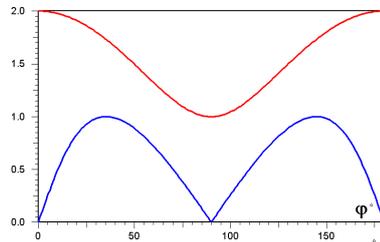


# Elliptische Regression



Punkte

Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc.

Erstellt: 22. Juni 2014 - Letzte Revision: 7. Januar 2024

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Elliptische Regression - Punkte einer gekippten Ellipse</b>	<b>2</b>
1.1	Begriffsbestimmungen . . . . .	2
1.2	MP = Mittelpunkt . . . . .	3
1.3	WB = Westlicher Brennpunkt . . . . .	4
1.4	OB = Östlicher Brennpunkt . . . . .	5
1.5	SZ = Scheinbarer Zenit . . . . .	6
1.6	SN = Scheinbarer Nadir . . . . .	7
1.7	WZ = Wahrer Zenit . . . . .	8
1.8	WN = Wahrer Nadir . . . . .	9
1.9	OS = Östlicher scheinbarer Scheitelpunkt . . . . .	10
1.10	WS = Westlicher scheinbarer Scheitelpunkt . . . . .	11
1.11	OW = Östlicher wahrer Scheitelpunkt . . . . .	12
1.12	WW = Westlicher wahrer Scheitelpunkt . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Grafische Darstellungen mit <math>e = 1</math> und <math>f = 2</math></b>	<b>14</b>

---

## Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

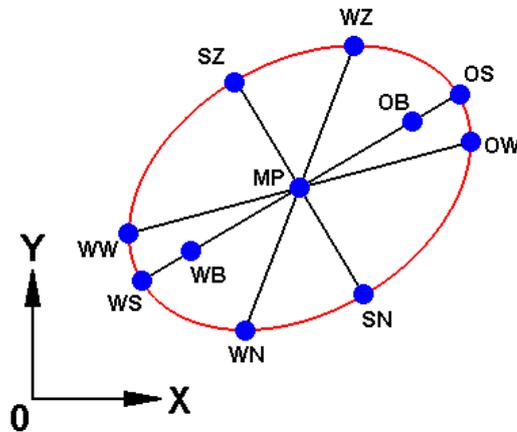
---



# 1 Elliptische Regression - Punkte einer gekippten Ellipse

## 1.1 Begriffsbestimmungen

Begriffe



[001]

### Punktbezeichnungen:

- MP = Mittelpunkt
- OB = Östlicher Brennpunkt
- WB = Westlicher Brennpunkt
- SZ = Scheinbarer Zenit
- SN = Scheinbarer Nadir
- WZ = Wahrer Zenit
- WN = Wahrer Nadir
- OS = Östlicher scheinbarer Scheitelpunkt
- WS = Westlicher scheinbarer Scheitelpunkt
- OW = Östlicher wahrer Scheitelpunkt
- WW = Westlicher wahrer Scheitelpunkt

### Beispielswerte:

$$a = 0,5928 \quad b = 37,5079 \quad c = -1,6869 \quad d = 1621,1455$$

$$A = 126935,44 \quad B = 34486,8$$

$$e = 262,22 \quad f = 383,9$$

$$\varphi = 0,535 \equiv 30,66^\circ$$

$$\varepsilon_L = 280,4$$

Zu den Berechnungsgrundlagen von  $A$ ;  $B$  und  $\varphi$  siehe <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

MP

**1.2 MP = Mittelpunkt**Die Hauptachse  $y_H$  der Ellipse ist definiert durch:<sup>2</sup>

$$y_H = a \cdot x + b$$

Die Nebenachse  $y_N$  der Ellipse ist definiert durch:

$$y_N = c \cdot x + d$$

Da Haupt- und Nebenachse senkrecht aufeinander stehen, gilt die Nebenbedingung:

$$c \cdot a = -1$$

Damit ist der Mittelpunkt definiert.

$$x_{MP} = \frac{d - b}{a - c}$$

 $\Rightarrow$ 

$$x_{MP} = \frac{a}{a^2 + 1} \cdot (d - b)$$

 $\Rightarrow$ 

$$x_{MP} = (d - b) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

Sowie:

$$y_{MP} = a \cdot \frac{d - b}{a - c} + b$$

 $\Rightarrow$ 

$$y_{MP} = \frac{1}{a^2 + 1} \cdot (a^2 \cdot d + b)$$

 $\Rightarrow$ 

$$y_{MP} = (a^2 \cdot d + b) \cdot \cos^2 \varphi$$

**Beispiel:**Mit den in <sup>3</sup> gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{MP} = 694,666 \quad y_{MP} = 449,306$$

