

Methode einer Fehleranalyse von systematischen Messfehlern für die Time-Bin-Konfiguration unter cw-Laserbestrahlung

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

Erstellt: 09. Mai 2012 – Letzte Revision: 8. Dezember 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung zum Thema	3
1.1	Voraussetzungen	3
1.2	Herleitung der fehlerkorrigierten Visibilität	5
1.3	Herleitung des Time- Bin- Kriteriums - TBK und des Signal- Rausch- Abstandes - SNR	6
2	Tabellen und Grafiken	7
2.1	Revers- Tabelle der Abhängigkeiten von der Visibilität, TBK, fehlerkorrigierter Visibilität und Zentralpeakzustand	7
2.2	Revers- Tabelle in grafischer Übersicht	9
2.3	Invers- Tabelle der Abhängigkeiten von der Visibilität	11
2.4	Invers- Tabelle in grafischer Übersicht	12

3 Methoden und Beispiele	14
3.1 Vorgehensweise I	14
3.2 Beispielswerte Interferometer der 1. Generation I	15
3.3 Beispielswerte Interferometer der 2. Generation I	17
3.4 Vorgehensweise II	19
3.5 Beispielswerte Interferometer der 1. Generation II	21
3.6 Beispielswerte Interferometer der 2. Generation II	23
3.7 Auswertung der Beispielswerte Interferometer der 1. Generation	25
3.8 Auswertung der Beispielswerte Interferometer der 2. Generation	27

Literatur

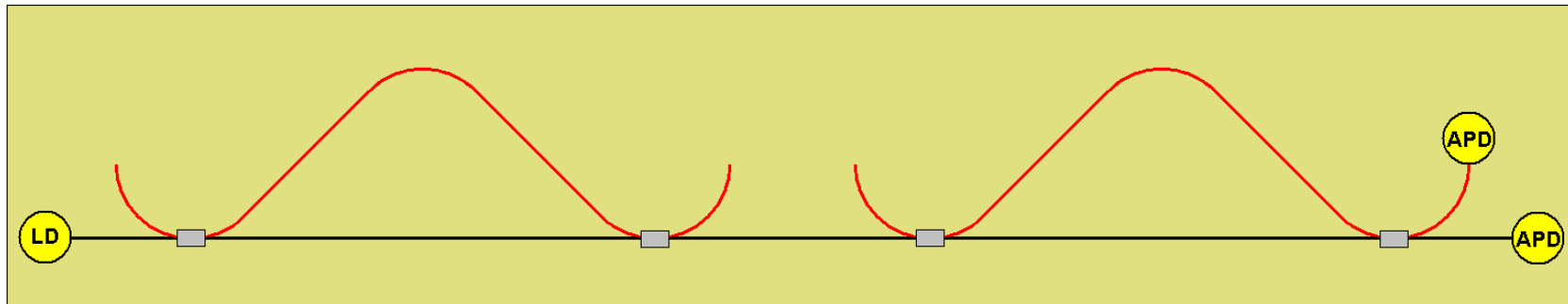
[001] Keine für vorliegenden Text.

1 Einleitung zum Thema

1.1 Voraussetzungen

[001]

- Tim- Bin- Implementierung nach Gisin et al., Rev. of Mod Phys. 74 No. 1 (2002).
- Bestrahlung mit einer cw- Laserquelle.
- Detektion **aller** Peaks mittels Photodiode.



- Auswertung im **normierten** Raum gemäß:

$$\frac{I_1}{I_m} = 1$$

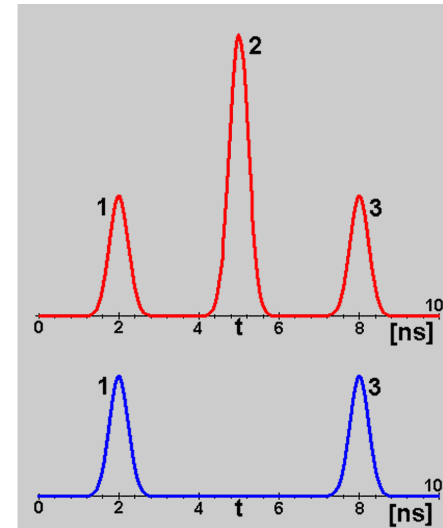
$$\frac{I_2}{I_m} = 4 \cdot \cos^2 \frac{\Delta\phi}{2} = 0 \dots 4$$

$$\frac{I_3}{I_m} = 1$$

$$\text{MAX} = 1 + 4 + 1$$

$$\text{MIN} = 1 + 0 + 1$$

$$V = \frac{1}{2}$$



1.2 Herleitung der fehlerkorrigierten Visibilität

Es wird ein funktioneller Zusammenhang zwischen der Visibilität V und der fehlerkorrigierten Visibilität \tilde{V} hergestellt.

