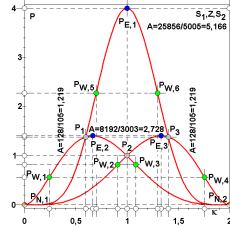


Method of error analysis for the time-bin configuration under laser irradiation



Methode einer Fehleranalyse für die Time-Bin-Konfiguration unter Laserbestrahlung

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 9. Mai 2012 - Letzte Revision: 7. August 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Herleitung der Grundannahme	3
2	Ableitungen der Grundannahme	5
2.1	Time-Bin-Kriterium - TBK	5
2.2	Visibilität V	6
2.3	Abschätzung von m	7
2.4	Abschätzung der MAX - und MIN -Relation	8
2.5	Korrigierte Visibilität V_{TBK}	9
2.6	Korrektor m_{\bullet}	10
2.7	Entscheidungskriterien	11
2.8	Erweiterungen	12
3	Anwendung	13
3.1	Methode SZS	13
3.2	Methode Z	14
4	Beispiel - SZS	15
5	Beispiel - Z	17
6	Anhang	19

Literatur

- [Dip] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Leistungen am Detektor - Arbeitsblätter zur Masterarbeit.
- [Nic01] Nicolas Gisin, Gregoire Ribordy, Wolfgang Tittel and Hugo Zbinden. Quantum cryptography, 2001.

1 Herleitung der Grundannahme

Folgende Annahme wird getroffen für ein System mit einem quantitativen Maximum MAX und Minimum MIN . **Annahmen**

$$MAX \geq MIN > 0$$

\Rightarrow

$$MAX - MIN \geq 0 > -MIN$$

Aus $0 > -MIN$ folgt $MIN \in R^+$ und daraus wiederum $MAX \in R^+$.

Aus $MAX - MIN \geq 0$ folgt die Vermutung $MAX - m \cdot MIN = 0$ und daraus dann:

$$MAX - m \cdot MIN \leq MAX - MIN$$

\Rightarrow

$$m \geq 1$$

Was die Vermutung bestätigt für $(m \in R) \geq 1$.

Weiterhin folgt:

$$MAX - MIN = (m - 1) \cdot MIN$$

$$MAX + MIN = (m + 1) \cdot MIN$$

Grundlage ist weiter die reale Time-Bin-Konfiguration mit κ ohne der Notwendigkeit der Phasenmanipulation.

$$P(\psi_K)(\kappa, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0) = \kappa^2 \cdot (2 - \kappa)^4$$

$$P(\psi_M)(\kappa, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0) = 4 \cdot \kappa^6 \cdot (2 - \kappa)^6$$

$$P(\psi_L)(\kappa, \varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0) = \kappa^4 \cdot (2 - \kappa)^2$$

2 Ableitungen der Grundannahme

2.1 Time-Bin-Kriterium - TBK

TBK

$$MAX - m \cdot MIN = 0$$

 \Rightarrow

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{MAX}{MIN} = 1$$

Das Time-Bin-Kriterium ist somit definiert:

$$TBK = \frac{1}{m} \cdot \frac{MAX}{MIN}$$

 \Rightarrow

$$(TBK - 1) \cdot m \cdot MIN = 0$$

Die Time-Bin-Konfiguration ist dann ideal, wenn gilt:

$$TBK = 1 \quad m = 0 \quad MIN = 0$$

Wobei $m = 0$ und $MIN = 0$ durch die Voraussetzungen ausgeschlossen sind.

2.2 Visibilität V

Visibilität

Aus der Grundannahme ist ableitbar:

$$MAX - m \cdot MIN = 0$$

\Rightarrow

$$MAX - MIN = (m - 1) \cdot MIN$$

Und:

$$MAX - m \cdot MIN = 0$$

\Rightarrow

$$MAX + MIN = (m + 1) \cdot MIN$$

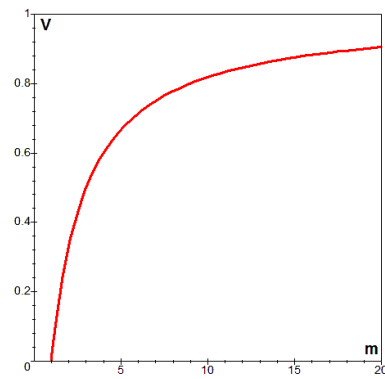
Aus der allgemeinen Annahme der Visibilität ist die Berechnung innerhalb der Time-Bin-Konfiguration ablesbar.

$$V = \frac{MAX - MIN}{MAX + MIN}$$

\Rightarrow

$$V = \frac{m - 1}{m + 1}$$

\Rightarrow



Grafische Darstellung der Visibilität V
in Abhängigkeit vom Leitwert m .

2.3 Abschätzung von m

Aus der Berechnungsgrundlage von V ist m abschätzbar.