 $\Rightarrow$ 

$$\sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{1}{a - c}$$

---

<sup>2</sup>Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“<sup>3</sup>Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

### 1.3 WB = Westlicher Brennpunkt

WB

Die lineare Exzentrizität  $\varepsilon_L$  bezeichnet den Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkt. Mit dieser Aussage ist  $\varepsilon_L$  definiert.

$$\varepsilon_L = \sqrt{(x_{WB} - x_{MP})^2 + (y_{WB} - y_{MP})^2}$$

Da der Brenn- und Mittelpunkt auf der Hauptachse liegen ist eine Nebenbedingung gegeben.

$$y_{WB} = a \cdot x_{WB} + b$$

Nun kann nach  $x_{WB}$  umgestellt und  $y_{WB}$  berechnet werden. Es ergibt sich damit:

$$x_{WB} = x_{MP} - \varepsilon_L \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

⇒

$$x_{WB} = x_{MP} - \varepsilon_L \cdot \cos \varphi$$

Sowie:

$$y_{WB} = y_{MP} - \varepsilon_L \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

⇒

$$y_{WB} = y_{MP} - \varepsilon_L \cdot \sin \varphi$$

#### Beispiel:

Mit den in <sup>4</sup> gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{WB} = 453,447 \quad y_{WB} = 306,347$$

<sup>4</sup>Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

OB

### 1.4 OB = Östlicher Brennpunkt

Die lineare Exzentrizität  $\varepsilon_L$  bezeichnet den Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkt. Mit dieser Aussage ist  $\varepsilon_L$  definiert.

$$\varepsilon_L = \sqrt{(x_{OB} - x_{MP})^2 + (y_{OB} - y_{MP})^2}$$

Da der Brenn- und Mittelpunkt auf der Hauptachse liegen ist eine Nebenbedingung gegeben.

$$y_{OB} = a \cdot x_{OB} + b$$

Nun kann nach  $x_{OB}$  umgestellt werden und  $y_{OB}$  berechnet. Es ergibt sich damit:

$$x_{OB} = x_{MP} + \varepsilon_L \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

⇒

$$x_{OB} = x_{MP} + \varepsilon_L \cdot \cos \varphi$$

Sowie:

$$y_{OB} = y_{MP} + \varepsilon_L \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

⇒

$$y_{OB} = y_{MP} + \varepsilon_L \cdot \sin \varphi$$

#### Beispiel:

Mit den in <sup>5</sup> gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{OB} = 935,885 \quad y_{OB} = 592,265$$

---

<sup>5</sup>Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

## 1.5 SZ = Scheinbarer Zenit

SZ

Die Berechnungsgrundlage des oberen Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) + \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Die Nebenachse  $y_N$  der Ellipse ist definiert durch:

$$y_N = c \cdot x + d$$

Da Haupt- und Nebenachse senkrecht aufeinander stehen, gilt die Nebenbedingung:

$$c \cdot a = -1$$

⇒

$$y_N = -\frac{1}{a} \cdot x + d$$

Nun kann nach  $x_{SZ}$  umgestellt werden und  $y_{SZ}$  berechnet. Es ergibt sich damit:

$$y_{SZ} = y_{MP} + e \cdot f \cdot \sqrt{\frac{A}{(B \cdot a + A)^2 + e^2 \cdot f^2 \cdot a^2}}$$

⇒

$$y_{SZ} = y_{MP} + e \cdot \cos \varphi$$

Sowie:

$$x_{SZ} = x_{MP} - a \cdot e \cdot f \cdot \sqrt{\frac{A}{(B \cdot a + A)^2 + e^2 \cdot f^2 \cdot a^2}}$$

⇒

$$x_{SZ} = x_{MP} - e \cdot \sin \varphi$$

### Beispiel:

Mit den in <sup>6</sup> gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{SZ} = 560,975 \quad y_{SZ} = 674,887$$

⇒

$$\sin \varphi = a \cdot f \cdot \sqrt{\frac{A}{(B \cdot a + A)^2 + e^2 \cdot f^2 \cdot a^2}} \quad \cos \varphi = f \cdot \sqrt{\frac{A}{(B \cdot a + A)^2 + e^2 \cdot f^2 \cdot a^2}}$$