$$\tilde{V} \propto V$$

Eine termneutrale Erweiterung von V mit den MAX und MIN- Werten wird durchgeführt.

$$\tilde{V} \propto \frac{MAX}{MIN} \cdot V \cdot \frac{MIN}{MAX}$$

Der Quotient MAX/MIN kann erweitert werden mit einfachen funktionellen Zusammenhängen.

$$1 + V = 2 \cdot \frac{MAX}{MAX + MIN} \qquad 1 - V = 2 \cdot \frac{MIN}{MAX + MIN}$$

⇒

$$\frac{MAX}{MIN} = \frac{1 + V}{1 - V}$$

⇒

$$\tilde{V} \propto \frac{1 + V}{1 - V} \cdot \frac{MIN}{MAX} \cdot V$$

Ein äquivalenter Zusammenhang wird erlangt durch die Festlegung einer Konstante für den Punkt maximaler Visibilität.

$$V_{Max} = \frac{1}{2}$$

⇒

$$\tilde{V} = 3 \cdot \frac{MIN}{MAX} \cdot V$$

1.3 Herleitung des Time- Bin- Kriteriums - TBK und des Signal- Rausch- Abstandes - SNR

$$\tilde{V} = 3 \cdot \frac{MIN}{MAX} \cdot V$$

Bei der Herleitung wurde anfänglich definiert.

$$\tilde{V} \propto V$$

Damit kann das TBK abgeleitet werden.

$$3 \cdot \frac{MIN}{MAX} = 1$$

⇒

$$TBK = 3 \cdot \frac{MIN}{MAX}$$

Für ideale MIN und MAX- Verhältnisse gilt demnach ein $TBK = 1$. Für den Quotient MAX/MIN kann weiter definiert werden.

$$TBK = \frac{3}{SNR}$$

⇒

$$TBK \cdot SNR = 3$$

Für ideale MIN und MAX- Verhältnisse gilt demnach ein $SNR = 3$.¹

¹In Dezibel ist entsprechend: $SNR_{db} = 10 \cdot \lg 3 \approx 4,77$

2 Tabellen und Grafiken

2.1 Revers- Tabelle der Abhängigkeiten von der Visibilität, TBK, fehlerkorrigierter Visibilität und Zentralpeakzustand

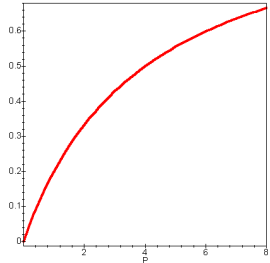
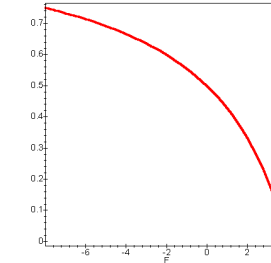
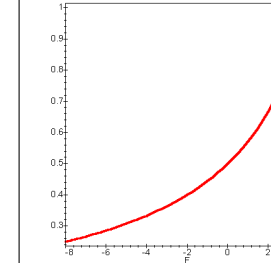
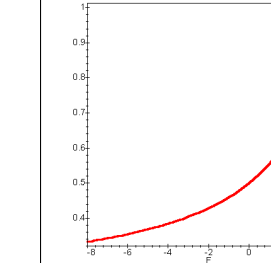
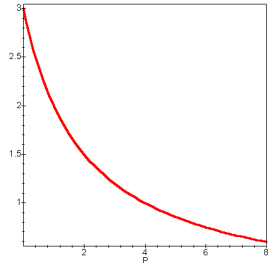
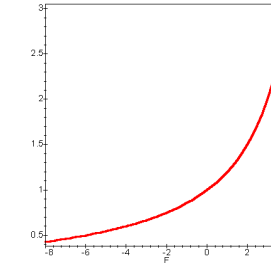
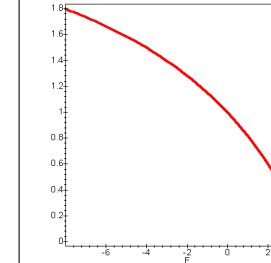
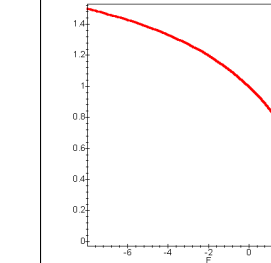
Abhängige	MIN- MAX Abhängigkeiten	$P(\psi_M)$ Abhängigkeiten	F- Abhängigkeiten		
MAX	MAX	$2 + P(\psi_M)$	$6 - F$	$\frac{1}{2} \cdot (12 - F)$	$\frac{3}{4} \cdot (8 - F)$
MIN	MIN	2	2	$\frac{1}{2} \cdot (4 - F)$	$\frac{1}{2} \cdot (4 - F)$
V	$\frac{MAX-MIN}{MAX+MIN}$	$\frac{P(\psi_M)}{4+P(\psi_M)}$	$\frac{4-F}{8-F}$	$4 \cdot \frac{1}{8-F}$	$\frac{16-F}{32-5 \cdot F}$
TBK	$3 \cdot \frac{MIN}{MAX}$	$\frac{6}{2+P(\psi_M)}$	$6 \cdot \frac{1}{6-F}$	$3 \cdot \frac{4-F}{12-F}$	$2 \cdot \frac{4-F}{8-F}$
\tilde{V}	$3 \cdot \frac{MIN}{MAX} \cdot \frac{MAX-MIN}{MAX+MIN}$	$\frac{6 \cdot P(\psi_M)}{(2+P(\psi_M)) \cdot (4+P(\psi_M))}$	$6 \cdot \frac{4-F}{(6-F) \cdot (8-F)}$	$12 \cdot \frac{4-F}{(8-F) \cdot (12-F)}$	$2 \cdot \frac{(4-F) \cdot (16-F)}{(8-F) \cdot (32-5 \cdot F)}$
$P(\psi_M)$	$MAX - MIN$	$2 \cdot \left(\frac{MAX}{MIN} - 1\right)$	$4 - F$	$16 \cdot \frac{1}{4-F}$	$\frac{16-F}{4-F}$
			Typ A	Typ B	Typ C
			$-\infty < F \leq 4$		

