Elliptische Regression – Punkte

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

Erstellt: 22. Juni 2014 - Letzte Revision: 22. Juni 2014

Inhaltsverzeichnis

Literatur

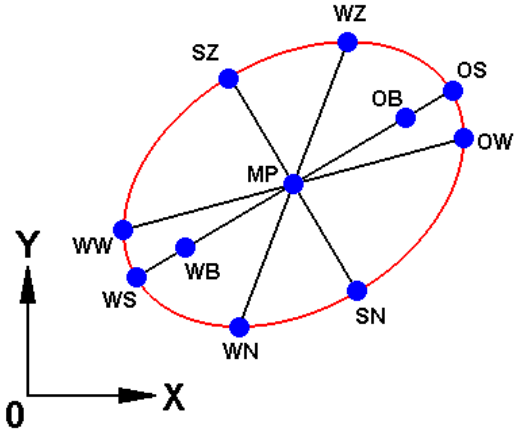
[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Elliptische Regression - Punkte einer gekippten Ellipse

1.1 Begriffsbestimmungen

Begriffe



[001]

Punktbezeichnungen:

MP = **M**ittel**p**unkt
OB = **Ö**stlicher **B**rennpunkt
WB = **W**estlicher **B**rennpunkt
SZ = **S**cheinbarer **Z**enit
SN = **S**cheinbarer **N**adir
WZ = **W**ahrer **Z**enit
WN = **W**ahrer **N**adir
OS = **Ö**stlicher **s**cheinbarer Scheitelpunkt
WS = **W**estlicher **s**cheinbarer Scheitelpunkt
OW = **Ö**stlicher **w**ahrer Scheitelpunkt
WW = **W**estlicher **w**ahrer Scheitelpunkt

Beispielswerte:

$$a = 0,5928 \qquad b = 37,5079 \qquad c = -1,6869 \qquad d = 1621,1455$$

$$A = 126935,44 \qquad B = 34486,8$$

$$e = 262,22 \qquad f = 383,9$$

$$\varphi = 0,535 \equiv 30,66^\circ$$

$$\varepsilon_L = 280,4$$

Zu den Berechnungsgrundlagen von A; B und φ siehe [1]

[1] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

1.2 MP = Mittelpunkt

MP

Die Hauptachse y_H der Ellipse ist definiert durch:[2]

$$y_H = a \cdot x + b$$

Die Nebenachse y_N der Ellipse ist definiert durch:

$$y_N = c \cdot x + d$$

Da Haupt- und Nebenachse senkrecht aufeinander stehen, gilt die Nebenbedingung:

$$c \cdot a = -1$$

Damit ist der Mittelpunkt definiert.

$$x_{MP} = \frac{d-b}{a-c}$$

$\Rightarrow$

$$x_{MP} = \frac{a}{a^2+1} \cdot (d-b)$$

$\Rightarrow$

$$x_{MP} = (d-b) \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi$$

Sowie:

$$y_{MP} = a \cdot \frac{d-b}{a-c} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_{MP} = \frac{1}{a^2+1} \cdot \left(a^2 \cdot d + b\right)$$

$\Rightarrow$

$$y_{MP} = \left(a^2 \cdot d + b\right) \cdot \cos^2\varphi$$

Beispiel:

Mit den in [3] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{MP} = 694,666 \qquad y_{MP} = 449,306$$

$\Rightarrow$

$$\sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{1}{a-c}$$

[2] Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“
[3] Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

WB

1.3 WB = Westlicher Brennpunkt

Die lineare Exzentrizität ε_L bezeichnet den Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkt. Mit dieser Aussage ist ε_L definiert.

$$\varepsilon_L = \sqrt{(x_{WB} - x_{MP})^2 + (y_{WB} - y_{MP})^2}$$

Da der Brenn- und Mittelpunkt auf der Hauptachse liegen ist eine Nebenbedingung gegeben.