⇒

$$\sin \varphi = a \cdot \sqrt{\frac{A}{f^2 + e^2 \cdot a^2}} \quad \cos \varphi = \sqrt{\frac{A}{f^2 + e^2 \cdot a^2}}$$

<sup>6</sup>Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

SN

## 1.6 SN = Scheinbarer Nadir

Die Berechnungsgrundlage des unteren Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) - \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Die Nebenachse  $y_N$  der Ellipse ist definiert durch:

$$y_N = c \cdot x + d$$

Da Haupt- und Nebenachse senkrecht aufeinander stehen, gilt die Nebenbedingung:

$$c \cdot a = -1$$

⇒

$$y_N = -\frac{1}{a} \cdot x + d$$

Nun kann nach  $x_{SN}$  umgestellt werden und  $y_{SN}$  berechnet. Es ergibt sich damit:

$$y_{SN} = y_{MP} - e \cdot \sqrt{\frac{A}{f^2 + e^2 \cdot a^2}}$$

⇒

$$y_{SN} = y_{MP} - e \cdot \cos \varphi$$

Sowie:

$$x_{SN} = x_{MP} + a \cdot e \cdot \sqrt{\frac{A}{f^2 + e^2 \cdot a^2}}$$

⇒

$$x_{SN} = x_{MP} + e \cdot \sin \varphi$$

### Beispiel:

Mit den in <sup>7</sup> gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{SN} = 828,357 \quad y_{SN} = 223,726$$

---

<sup>7</sup>Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

## 1.7 WZ = Wahrer Zenit

WZ

Die Berechnungsgrundlage des oberen und unteren Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Die erste Ableitung Null gesetzt ergibt den wahren Zenit.

$$x_{WZ} = x_{MP} + B \cdot \sqrt{\frac{A}{B^2 + f^2 \cdot e^2}}$$

⇒

$$x_{WZ} = x_{MP} + (f^2 - e^2) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi}}$$

Den Wert für  $x_{WZ}$  in die Berechnungsgrundlage des Bogens einsetzen ergibt  $y_{WZ}$ .

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A}}$$

⇒

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

Als Relation wurde zusätzlich definiert:

$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} = \frac{A}{B} + a + c = \frac{y_{WZ} - y_{MP}}{x_{WZ} - x_{MP}}$$

### Beispiel:

Mit den in <sup>8</sup> gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{WZ} = 810,134 \quad y_{WZ} = 747,975$$

⇒

$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} = 2,587$$

<sup>8</sup>Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

WN

### 1.8 WN = Wahrer Nadir

Die Berechnungsgrundlage des oberen und unteren Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Die erste Ableitung Null gesetzt ergibt den wahren Nadir.

$$x_{WN} = x_{MP} - B \cdot \sqrt{\frac{A}{B^2 + f^2 \cdot e^2}}$$

⇒

$$x_{WN} = x_{MP} - (f^2 - e^2) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi}}$$

Den Wert für  $x_{WN}$  in die Berechnungsgrundlage des Bogens einsetzen ergibt  $y_{WN}$ .

$$y_{WN} = y_{MP} - \sqrt{\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A}}$$

⇒

$$y_{WN} = y_{MP} - \sqrt{f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

Als Relation wurde zusätzlich definiert:

$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} = \frac{A}{B} + a + c = \frac{y_{WN} - y_{MP}}{x_{WN} - x_{MP}}$$

#### Beispiel:

Mit den in <sup>9</sup> gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{WN} = 579,198 \quad y_{WN} = 150,637$$

⇒

$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} = 2,587$$

<sup>9</sup>Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

**1.9 OS = Östlicher scheinbarer Scheitelpunkt**

OS

Die Berechnungsgrundlage des oberen Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) + \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Die Hauptachse  $y_H$  der Ellipse definiert die Mittelpunkte:

$$y_{MP} = a \cdot x_{MP} + b$$

Beide Funktionen werden gleichgesetzt. Ergebnis ist  $x_{OS}$ .

$$x_{OS} = x_{MP} + e \cdot f \cdot \sqrt{\frac{A}{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2}}$$

⇒

$$x_{OS} = x_{MP} + f \cdot \cos \varphi$$

Über  $y_H$  ist  $y_{OS}$  bekannt.