Fortsetzung der Tabelle nächste Seite.

Fortsetzung der Tabelle von vorher gehender Seite.

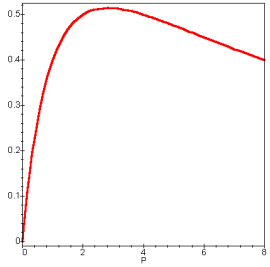
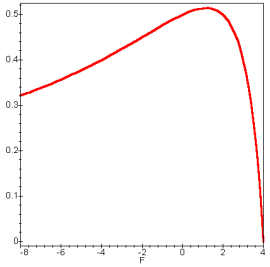
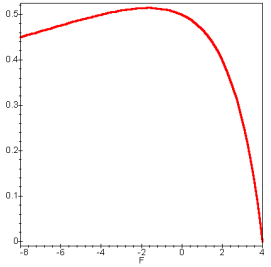
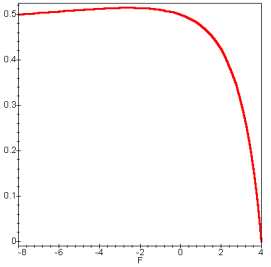
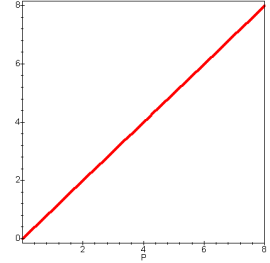
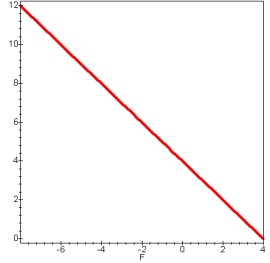
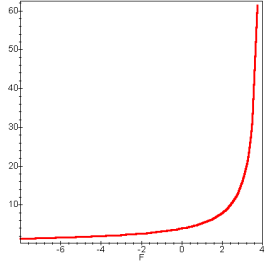
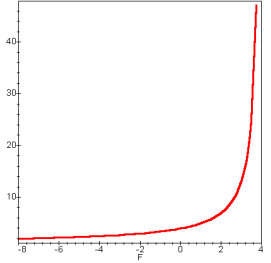
Abhängige	MIN- MAX Abhängigkeiten	$P(\psi_M)$ Abhängigkeiten	F- Abhängigkeiten
	Allgemein gültig	Nur im normierten Raum gültig	
		Fehlerfrei	Fehlertolerant
<p>Typ A: Zentralpeak verändert (zu groß oder zu klein)</p> <p>Typ B: Satelliten verändert (zu klein oder zu groß)</p> <p>Typ C: Sonstiges (zusätzlicher Untergrund, Dämpfung unsymmetrisch)</p>			

2.2 Revers- Tabelle in grafischer Übersicht

	$P(\psi_M)$	F - Typ A	F - Typ B	F - Typ C
V				
TBK				

Fortsetzung der Tabelle nächste Seite.