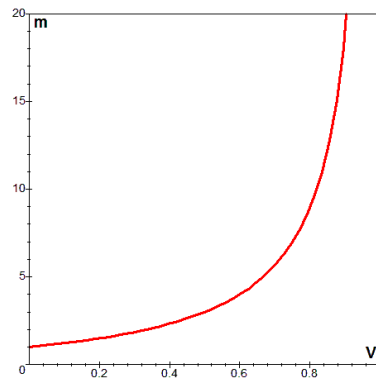
Leitwert

$$V = \frac{m - 1}{m + 1}$$

⇒

$$m = \frac{1 + V}{1 - V}$$

⇒



Grafische Darstellung des Leitwertes m in Abhängigkeit von der Visibilität V .

2.4 Abschätzung der *MAX*- und *MIN*-Relation

Relationen

Aus der allgemeinen Berechnungsgrundlage der Visibilität V ist die *MAX*- und *MIN*-Relation ableitbar.

$$V = \frac{MAX - MIN}{MAX + MIN}$$

⇒

$$1 + V = \frac{2 \cdot MAX}{MAX + MIN}$$

Sowie:

$$V = \frac{MAX - MIN}{MAX + MIN}$$

⇒

$$1 - V = \frac{2 \cdot MIN}{MAX + MIN}$$

Damit ist die Relation berechenbar:

$$\frac{MAX}{MIN} = \frac{1 + V}{1 - V}$$

2.5 Korrigierte Visibilität V_{TBK}

Als Forderung soll ein Zusammenhang zwischen der allgemeinen und der korrigierten Visibilität V_{TBK} bestehen.

$$V = \frac{TBK \cdot m - 1}{TBK \cdot m + 1} = TBK \cdot V_{TBK}$$

Die *MAX-MIN*-Relation wird eingesetzt.

$$V_{TBK} = m \cdot \frac{MIN}{MAX} \cdot V = m \cdot \frac{MIN}{MAX} \cdot \frac{MAX - MIN}{MAX + MIN}$$

⇒

$$V_{TBK} = \frac{V}{TBK}$$

2.6 Korrektor m_{\bullet}

Korrektor

Der Korrektor ist definiert mit:

$$m_{\bullet} = \frac{MAX_{\bullet, \kappa=1}}{MIN_{\bullet, \kappa=1}}$$

\Rightarrow

$$m_{SZS} = 3 \qquad m_Z = 1$$

2.7 Entscheidungskriterien

E.-kriterien

- $Z > S_1 + S_2$

Gesucht sind im Definitionsbereich von κ liegende Lösungen von:

$$P(\psi_M) = P(\psi_K) + P(\psi_L)$$

⇒

$$\kappa_1 = 0,636 \quad \kappa_2 = 1,364$$

- $Z > S_1$ oder $Z > S_2$

Gesucht sind im Definitionsbereich von κ liegende Lösungen von:

$$P(\psi_M) = P(\psi_K) \quad P(\psi_M) = P(\psi_L)$$

⇒

$$\kappa_3 = 0,597 \quad \kappa_4 = 1,403$$

- MAX_{SZS} und MIN_{SZS} sind ununterscheidbar

Soll dann gelten, wenn:

$$\frac{MAX_{SZS}}{MIN_{SZS}} = 1,05$$

⇒

$$\kappa_5 = 0,254 \quad \kappa_6 = 1,746$$

Bei:

$$TBK_{SZS} = 0,35 > \frac{1}{3} = TBK_{SZS,min}$$

- **Der TBI- und der NOTBI-Bereich**

Das Vorliegen einer funktionierenden Time-Bin-Konfiguration **TBI** liegt dann vor, wenn gilt:

$$\kappa_1 \approx \kappa_3 \approx 0,6 < \kappa_{TBI} < 1,4 \approx \kappa_4 \approx \kappa_2$$

Dementsprechend ist der Bereich einer nichtfunktionierenden Time-Bin-Konfiguration **NOTBI** bekannt, wenn gilt:

$$\kappa_{min} = 0 \leq \kappa_{NOTBI} < 0,25 \approx \kappa_5 \quad \kappa_6 \approx 1,75 < \kappa_{NOTBI} \leq 2 = \kappa_{max}$$

Erweiterungen

2.8 Erweiterungen• **TBK + V + SNR**

Es gibt einen Zusammenhang zwischen dem Signal- Rauschverhältnis SNR und dem TBK .

$$\begin{aligned} SNR_{SZS} &= \frac{P(\psi_M)}{P(\psi_K) + P(\psi_L)} \\ &= \frac{MAX_{SZS} - MIN_{SZS}}{MIN_{SZS}} \\ &= 3 \cdot TBK_{SZS} - 1 \end{aligned}$$

Es existieren exponierte Punkte.

$$SNR_{SZS,max} = 3\text{db} \quad \text{bei} \quad \kappa = 1$$

Sowie:

$$SNR_{SZS} = 0\text{db} \quad \text{bei} \quad \kappa_1 = 0,636 \quad \text{und} \quad \kappa_2 = 1,364$$

Ein Zusammenhang ist bekannt.

$$SNR_{SZS} = (3 \cdot TBK_{SZS} + 1) \cdot V_{SZS}$$

• **TBK + V + QBER**

Nach [Nic01] gibt es einen proportionalen Zusammenhang zwischen dem Quantenbitfehlerhäufigkeit $QBER$ und der Visibilität V .