$$y_{OS} = a \cdot x_{OS} + b$$

⇒

$$y_{OS} = y_{MP} + f \cdot \sin \varphi$$

**Beispiel:**Mit den in <sup>10</sup> gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{OS} = 1024,902 \quad y_{OS} = 645,070$$

---

<sup>10</sup>Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

WS

**1.10 WS = Westlicher scheinbarer Scheitelpunkt**

Die Berechnungsgrundlage des unteren Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) - \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Die Hauptachse  $y_H$  der Ellipse definiert die Mittelpunkte:

$$y_{MP} = a \cdot x_{MP} + b$$

Beide Funktionen werden gleichgesetzt. Ergebnis ist  $x_{WS}$ .

$$x_{WS} = x_{MP} - e \cdot f \cdot \sqrt{\frac{A}{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2}}$$

 $\Rightarrow$ 

$$x_{WS} = x_{MP} - f \cdot \cos \varphi$$

Über  $y_H$  ist  $y_{WS}$  bekannt.

$$y_{WS} = a \cdot x_{WS} + b$$

 $\Rightarrow$ 

$$y_{WS} = y_{MP} - f \cdot \sin \varphi$$

**Beispiel:**Mit den in <sup>11</sup> gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{WS} = 364,430 \quad y_{WS} = 253,542$$

---

<sup>11</sup>Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

### 1.11 OW = Östlicher wahrer Scheitelpunkt

OW

Die Berechnungsgrundlage des oberen und unteren Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Betreffender Scheitelpunkt ist definiert durch:

$$+\sqrt{A - (x - x_{MP})^2} = -\sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

⇒

$$x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{A}$$

⇒

$$x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

Durch Einsetzen in den Bogen ergibt sich  $y_{OW}$ .

$$y_{OW} = y_{MP} + \frac{B}{\sqrt{A}}$$

⇒

$$y_{OW} = y_{MP} + (f^2 - e^2) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi}}$$

Als Relation wurde zusätzlich definiert:

$$A = (x_{OW} - x_{MP})^2$$

⇒

$$B = (y_{OW} - y_{MP}) \cdot (x_{OW} - x_{MP})$$

⇒

$$\frac{B}{A} = \frac{y_{OW} - y_{MP}}{x_{OW} - x_{MP}}$$

#### Beispiel:

Mit den in <sup>12</sup> gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{OW} = 1050,946 \quad y_{OW} = 546,103$$

⇒

$$\frac{B}{A} = 0,2717$$

<sup>12</sup>Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

WW

**1.12 WW = Westlicher wahrer Scheitelpunkt**

Die Berechnungsgrundlage des oberen und unteren Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Betreffender Scheitelpunkt ist definiert durch:

$$+\sqrt{A - (x - x_{MP})^2} = -\sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

⇒

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{A}$$

⇒

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

Durch Einsetzen in den Bogen ergibt sich  $y_{WW}$ .

$$y_{WW} = y_{MP} - \frac{B}{\sqrt{A}}$$

⇒

$$y_{WW} = y_{MP} - (f^2 - e^2) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi}}$$

Als Relation wurde zusätzlich definiert:

$$A = (x_{WW} - x_{MP})^2$$

⇒

$$B = (y_{WW} - y_{MP}) \cdot (x_{WW} - x_{MP})$$

⇒

$$\frac{B}{A} = \frac{y_{WW} - y_{MP}}{x_{WW} - x_{MP}}$$

**Beispiel:**Mit den in <sup>13</sup> gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{WW} = 338,386 \quad y_{WW} = 352,091$$

⇒

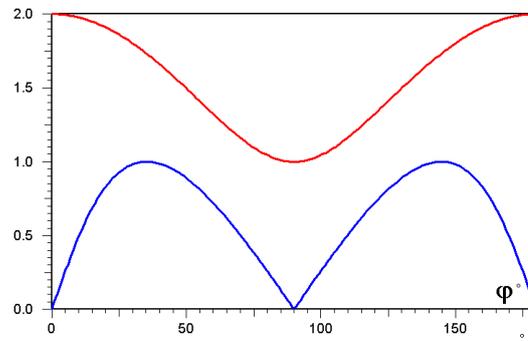
$$\frac{B}{A} = 0,2717$$

<sup>13</sup>Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

## 2 Grafische Darstellungen mit $e = 1$ und $f = 2$

Grafiken

$$I = \sqrt{\sin^2 \varphi + 4 \cdot \cos^2 \varphi} \quad II = 3 \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi + 4 \cdot \cos^2 \varphi}}$$

 $\Rightarrow$ L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>