Fortsetzung der Tabelle von vorher gehender Seite.

	$P(\psi_M)$	F - Typ A	F - Typ B	F - Typ C
\tilde{V}				
$P(\psi_M)$				

2.3 Invers- Tabelle der Abhängigkeiten von der Visibilität

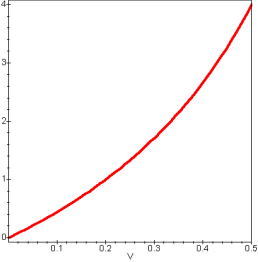
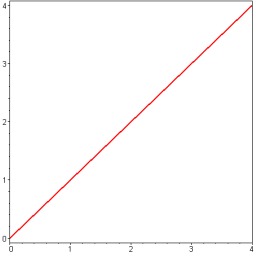
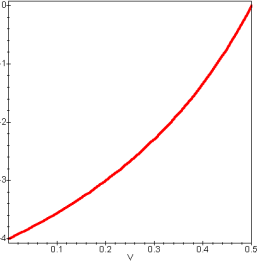
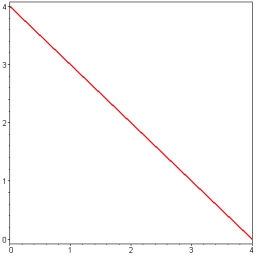
Abhängige	V- Abhängigkeiten	$P(\psi_M)$ - Abhängigkeiten				
$P(\psi_M)$	$4 \cdot \frac{V}{1-V}$	1			Fehlerfrei	Nur im normierten Raum gültig
F	$4 \cdot \frac{2 \cdot V - 1}{V - 1}$	$4 - P(\psi_M)$	$-\infty < F \leq 4$	Typ A	Fehlertolerant	Nur im normierten Raum gültig
F	$4 \cdot \frac{2 \cdot V - 1}{V}$	$4 \cdot \frac{P(\psi_M) - 4}{P(\psi_M)}$	$-\infty < F \leq 4$	Typ B	Fehlertolerant	Nur im normierten Raum gültig
F	$16 \cdot \frac{2 \cdot V - 1}{5 \cdot V - 1}$	$4 \cdot \frac{P(\psi_M) - 4}{P(\psi_M) - 1}$	$-\infty < F \leq 4$	Typ C	Fehlertolerant	Nur im normierten Raum gültig

Typ A: Zentralpeak verändert (zu groß oder zu klein)

Typ B: Satelliten verändert (zu klein oder zu groß)

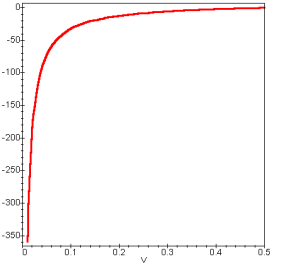
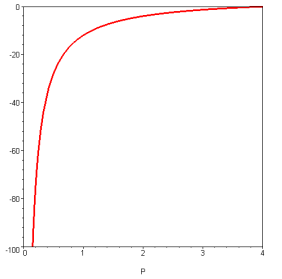
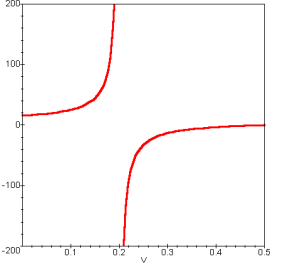
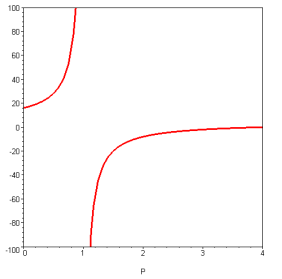
Typ C: Sonstiges (zusätzlicher Untergrund, Dämpfung unsymmetrisch)

2.4 Invers- Tabelle in grafischer Übersicht

Abhängige	V- Abhängigkeiten	$P\psi_M$ - Abhängigkeiten		
$P(\psi_M)$				
F			Typ A	Zentralpeak verändert (zu groß oder zu klein)

Fortsetzung der Tabelle nächste Seite.

Fortsetzung der Tabelle von vorher gehender Seite.