$$y_{WB} = a \cdot x_{WB} + b$$

Nun kann nach x_{WB} umgestellt und y_{WB} berechnet werden. Es ergibt sich damit:

$$x_{WB} = x_{MP} - \varepsilon_L \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{WB} = x_{MP} - \varepsilon_L \cdot \cos\varphi$$

Sowie:

$$y_{WB} = y_{MP} - \varepsilon_L \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WB} = y_{MP} - \varepsilon_L \cdot \sin\varphi$$

Beispiel:

Mit den in [4] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{WB} = 453,447 \qquad y_{WB} = 306,347$$

[4] Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

1.4 OB = Östlicher Brennpunkt

OB

Die lineare Exzentrizität ε_L bezeichnet den Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkt. Mit dieser Aussage ist ε_L definiert.

$$\varepsilon_L = \sqrt{\left(x_{OB} - x_{MP}\right)^2 + \left(y_{OB} - y_{MP}\right)^2}$$

Da der Brenn- und Mittelpunkt auf der Hauptachse liegen ist eine Nebenbedingung gegeben.

$$y_{OB} = a \cdot x_{OB} + b$$

Nun kann nach x_{OB} umgestellt werden und y_{OB} berechnet. Es ergibt sich damit:

$$x_{OB} = x_{MP} + \varepsilon_L \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{OB} = x_{MP} + \varepsilon_L \cdot \cos\varphi$$

Sowie:

$$y_{OB} = y_{MP} + \varepsilon_L \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{OB} = y_{MP} + \varepsilon_L \cdot \sin\varphi$$

Beispiel:

Mit den in [5] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{OB} = 935,885 \qquad y_{OB} = 592,265$$

[5] Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

SZ

1.5 SZ = Scheinbarer Zenit

Die Berechnungsgrundlage des oberen Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) + \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Die Nebenachse y_N der Ellipse ist definiert durch:

$$y_N = c \cdot x + d$$

Da Haupt- und Nebenachse senkrecht aufeinander stehen, gilt die Nebenbedingung:

$$c \cdot a = -1$$

$\Rightarrow$

$$y_N = -\frac{1}{a} \cdot x + d$$

Nun kann nach x_{SZ} umgestellt werden und y_{SZ} berechnet. Es ergibt sich damit:

$$y_{SZ} = y_{MP} + e \cdot f \cdot \sqrt{\frac{A}{(B \cdot a + A)^2 + e^2 \cdot f^2 \cdot a^2}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{SZ} = y_{MP} + e \cdot \cos\varphi$$

Sowie:

$$x_{SZ} = x_{MP} - a \cdot e \cdot f \cdot \sqrt{\frac{A}{(B \cdot a + A)^2 + e^2 \cdot f^2 \cdot a^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{SZ} = x_{MP} - e \cdot \sin\varphi$$

Beispiel:

Mit den in [6] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{SZ} = 560,975 \qquad y_{SZ} = 674,887$$

$\Rightarrow$

$$\sin\varphi = a \cdot f \cdot \sqrt{\tfrac{A}{(B \cdot a+A)^2+e^2 \cdot f^2 \cdot a^2}} \qquad \cos\varphi = f \cdot \sqrt{\tfrac{A}{(B \cdot a+A)^2+e^2 \cdot f^2 \cdot a^2}}$$

$\Rightarrow$

$$\sin\varphi = a \cdot \sqrt{\tfrac{A}{f^2+e^2 \cdot a^2}} \qquad \cos\varphi = \sqrt{\tfrac{A}{f^2+e^2 \cdot a^2}}$$

[6] Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

1.6 SN = Scheinbarer Nadir

SN

Die Berechnungsgrundlage des unteren Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) - \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Die Nebenachse y_N der Ellipse ist definiert durch:

$$y_N = c \cdot x + d$$

Da Haupt- und Nebenachse senkrecht aufeinander stehen, gilt die Nebenbedingung:

$$c \cdot a = -1$$

$\Rightarrow$

$$y_N = -\frac{1}{a} \cdot x + d$$

Nun kann nach x_{SN} umgestellt werden und y_{SN} berechnet. Es ergibt sich damit:

$$y_{SN} = y_{MP} - e \cdot \sqrt{\frac{A}{f^2 + e^2 \cdot a^2}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{SN} = y_{MP} - e \cdot \cos \varphi$$

