho_{XY}^2 =$	$\rho_{XY}^2 =$	$\rho_{XY}^2 =$
y_S	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2\varphi$	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2\varphi$	-
y_E	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2\varphi$	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2\varphi$	$\frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2\varphi$

Da für das Quadrat eines Korrelationskoeffizienten gilt

$$0 \leq \rho_{XY}^2 \leq 1$$

und $\rho_{XY}^2 = \frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2\varphi$ für alle Fälle gegeben ist, kann definiert werden:

$$0 \leq \frac{f^2}{e^2} \cdot \tan^2\varphi \leq 1$$

$\Rightarrow$

$$0 \leq \tan^2\varphi \leq \frac{e^2}{f^2}$$

$\Rightarrow$

$$0 \leq \tan\varphi \leq \frac{e}{f} \qquad -\frac{e}{f} \leq \tan\varphi \leq 0$$

$\Rightarrow$

$$0 \leq \varphi \leq \arctan\frac{e}{f} \qquad \pi - \arctan\frac{e}{f} \leq \varphi \leq \pi$$

Damit kann man für den ersten Quadranten (und für den zweiten bei Bedarf auch) ein maximales φ_{GRENZ} definieren.

$$\varphi_{GRENZ} = \pm\arctan\frac{e}{f}$$

Bei einer strengen Einhaltung der Forderung $f > e$ ergibt sich dann:

$$0 \leq \frac{e}{f} \leq 1$$

$\Rightarrow$

$$-45° \equiv -\frac{\pi}{4} = \varphi_{MIN} \leq \varphi \leq \varphi_{MAX} = +\frac{\pi}{4} \equiv +45°$$

Für $\varphi_{Grenz} = \pm\frac{\pi}{2} \equiv \pm 90°$ muss $f > e$ als Bedingung fallen gelassen werden.

Die Beschreibung der lineare Funktion von φ_{GRENZ}:

$$y_{GRENZ} = \pm\frac{e}{f} \cdot x_{GRENZ} + b$$

2 Ein Beispiel – Achsen und Winkel

Beispiel

$$a = 0,5928 \qquad b = 37,5079 \qquad c = -1,6869 \qquad d = 1621,1455$$

$$\varphi = 0,535 \equiv 30,65° \qquad \rho_{XY} = 0,868$$

$$A = 126935,44 \qquad B = 34486,8$$

$$e = 262,22 \qquad f = 383,9$$

$$x_{MP} = 694,6692986$$

$\Rightarrow$[3]

$$y_H = 0,592 \cdot x_H + 37,507 \qquad y_N = -1,686 \cdot x_N + 1621,145$$

$$y_S = 0,271 \cdot x_S + 260,506 \qquad y_E = 2,586 \cdot x_E - 1347,679$$

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S	y_E
Darstellung	$\tan\alpha =$	$\tan\alpha =$	$\tan\alpha =$	$\tan\alpha =$
Koeffizienten-	$+0,5928$	$-1,6869$	$+0,271$	$+2,586$
Anstiegs-	$+0,5928$	$-1,6869$	$+0,271$	$+2,586$
Goniometrische	$+0,5928$	$-1,6869$	$+0,271$	$+2,586$

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S	y_E
	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$	$\tan\beta =$
y_H	0	∞	$+0,276$	$+0,787$
y_N	∞	0	$+3,615$	$+1,270$
y_S	$+0,276$	$+3,616$	0	$+1,359$
y_E	$+0,787$	$+1,270$	$+1,359$	0

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S	y_E
Darstellung	$\alpha° =$	$\alpha° =$	$\alpha° =$	$\alpha° =$
Koeffizienten-	$+30,66$	$+120,66$	$+15,200$	$+68,863$
Anstiegs-	$+30,66$	$+120,66$	$+15,200$	$+68,863$
Goniometrische	$+30,66$	$+120,66$	$+15,197$	$+68,864$

[3] Beispiel entnommen aus: Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S	y_E
	$\beta^\circ =$	$\beta^\circ =$	$\beta^\circ =$	$\beta^\circ =$
y_H	0	$+90$	$+15,459$	$+38,203$
y_N	$+90$	0	$+74,540$	$+51,796$
y_S	$+15,456$	$+74,543$	0	$+53,663$
y_E	$+38,210$	$+51,789$	$+53,666$	0

$\Rightarrow$

	y_H	y_N	y_S
	$\rho^2_{XY} =$	$\rho^2_{XY} =$	$\rho^2_{XY} =$
y_S	$+0,753$	$+0,752$	-
y_E	$+0,753$	$+0,753$	$+0,753$

$\Rightarrow$

$$\frac{e}{f} = \pm 0,683$$

$\Rightarrow$

$$\varphi_{GRENZ} = \pm \arctan \tfrac{e}{f} = \pm 0,600 \equiv \pm 34,33^\circ \qquad \varphi_{VORH} = 0,535 \equiv 30,65^\circ$$

Und:

$$y_{GRENZ} = \pm 0,683 \cdot x_{GRENZ} + 37,5079$$

$\LaTeX\,2_\varepsilon$