Abhängige	V- Abhängigkeiten	$P\psi_M$ - Abhängigkeiten		
F			Typ B	Satelliten verändert (zu klein oder zu groß)
F			Typ C	Sonstiges (zusätzlicher Untergrund, Dämpfung unsymmetrisch)

3 Methoden und Beispiele

3.1 Vorgehensweise I

Messen des MAX- Wertes.

$$MAX$$

Messen des MIN- Wertes.

$$MIN$$

Berechnen der Visibilität (! Entspricht einem Übergang in den normierten Bereich !).

$$V = \frac{MAX - MIN}{MAX + MIN}$$

Berechnen des Time- Bin- Kriterium.

$$TBK = 3 \cdot \frac{MIN}{MAX} = 3 \cdot \frac{1 - V}{1 + V}$$

Berechnen der fehlerkorrigierten Visibilität.

$$\tilde{V} = TBK \cdot V = 3 \cdot V \cdot \frac{1 - V}{1 + V}$$

Berechnen der Intensität des Zentralpeaks

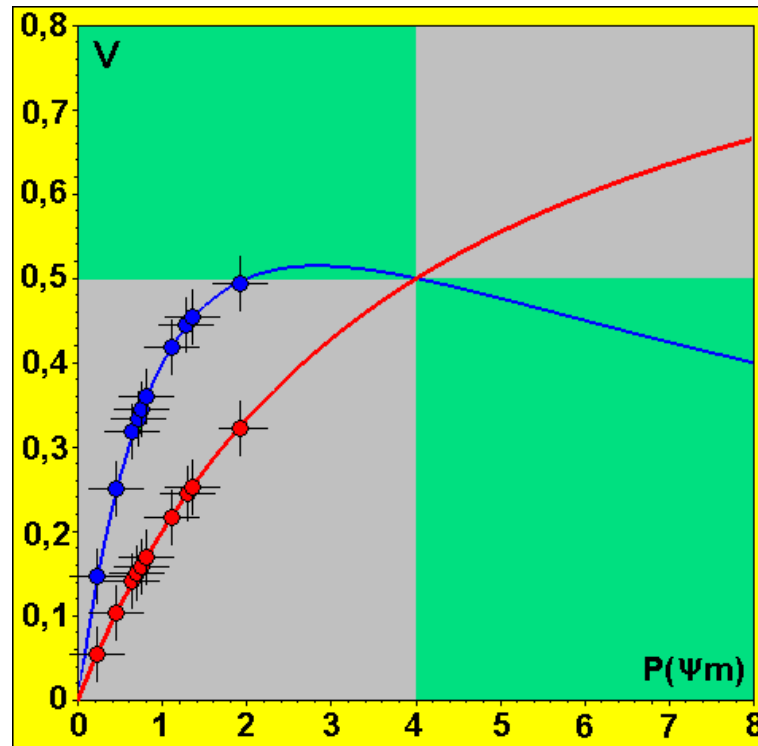
$$P(\psi_M) = 2 \cdot \left(\frac{MAX}{MIN} - 1 \right) = 4 \cdot \frac{V}{1 - V}$$

3.2 Beispielswerte Interferometer der 1. Generation I

Numerische Auflistung:

	MAX	MIN	V	TBK	\tilde{V}	$P(\psi_M)$
1	2,652	2,378	0,054	2,690	0,145	0,230
2	2,896	2,182	0,141	2,260	0,319	0,650
3	3,079	2,269	0,151	2,210	0,334	0,715
4	2,757	2,241	0,103	2,439	0,251	0,460
5	3,131	2,277	0,158	2,182	0,345	0,750
6	3,033	2,155	0,169	2,132	0,360	0,814
7	3,221	1,955	0,245	1,821	0,446	1,295
8	3,089	1,843	0,253	1,790	0,454	1,352
9	3,499	1,789	0,323	1,534	0,495	1,911
∅	3,160	2,032	0,217	1,929	0,419	1,110