Sowie:

$$x_{SN} = x_{MP} + a \cdot e \cdot \sqrt{\frac{A}{f^2 + e^2 \cdot a^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{SN} = x_{MP} + e \cdot \sin \varphi$$

Beispiel:

Mit den in [7] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{SN} = 828,357 \qquad y_{SN} = 223,726$$

[7] Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

WZ

1.7 WZ = Wahrer Zenit

Die Berechnungsgrundlage des oberen und unteren Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Die erste Ableitung Null gesetzt ergibt den wahren Zenit.

$$x_{WZ} = x_{MP} + B \cdot \sqrt{\frac{A}{B^2 + f^2 \cdot e^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{WZ} = x_{MP} + \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}}$$

Den Wert für x_{WZ} in die Berechnungsgrundlage des Bogens einsetzen ergibt y_{WZ}.

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WZ} = y_{MP} + \sqrt{f^2 \cdot \sin^2\varphi + e^2 \cdot \cos^2\varphi}$$

Als Relation wurde zusätzlich definiert:

$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} = \frac{A}{B} + a + c = \frac{y_{WZ} - y_{MP}}{x_{WZ} - x_{MP}}$$

Beispiel:

Mit den in [8] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{WZ} = 810,134 \qquad y_{WZ} = 747,975$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} = 2{,}587$$

[8] Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

1.8 WN = Wahrer Nadir

WN

Die Berechnungsgrundlage des oberen und unteren Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Die erste Ableitung Null gesetzt ergibt den wahren Nadir.

$$x_{WN} = x_{MP} - B \cdot \sqrt{\frac{A}{B^2 + f^2 \cdot e^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{WN} = x_{MP} - \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi}}$$

Den Wert für x_{WN} in die Berechnungsgrundlage des Bogens einsetzen ergibt y_{WN}.

$$y_{WN} = y_{MP} - \sqrt{\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WN} = y_{MP} - \sqrt{f^2 \cdot \sin^2 \varphi + e^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

Als Relation wurde zusätzlich definiert:

$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} = \frac{A}{B} + a + c = \frac{y_{WN} - y_{MP}}{x_{WN} - x_{MP}}$$

Beispiel:

Mit den in [9] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{WN} = 579,198 \qquad y_{WN} = 150,637$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B^2 + f^2 \cdot e^2}{A \cdot B} = 2{,}587$$

[9] Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

OS

1.9 OS = Östlicher scheinbarer Scheitelpunkt

Die Berechnungsgrundlage des oberen Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) + \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Die Hauptachse y_H der Ellipse definiert die Mittelpunkte:

$$y_{MP} = a \cdot x_{MP} + b$$

Beide Funktionen werden gleichgesetzt. Ergebnis ist x_{OS}.

$$x_{OS} = x_{MP} + e \cdot f \cdot \sqrt{\frac{A}{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{OS} = x_{MP} + f \cdot \cos\varphi$$

Über y_H ist y_{OS} bekannt.

$$y_{OS} = a \cdot x_{OS} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_{OS} = y_{MP} + f \cdot \sin\varphi$$

Beispiel:

Mit den in [10] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{OS} = 1024,902 \qquad y_{OS} = 645,070$$

[10] Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

1.10 WS = Westlicher scheinbarer Scheitelpunkt

WS

Die Berechnungsgrundlage des unteren Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) - \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Die Hauptachse y_H der Ellipse definiert die Mittelpunkte:

$$y_{MP} = a \cdot x_{MP} + b$$

Beide Funktionen werden gleichgesetzt. Ergebnis ist x_{WS}.

$$x_{WS} = x_{MP} - e \cdot f \cdot \sqrt{\frac{A}{e^2 \cdot f^2 + (B - A \cdot a)^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x_{WS} = x_{MP} - f \cdot \cos\varphi$$

