Aufbau von faserbasierten Interferometern für die Quantenkryptografie

- Gehäuse, Phasenstabilisierung, Fasereinbau -

Masterarbeit
im Studiengang Elektrotechnik und
Informationstechnik
Vertiefungsrichtung Photonik

an der

FernUniversität in Hagen

in Kooperation mit der

HUMBOLDT-UNIVERSITÄT · ZU BERLIN ·

vorgelegt von

Björnstjerne Zindler

geboren am 13. November 1966 in Görlitz

eingereicht am 21. November 2011

Erstgutachter: Herr Professor Dr. A. Richter
Zweitgutachter: Herr Professor Dr. O. Benson

Meiner Mutter gewidmet
*03. Juli 1940
+22. September 2010

Faserdesign

- Einfluss der Faserverlegung auf die Mikrofonieempfindlichkeit -

- Mikrofonie -

- **Vorbetrachtung:**

Bei der Messung der Visibilität der vorhandenen Interferometer ist eine starke Mikrofonie für (akustische) Schwingungen aus der Umgebung aufgefallen. Diese Empfindlichkeit war so stark, dass eine normale Unterhaltung innerhalb des Labors zu Schwankungen im Messergebnis führte und Publikumsverkehr im Flur die Messergebnisse unablesbar machten.

Folgende Gründe könnten für diesen Effekt in Betracht kommen:

1) Störstellen, wie Mikrorisse, Versetzungen o. ä. innerhalb der Faser, welche eine Abhängigkeit von Faserbewegungen infolge äußerer Schwingungen besitzen und die Lichtleitung bzw. Visibilität beeinflussen infolge Dämpfung. Eine zusätzliche Dämpfung innerhalb eines Interferometerarmes führt zu einer Visibilitätsänderung. (Aufbau von faserbasierten Interferometern für die Quantenkryptografie, §6 - Anhang 3 - Herleitungen.)

2) Erzwungene Faserschwingungen von außen führen zu Resonanzeffekten. Die dabei auftretenden großen Auslenkungen der Faser aus der Normallage führen zu einer Spannungsänderung innerhalb der Faser. Auftretende Biege- oder Normalspannungen verändern die Dämpfungswerte mit den gleichen Konsequenzen wie in 1) (Aufbau von faserbasierten Interferometern für die Quantenkryptografie, §10 - Anhang 3 - Herleitungen.)

3) Erzwungene Faserschwingungen von außen führen zu Resonanzeffekten. Die dabei auftretenden großen Auslenkungen der Faser aus der Normallage führen zu einer Spannungsänderung innerhalb der Faser. Infolge der Materialkonstanten „Elastizitätsmodul“ und „Querdehnungsbeiwert“ kommt es zu einer Bogenlängenänderung der Faser. Diese Änderung von „ΔL“ führt zu einer Visibilitätsänderung. (Aufbau von faserbasierten Interferometern für die Quantenkryptografie, §3 - Anhang 3 - Herleitungen.)

- **Abhilfe:**

zu 1) Hierbei hilft lediglich das Isolieren der defekten Faser und Auswechseln dieser.

zu 2+3) Ein Ansatzpunkt wäre die Verringerung der Resonanzpunkte und die Minimierung der Faserauslenkungen.

Faserdesign
- Einfluss der Faserverlegung auf die Mikrofonieempfindlichkeit -

- Eigenfrequenzen, Verminderung der Anzahl -

- **Modellbildung:**

Faser auf einer Oberfläche liegend.

Liegt eine Faser auf einer Oberfläche, welche massemäßig viel schwerer ist als die Faser selbst und die Faser nicht allzusehr gekrümmt ist, kann die Faser als Starrkörper angesehen werden, welche Eigenfrequenzen besitzt. Diese sind definiert (nach FernUniversität in Hagen, Technische Mechanik III):

$$\omega_N = N \cdot \frac{\pi}{L} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$\Rightarrow$

$$f_N = \frac{N}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Mit:

N	=	0, 1, 2, 3, ...	
L	=	Faserlänge	[m]
E	=	Elastizitätsmodul	[N/m^2]
ρ	=	Dichte	[kg/m^3]

Dabei werden die Enden der Faser als nicht eingespannt angesehen:

Beispiel:

Eine Faser mit L = 1 m, E = $73 \cdot 10^9$ N/m^2 und ρ = 2400 kg/m^3 besitzt folgende Eigenfrequenzen (im akustischen Bereich):

N	f_N [Hz]
1	2 758
2	5 515
3	8 273
4	11 030
5	13 788
6	16 545
7	19 303

Die Anzahl der (unerwünschten) Resonanzstellen im akustischen Bereich beläuft sich demnach auf:

$$n = \left[\frac{20.000}{f_1}\right]$$

⇒

$$\boxed{n = 7}$$

Faser frei hängend und eingespannt.

Aus der alltäglichen Praxis sind wie z. B. bei Gitarrensaiten die Eigenfrequenzen diesmal abhängig von der Kraft innerhalb der Faser. So gilt diesmal (nach FernUniversität in Hagen, Technische Mechanik III):

$$\omega_N = N \cdot \frac{\pi}{L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot A}}$$

⇒

$$f_N = \frac{N}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho \cdot A}}$$

Mit:

N	=	0, 1, 2, 3, ...	
L	=	Faserlänge	[m]
F	=	Einspannkraft	[N]
ρ	=	Dichte	[kg/m^3]
A	=	Faserquerschnittsfläche	[m^2]

Beispiel:

Eine Faser mit L = 1 m, F = 1000 N, A = 49nm^2 und ρ = 2400 kg/m^3 besitzt folgende Eigenfrequenzen (im akustischen Bereich):

N	f_N [Hz]
1	1 458
2	2 916
3	4 374
4	5 832
5	7 290
6	8 748
7	10 206
8	11 664
9	13 122
10	14 580

11	16 038
12	17 496
13	18 954

Die Anzahl der Eigenfrequenzen im akustischen Bereich beläuft sich nun auf:

$$n = \left[\frac{20.000}{f_1}\right]$$

⇒

$$\boxed{n = 13}$$

- **Minimierung der Eigenfrequenzen:**

Die Anzahl der Eigenfrequenzen lassen sich durch das Einspannen der Faser minimieren. Dazu muss jedoch eine minimale Faserspannung aufgebracht werden, damit gilt:

$$\left[\frac{20.000}{f_1}\right]_{Eingespannt} \leq \left[\frac{20.000}{f_1}\right]_{Liegend}$$

⇒

$$f_{1;Eingespannt} \geq f_{1;Liegend}$$

⇒

$$\sqrt{\frac{F}{\rho \cdot A}} \geq \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

⇒

$$F \geq E \cdot A$$

⇒

$$\boxed{F_{MIN} = E \cdot A \leq F_{ZUL} = \sigma_B \cdot A}$$

Wobei „F_{ZUL}“ die maximal zulässige Kraft innerhalb einer Faser darstellt (σ_B Bruchspannung einer Glasfaser).

Beispiel:

Für vorgestellten Fall gilt dann mit $\sigma B = 0{,}1 \cdot 10^9$ N/m²:

$$F_{MIN} = 73 \cdot 10^9 \cdot 49 \cdot 10^{-9} \leq 0{,}1 \cdot 10^9 \cdot 49 \cdot 10^{-9}$$

⇒

$$\boxed{F_{MIN} = 3577[N] \geq 4{,}9[N]}$$

Die Faser reißt, bevor diese Methode zur Verminderung der Mikrofonie wirkt.

Faserdesign

- Einfluss der Faserverlegung auf die Mikrofonieempfindlichkeit -

- Resonanz, Verminderung der Amplituden -

- **Modellbildung:**

Angenommen wird eine Faser, welche eingespannt und mit der Kraft „F“ leicht gespannt ist. Unter diesen Umständen besitzt die Faser, wie schon vorhergehend berechnet, mehrere Eigenfrequenzen im akustischen Bereich. Für den Fall, dass die Unterlage bzw. die Einspannvorrichtung mit einer harmonischen Erregung gestört wird,

$$p(x)\cdot\sin(\omega t)$$

kann es unter Umständen zu Resonanz kommen. Diese Resonanz bewirkt eine starke Auslenkung der Faser aus ihrer Ruhelage mit all dessen Konsequenzen, die Mikrofonie der Faser.