Grafische Darstellung



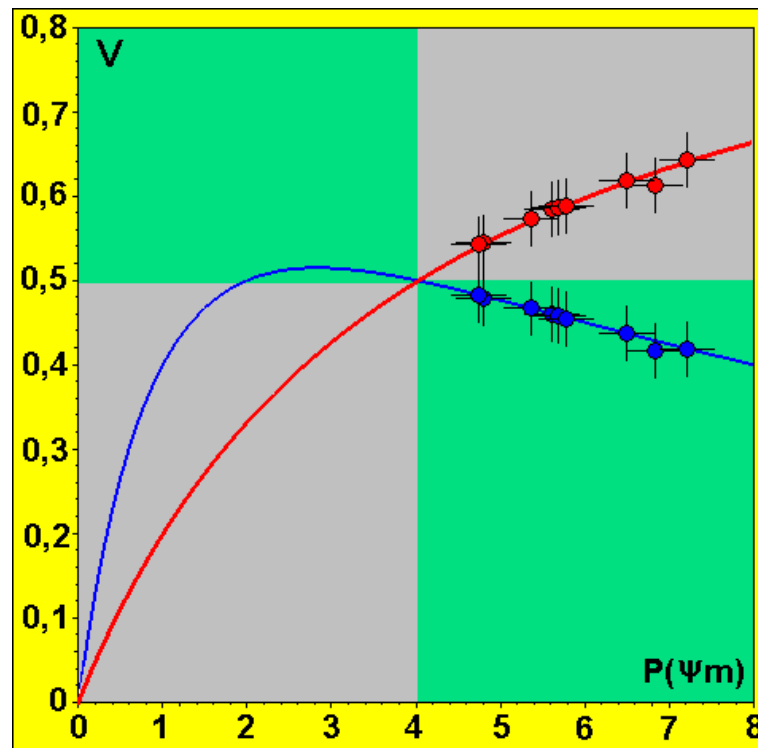
Der funktionelle Zusammenhang zwischen $P\psi_M$, der **Visibilität** und der fehlerkorrigierten **Visibilität** .

3.3 Beispielswerte Interferometer der 2. Generation I

Numerische Auflistung:

	MAX	MIN	V	TBK	\tilde{V}	$P(\psi_M)$
1	0,396	0,104	0,584	0,788	0,460	5,614
2	0,368	0,100	0,573	0,815	0,467	5,362
3	0,400	0,104	0,587	0,780	0,458	5,692
4	0,408	0,120	0,545	0,882	0,480	4,803
5	0,424	0,096	0,613	0,679	0,416	6,337
6	0,408	0,096	0,619	0,706	0,437	6,499
7	0,424	0,092	0,643	0,651	0,419	7,217
8	0,432	0,128	0,543	0,889	0,483	4,749
∅	0,408	0,105	0,588	0,772	0,483	5,702

Grafische Darstellung



Der funktionelle Zusammenhang zwischen P_{ψ_M} , der **Visibilität** und der fehlerkorrigierten **Visibilität** .

3.4 Vorgehensweise II

Berechnen aller typgebundenen Fehlerwerte.

$$F_A = 4 - P(\psi_M) \quad F_B = 4 \cdot \frac{P(\psi_M)-4}{P(\psi_M)} \quad F_C = 4 \cdot \frac{P(\psi_M)-4}{P(\psi_M)-1}$$

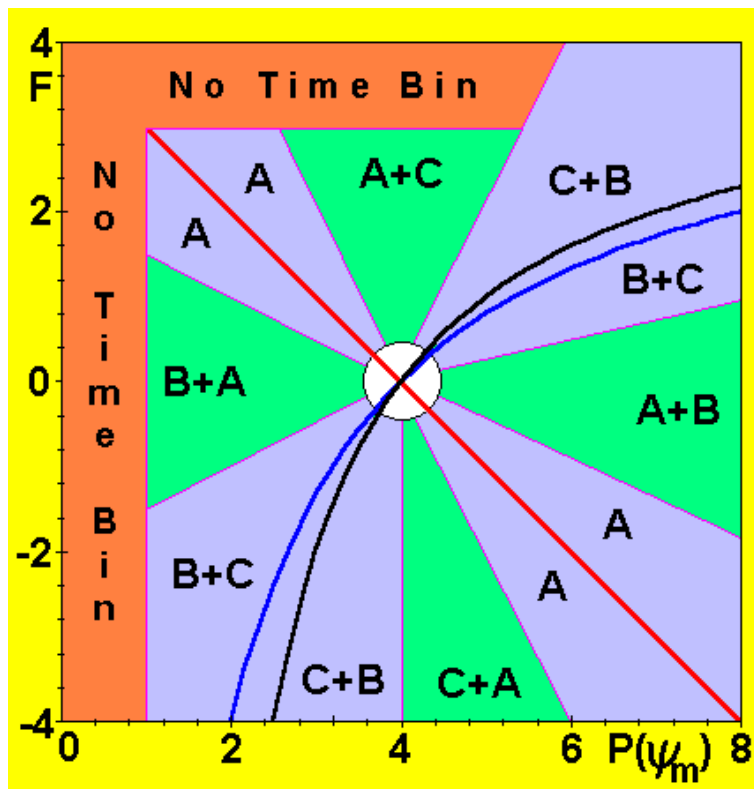
Plausibilitätskontrolle der Werte. Liegt vor

$$F > 4 \rightarrow TBK > 2 \rightarrow P(\psi_M) < 1$$

dann arbeiten die Interferometer nicht in Time- Bin.