Über y_H ist y_{WS} bekannt.

$$y_{WS} = a \cdot x_{WS} + b$$

$\Rightarrow$

$$y_{WS} = y_{MP} - f \cdot \sin\varphi$$

Beispiel:

Mit den in [11] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{WS} = 364,430 \qquad y_{WS} = 253,542$$

[11] Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

OW

1.11 OW = Östlicher wahrer Scheitelpunkt

Die Berechnungsgrundlage des oberen und unteren Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Betreffender Scheitelpunkt ist definiert durch:

$$+\sqrt{A - (x - x_{MP})^2} = -\sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

$\Rightarrow$

$$x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{A}$$

$\Rightarrow$

$$x_{OW} = x_{MP} + \sqrt{e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

Durch Einsetzen in den Bogen ergibt sich y_{OW}.

$$y_{OW} = y_{MP} + \frac{B}{\sqrt{A}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{OW} = y_{MP} + \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi}{e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi}}$$

Als Relation wurde zusätzlich definiert:

$$A = (x_{OW} - x_{MP})^2$$

$\Rightarrow$

$$B = (y_{OW} - y_{MP}) \cdot (x_{OW} - x_{MP})$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B}{A} = \frac{y_{OW} - y_{MP}}{x_{OW} - x_{MP}}$$

Beispiel:

Mit den in [12] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{OW} = 1050,946 \qquad y_{OW} = 546,103$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B}{A} = 0,2717$$

[12] Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

1.12 WW = Westlicher wahrer Scheitelpunkt

WW

Die Berechnungsgrundlage des oberen und unteren Ellipsenbogens:

$$y - y_{MP} = \frac{B}{A} \cdot (x - x_{MP}) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

Betreffender Scheitelpunkt ist definiert durch:

$$+\sqrt{A - (x - x_{MP})^2} = -\sqrt{A - (x - x_{MP})^2}$$

$\Rightarrow$

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{A}$$

$\Rightarrow$

$$x_{WW} = x_{MP} - \sqrt{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi}$$

Durch Einsetzen in den Bogen ergibt sich y_{WW}.

$$y_{WW} = y_{MP} - \frac{B}{\sqrt{A}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{WW} = y_{MP} - \left(f^2 - e^2\right) \cdot \sqrt{\frac{\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi}{e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi}}$$

Als Relation wurde zusätzlich definiert:

$$A = (x_{WW} - x_{MP})^2$$

$\Rightarrow$

$$B = (y_{WW} - y_{MP}) \cdot (x_{WW} - x_{MP})$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B}{A} = \frac{y_{WW} - y_{MP}}{x_{WW} - x_{MP}}$$

Beispiel:

Mit den in [13] gezeigten Beispielswerten (siehe dort) ergeben sich folgende Ergebnisse.

$$x_{WW} = 338,386 \qquad y_{WW} = 352,091$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B}{A} = 0,2717$$

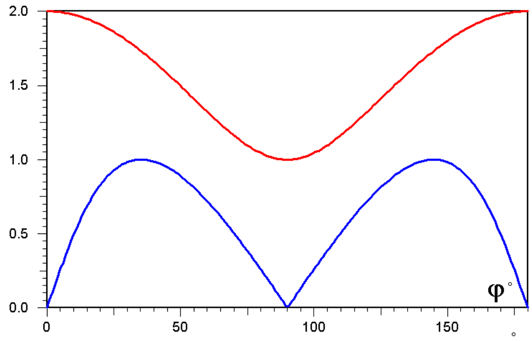
[13] Siehe vorher dazu: Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. „Elliptische Regression von Datenpunkten“

2 Grafische Darstellungen mit $e = 1$ und $f = 2$

Grafiken

$$I = \sqrt{\sin^2\varphi + 4\cdot\cos^2\varphi} \qquad II = 3\cdot\sqrt{\frac{\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi + 4\cdot\cos^2\varphi}}$$

$\Rightarrow$



LaTeX