Besitzt die Störung der eingespannten Faser oben angegebenen Zusammenhang, lassen sich die Amplituden der Faser durch folgende Berechnungsgrundlage angeben (nach FernUniversität in Hagen, Technische Mechanik III).

$$A_N = \frac{2L}{N^2\cdot\pi^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_N^2}}\cdot\frac{1}{F}\cdot\int_0^1 p(x)\cdot\sin\left(N\cdot\frac{\pi}{L}\cdot x\right)dx$$

Mit:

N	=	0, 1, 2, 3, ...	
L	=	Faserlänge	[m]
F	=	Einspannkraft	[N]
ω	=	Erregerkreisfrequenz	[1/s]
ω_N	=	Eigenkreisfrequenz	[1/s]
A	=	Faserquerschnittsfläche	[m^2]

Für den Fall, das ω gleich ω_N wird, gehen die Amplitudenwerte ins Unendliche. Im Allgemeinen verhindern dies Bewegungswiderstände und andere nichtlineare Effekte, dennoch sind die Amplituden in der Regel sehr groß.

- **Minimierung der Resonanzwirkung:**

Um die Resonanzwirkung, also die Mikrofonieempfindlichkeit herabzusetzen gibt es nur die Möglichkeit, alle anderen Terme um den Resonanzterm herum zu minimieren:

$$A_N^* = \frac{2L}{N^2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{1}{F} \cdot \int_0^1 p(x) \cdot \sin\left(N \cdot \frac{\pi}{L} \cdot x\right) dx \to 0$$

Daraus ergeben sich drei Erkenntnisse zur Mikrofonieverminderung:

1. Die Länge „L“ der Faser zwischen zwei Einspannpunkten muss so klein wie möglich gehalten werden. Das verringert gleichzeitig die Anzahl der Eigenfrequenzen innerhalb des akustischen Bereichs und stellt so eine wichtige Maßnahme dar.

2. Die Einspannkraft „F“ der Faser soll soweit erhöht werden, wie es möglich ist (unterhalb der Bruchspannung der Faser). Das verringert gleichzeitig die Anzahl der Eigenfrequenzen innerhalb des akustischen Bereichs und stellt somit eine wichtige Maßnahme dar.

3. Der Integralausdruck muss minimiert werden.

$$\int_0^1 p(x) \cdot \sin\left(N \cdot \frac{\pi}{L} \cdot x\right) dx \to 0$$

In einem abgeschlossenen, starren Interferometergehäuse ist anzunehmen, dass die Erregerfrequenz nicht konzentriert auf einen Punkt angreift, sondern gleichmäßig über die gesamte Fläche. Damit ist vereinfachbar:

$$p \cdot \int_0^1 \sin\left(N \cdot \frac{\pi}{L} \cdot x\right) dx \to 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{p \cdot L}{N \cdot \pi} \cdot \left[1 - \cos\left(N \cdot \frac{\pi}{L}\right)\right] \to 0$$

Daraus ergeben sich drei Erkenntnisse zur Mikrofonieverminderung:

1. Die Länge „L“ der Faser zwischen zwei Einspannpunkten muss so klein wie möglich gehalten werden. Das verringert gleichzeitig die Anzahl der Eigenfrequenzen innerhalb des akustischen Bereichs und stellt so eine wichtige Maßnahme dar.

2. Die Anfangsamplitude „p“ der Erregerfrequenz muss so klein wie möglich gehalten werden. Das entspricht einer sehr guten Dämpfung des Interferometergehäuses.

3. Der trigonometrische Ausdruck muss minimiert werden.

$$1-\cos\left(N\cdot\frac{\pi}{L}\right)\to 0$$

$\Rightarrow$

$$N\cdot\frac{\pi}{L}\to\arccos(1)$$

$\Rightarrow$

$$N\cdot\frac{\pi}{L}\to N\cdot\pi$$

$\Rightarrow$

$$L=1$$

In Verbindung mit der Maßnahme, die Faserlänge „L“ so klein wie möglich zu halten (rechnerisch gegen „0“), bedeutet „L = 1“ nichts weiter, als dass die Faser innerhalb der Integrationsgrenzen „0“ bis „1“ dem Integrationsweg folgt. Praktisch bedeutet dies, die Faser ist gespannt und besitzt keine größere Länge als der Integrationsweg selbst. Meint, die Bogenlänge der Faser ist nicht größer als die Länge des Integrationsweges, wie es z. B. bei der schon beschriebenen Faser, liegend auf einer Oberfläche möglich ist.