Abschätzen der ursächlichen systematischen Fehler. Grafische Darstellung nächste Seite folgend.

Grafische Darstellung



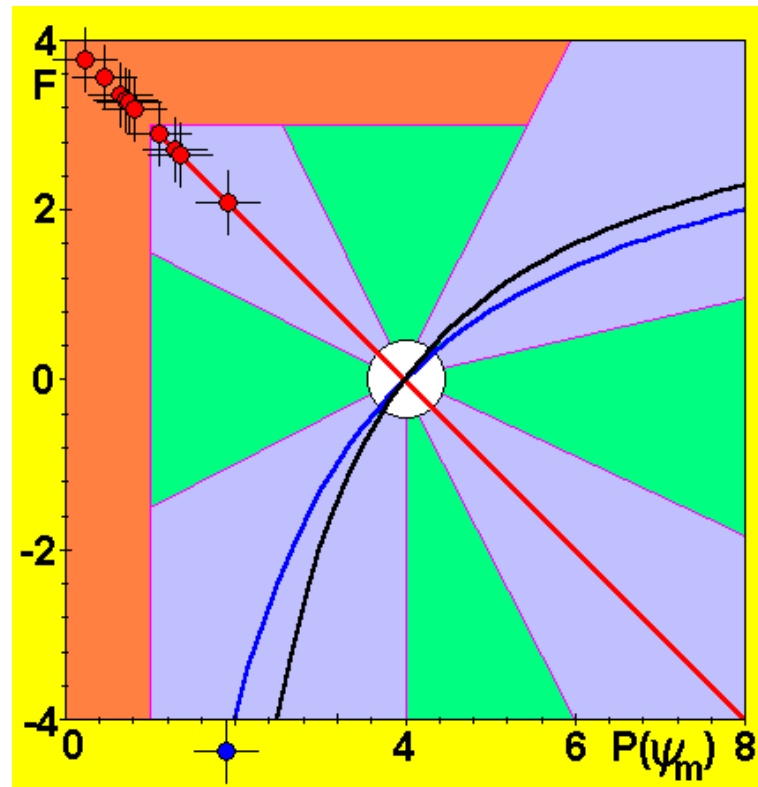
Die Fehlerwerte der Typen **A**, **B** und **C** grafisch dargestellt.

3.5 Beispielswerte Interferometer der 1. Generation II

Numerische Auflistung:

	$P(\psi_M)$	F_A	F_B	F_C
1	0, 230	3, 770	-65, 565	+19, 584
2	0, 650	3, 350	-20, 615	+38, 286
3	0, 715	3, 285	-18, 378	+46, 105
4	0, 460	3, 540	-30, 783	+26, 223
5	0, 750	3, 250	-17, 334	+52, 000
6	0, 814	3, 186	-15, 656	+68, 516
7	1, 295	2, 705	- 8, 355	-36, 678
8	1, 352	2, 648	- 7, 834	-30, 091
9	1, 911	2, 089	- 4, 373	- 8, 109
⊙	1, 110	2, 890	-10, 414	-105, 091

Grafische Darstellung



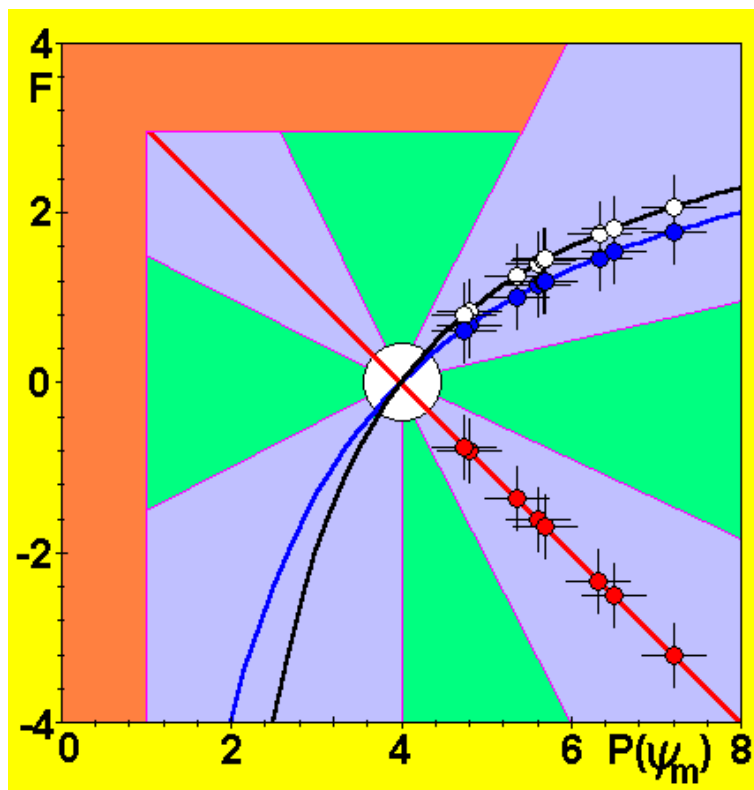
Die Fehlerwerte der Typen **A**, **B** und **C** grafisch dargestellt (**B** und **C** liegen außerhalb des Wertebereichs).

