Das Fassproblem als praktisches Beispiel des Isoperimetrischen Problems in der Ebene

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

Erstellt: 12. September 2013 – Letzte Revision: 6. Dezember 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Die Problemstellung **2**

2 Der Modellaufbau **3**

3 Herleitung der Arbeitsgleichung(en) **4**

4 Vor zur Praxis **5**

5 Zurück zum Anfang **6**

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

[Zin12] Björnstjerne Zindler. Das Isoperimetrische Problem mal anders. http://www.zenithpoint.de, 2012.

---

1 Die Problemstellung

Angenommen, jemand steht vor der Aufgabe ein Fass zu bauen, klassisch mit einem Boden und der
[001] definierten Anzahl an Dauben rund herum.

Ist die Breite der Fassdauben an deren Ende bekannt und dessen Anzahl, dann ist der Radius des
Problem Bodens eine Abhängige der beiden voraus genannten Größen.

Ist jedoch der Radius des Bodens bekannt, sowie die Daubenbreite, dann muss eine Anzahl der Dauben gefunden werden (welche natürlich ganzzahlig sein muss).

Günstig ist es auch die Daubenanzahl zu kennen, den Radius des Bodens und somit die Daubenbreite zu definieren.

Es liegt also ein Problem mit drei möglichen Unbekannten vor.

Die Daubenanzahl:	$n \in N = N_0 \setminus \{0\}$
Die Daubenbreite:	$c \in R^+ \setminus \{0\}$
Der Fassbodenradius:	$r \in R^+ \setminus \{0\}$

2 Der Modellaufbau

Aus dem Nachweis des Isoperimetrischen Problems in der Ebene für den Kreis ist ein Modell bekannt und deren grundsätzliche mathematische Zusammenhänge. Modell

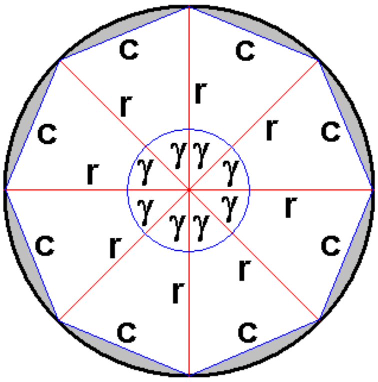

Abbildung 1: Modell des Fassproblems

Aus der Herleitung des Isoperimetrischen Problems ist bei der Flächenermittlung eine Berechnungsgrundlage bekannt zwischen $r; c$ und h_C der Höhe auf c im gleichschenkligen Dreieck. [Zin12]

$$r^2 = \frac{c^2}{4} + h_C^2$$

Aus der Herleitung des Isoperimetrischen Problems ist bei der Umfangermittlung eine Berechnungsgrundlage bekannt zwischen $r; c$ und γ, der Spitzwinkel im gleichschenkligen Dreieck.

$$c = 2 \cdot r \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$$

Mit diesen beiden Gleichungen kann das Fassproblem angegangen werden.

3 Herleitung der Arbeitsgleichung(en)

Herleitung

Der Spitzwinkel γ soll eliminiert werden. Es ist bekannt, dass dieser abhängig von der Anzahl n der eingeschreibenen Dreiecke im Fassboden ist und somit abhängig von der Anzahl der benutzten Fassdauben.

$$\gamma = \frac{2\pi}{n}$$

$\Rightarrow$

$$c = 2 \cdot r \cdot \sin \frac{\pi}{n}$$

Um ohne Winkelmesser arbeiten zu können wird noch h_C ermittelt.

$$h_C^2 = r^2 - \frac{c^2}{4}$$

$\Rightarrow$

$$h_C^2 = r^2 - r^2 \cdot \sin^2 \frac{\pi}{n}$$

$\Rightarrow$

$$h_C = r \cdot \cos \frac{\pi}{n}$$

4 Vor zur Praxis

Praxis

In der Praxis ist es wahrscheinlich, dass die Daubenbreite c und die Anzahl der Dauben n bekannt ist. Damit kann man den Radius r des Bodens berechnen

$$r = \frac{c}{2 \cdot \sin \frac{\pi}{n}}$$

und damit auch h_C, der innere Radius.

$$h_C = \frac{c}{2} \cdot \cot \frac{\pi}{n}$$

5 Zurück zum Anfang

Zum Anfang

Zurück zum Isoperimetrischen Problem bedeutet, dass für unser Fass gelten muss:

$$U_{MAX} \geq L \geq U_{MIN}$$

$\Rightarrow$

$$2 \cdot \pi \cdot r \geq n \cdot c \geq 2 \cdot \pi \cdot h_c$$

Die Werte von c und h_C werden durch die nun bekannten Berechnungsgrundlagen ersetzt.

$$2 \cdot \pi \cdot r \geq n \cdot 2 \cdot r \cdot \sin\frac{\pi}{n} \geq 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \cos\frac{\pi}{n}$$

$\Rightarrow$

$$2 \cdot r \cdot \pi \geq 2 \cdot r \cdot n \cdot \sin\frac{\pi}{n} \geq 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \cos\frac{\pi}{n}$$

Um den Grenzfall zu erzwingen muss nun gelten.

$$n \cdot \sin\frac{\pi}{n} = \pi \qquad \cos\frac{\pi}{n} = 1$$

$\Rightarrow$

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n}$$

Diese transzendente Gleichung ist für $\frac{\pi}{n} = 0$ wahr, bedeutet für n:

$$n \rightarrow \infty$$

Womit gleichzeitig $\cos\frac{\pi}{n} = 1$ erfüllt ist.

Eine unendliche Anzahl an Dauben um den Fassboden herum ist praktisch ungünstig anzusehen, jedoch beweist es das Isoperimetrische Problem in der Ebene auf eine weitere, andere Art.

LaTeX