Kurz gesagt, wird eine Bogenlängenänderung der Faser verhindert, kommt es zu keiner Mikrofonie.

Faserdesign

- Einfluss der Faserverlegung auf die Mikrofonieempfindlichkeit -

- Resonanz, Einfluss der Amplituden -

- **Modellbildung:**

Wichtig für die Ergreifung von Maßnahmen zur Verhinderung von Mikrofonie der Interferometerboxen ist die Kenntnis des Einflusses auf die Eigenfrequenz durch die Erregerfrequenz. Dazu wird die bekannte Berechnungsgrundlage für „A_N" genutzt und umgeformt:

$$A_N^* = \frac{2L}{N^2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{1}{F} \cdot \int_0^1 p(x) \cdot \sin\left(N \cdot \frac{\pi}{L} \cdot x\right) dx$$

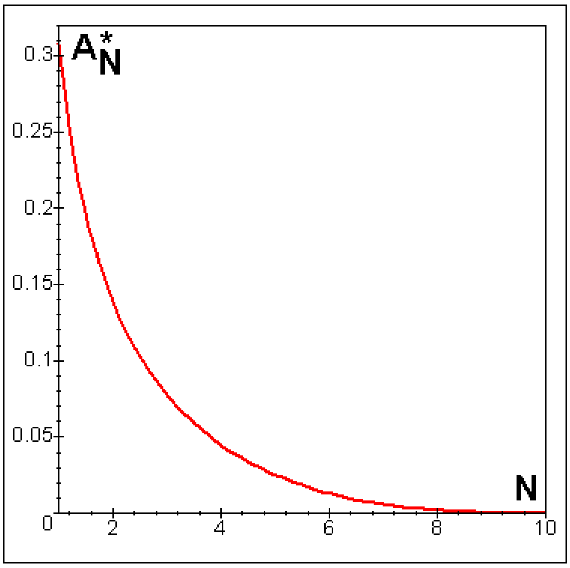
$\Rightarrow$

$$A_N^* \propto \frac{1}{N^2} \cdot \int_0^1 \sin\left(N \cdot \frac{2}{\pi} \cdot x\right) dx$$

$\Rightarrow$

$$A_N^* \propto \frac{\pi}{N^3} \cdot \sin^2\left(\frac{N}{\pi}\right)$$

$\Rightarrow$



Abbild 1: Der Einfluss der Erregerfrequenz auf die Eigenfrequenzen einer gespannten Faser.

Der numerische Wert von „A_N^*" ist wenig aussagekräftig, da es sich hier um eine Proportionalgleichung handelt. Deshalb soll der prozentuale Anteil jedes einzelnen „N" ermittelt werden.

$$A_N^{\%} = \frac{\int\limits_{N-0,5}^{N+0,5} A_N^* dN}{\int\limits_{0,5}^{\infty} A_N^* dN} \cdot 100\% \approx 151,64\% \cdot \int\limits_{N-0,5}^{N+0,5} A_N^* dN \qquad N = 1,2,3,....$$

$\Rightarrow$

N	$A_N^{\%}$ [%]	Kumuliertes $A_N^{\%}$ [%]
1	51, 426	51, 426
2	21, 578	73, 004
3	11, 921	84, 925
4	6, 882	91, 807
5	3, 856	95, 663
6	1, 993	97, 656
7	0, 892	98, 548
8	0, 306	98, 854
9	0, 057	98, 911
10	0, 005	98,916
11 ... ∞	1, 084	

Es ist zu sehen, dass ab der 5. Eigenfrequenz kein wesentlicher Einfluss mehr zu erwarten ist. Für obiges Beispiel bedeutet dies, ab 8500Hz wird keine Mikrofonie beobachtbar sein.

Durchgeführte Dämpfungsmaßnahmen beziehen sich daher für den Mittel- besonders jedoch für den Tieftonbereich.