3.6 Beispielswerte Interferometer der 2. Generation II

Numerische Auflistung:

	$P(\psi_M)$	F_A	F_B	F_C
1	5,614	-1,614	1,150	1,399
2	5,362	-1,362	1,016	1,249
3	5,692	-1,692	1,189	1,442
4	4,803	-0,803	0,669	0,844
5	6,337	-2,337	1,475	1,752
6	6,499	-2,499	1,538	1,818
7	7,217	-3,217	1,783	2,070
8	4,749	-0,749	0,631	0,799
⊙	5,702	-1,702	1,194	1,448

Grafische Darstellung



Die Fehlerwerte der Typen **A**, **B** und **C** grafisch dargestellt.

3.7 Auswertung der Beispielswerte Interferometer der 1. Generation

	$P(\psi_M)$	F_A	F_B	F_C
⊙	1, 110	2, 890	-10, 414	-105, 091

Der Zentralpeak besitzt im Mittel nur eine Höhe von 1,11 von 4,00 im normierten Raum. Das entspricht 28% der maximalen möglichen Höhe. Der wahrscheinliche Grund, der Fehlerwert F_C ist dominierend, ein extrem hoher Untergrund stört die Nutzung der Time- Bin- Kodierung, der Zentralpeak geht förmlich im Rauschen unter.

Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Fehlertypen:

Typ A: Zentralpeak verändert (zu groß oder zu klein)

$$F_A = \frac{2,890}{2,890 + 10,414 + 105,091} = \frac{2,890}{118,395} = 0,024 \equiv 2,44\%$$

Typ B: Satelliten verändert (zu klein oder zu groß)

$$F_B = \frac{10,414}{2,890 + 10,414 + 105,091} = \frac{10,414}{118,395} = 0,088 \equiv 8,80\%$$

Typ C: Sonstiges (zusätzlicher Untergrund, Dämpfung unsymmetrisch)

$$F_C = \frac{105,091}{2,890 + 10,414 + 105,091} = \frac{105,091}{119,395} = 0,888 \equiv 88,76\%$$

→ Ungenügende Interferenz erzeugt Untergrund

Aus dem durchschnittlichen TBK kann der reale Signal- Rauschabstand ermittelt werden (optimal 4,77db):

$$TBK \cdot SNR = 3$$

⇒

$$SNR = 1,556 \equiv 1,92\text{db}$$

3.8 Auswertung der Beispielswerte Interferometer der 2. Generation

	$P(\psi_M)$	F_A	F_B	F_C
⊙	5,702	-1,702	1,194	1,448

Der Zentralpeak besitzt im Mittel eine Höhe von 5,70 von 4,00 im normierten Raum. Das entspricht 143% der maximalen Höhe. Der wahrscheinliche Grund, die Fehlerwerte F_A und F_C sind in etwa gleich, eine Verkleinerung eines Satelliten durch Dämpfung auf einem kurzen Weg möglich. Der sehr hohe Signal- Rausch- Abstand unterstützt diese Vermutung.

Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Fehlertypen:

Typ A: Zentralpeak verändert (zu groß oder zu klein)

$$F_A = \frac{1,702}{1,702 + 1,194 + 1,448} = \frac{1,702}{4,344} = 0,392 \equiv 39,18\%$$

Typ B: Satelliten verändert (zu klein oder zu groß)

$$F_B = \frac{1,194}{1,702 + 1,194 + 1,448} = \frac{1,194}{4,344} = 0,275 \equiv 27,49\%$$

Typ C: Sonstiges (zusätzlicher Untergrund, Dämpfung unsymmetrisch)

$$F_C = \frac{1,448}{1,702 + 1,194 + 1,448} = \frac{1,448}{4,344} = 0,333 \equiv 33,33\%$$

Aus dem durchschnittlichen TBK kann der reale Signal- Rauschabstand ermittelt werden (optimal 4,77db):

$$TBK \cdot SNR = 3$$

⇒

$$SNR = 3,886 \equiv 5,89\text{db}$$

LaTeX