$$QBER \propto 1 - V = 1 - V_{TBK,Z} \cdot TBK_Z$$

• **$P(\psi_M)$**

Der Zentralimpuls ist erweitert beschreibbar.

$$\begin{aligned} P(\psi_M)(\kappa, \varphi_1, \varphi_2 = 0) &= 4 \cdot \kappa^6 \cdot (2 - \kappa)^6 \cdot \cos^2 \frac{\varphi_1}{2} \\ &= 4 \cdot V_{TBK,Z} \cdot \cos^2 \frac{\varphi_1}{2} \\ &= \frac{4}{TBK_Z} \cdot \cos^2 \frac{\varphi_1}{2} \end{aligned}$$

3 Anwendung über den Koppelkoeffizienten κ

SZS

3.1 Für die Impulse S_1, S_2 und Z - Methode SZS

[Dip]

Mit:

$$MAX_{SZS} = (2 - \kappa)^2 \cdot \kappa^2 \cdot (\kappa^2 + 4 \cdot (2 - \kappa)^4 \cdot \kappa^4 + (2 - \kappa)^2)$$

Und:

$$MIN_{SZS} = (2 - \kappa)^2 \cdot \kappa^2 \cdot (\kappa^2 + (2 - \kappa)^2)$$

Folgt:

$$V_{SZS} = 2 \cdot \frac{(2 - \kappa)^4 \cdot \kappa^4}{\kappa^2 + 2 \cdot (2 - \kappa)^4 \cdot \kappa^4 + (2 - \kappa)^2}$$

Mit:

$$MAX_{SZS_{\kappa=1}} = 6$$

Und:

$$MIN_{SZS_{\kappa=1}} = 2$$

⇒

$$m = 3$$

⇒

$$TBK_{SZS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{MAX_{SZS}}{MIN_{SZS}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\kappa^2 + 4 \cdot (2 - \kappa)^4 \cdot \kappa^4 + (2 - \kappa)^2}{\kappa^2 + (2 - \kappa)^2}$$

⇒

$$V_{TBK_{SZS}} = 6 \cdot \frac{(2 - \kappa)^4 \cdot \kappa^4}{\kappa^2 + 2 \cdot (2 - \kappa)^4 \cdot \kappa^4 + (2 - \kappa)^2} \cdot \frac{(2 - \kappa)^2 + \kappa^2}{\kappa^2 + 4 \cdot (2 - \kappa)^4 \cdot \kappa^4 + (2 - \kappa)^2}$$

Z**3.2 Für den Zentralimpuls Z - Methode Z**

Für die Messung am Zentralimpuls sind zwei Annahmen notwendig.

[Dip]

Mit:

$$MAX_Z = 4 \cdot (2 - \kappa)^6 \cdot \kappa^6$$

Und:

$$MIN_Z = 0$$

Folgt:

$$V_Z = 1$$

Da $MAX \geq MIN > 0$ gelten muss, kann diese Annahmen nicht weiter genutzt werden.

Mit:

$$MAX_Z = 4$$

Und:

$$MIN_Z = 4 \cdot (2 - \kappa)^6 \cdot \kappa^6$$

 \Rightarrow

$$MIN_{Z_{\kappa=1}} = 4$$

 \Rightarrow

$$m = 1$$

 \Rightarrow

$$TBK_Z = \frac{1}{1} \cdot \frac{MAX_Z}{MIN_Z} = \frac{1}{(2 - \kappa)^6 \cdot \kappa^6}$$

 \Rightarrow

$$V_{TBK_Z} = (2 - \kappa)^6 \cdot \kappa^6$$

Der Einstieg in die Auswertungskette erfolgt somit über das TBK mit MIN und MAX aus den realen Messwerten.

4 Beispiel - SZS

SZS numerisch

- Numerisch

Messung der drei Impulse simultan - SZS-Methode.

Aus 9 Messungen sind die Mittelwerte für die realen MAX und MIN bekannt.

$$\overline{MAX} = 3,160 \text{ [mW]} \quad \overline{MIN} = 2,032 \text{ [mW]}$$

Das TBK ist berechenbar.

$$TBK_{SZS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3,160}{2,032} = 0,518$$

Über die Beziehung zwischen TBK und κ sind die Werte für κ_1 und κ_2 zu ermitteln.

$$\kappa_1 = 0,515 \quad \kappa_2 = 1,485$$

Mit den κ -Werten sind die genormten Leistungen der beiden Satelliten S_1 , S_2 und des Zentralimpulses Z bekannt.

$$S_1 = 1,290 \quad Z = 0,800 \quad S_2 = 0,155$$

Aus diesen Werten wiederum sind das genormte Minimum bzw. Maximum darstellbar.

$$MAX = 2,245 \quad MIN = 1,445$$

Die Visibilitäten können nun ermittelt werden.

$$V_{SZS} = \frac{2,245 - 1,445}{2,245 + 1,445} = \frac{3,160 - 2,032}{3,160 + 2,032} \quad V_{TBK_{SZS}} = \frac{0,217}{0,518}$$

⇒

$$V_{SZS} = 0,217 \quad V_{TBK_{SZS}} = 0,419$$

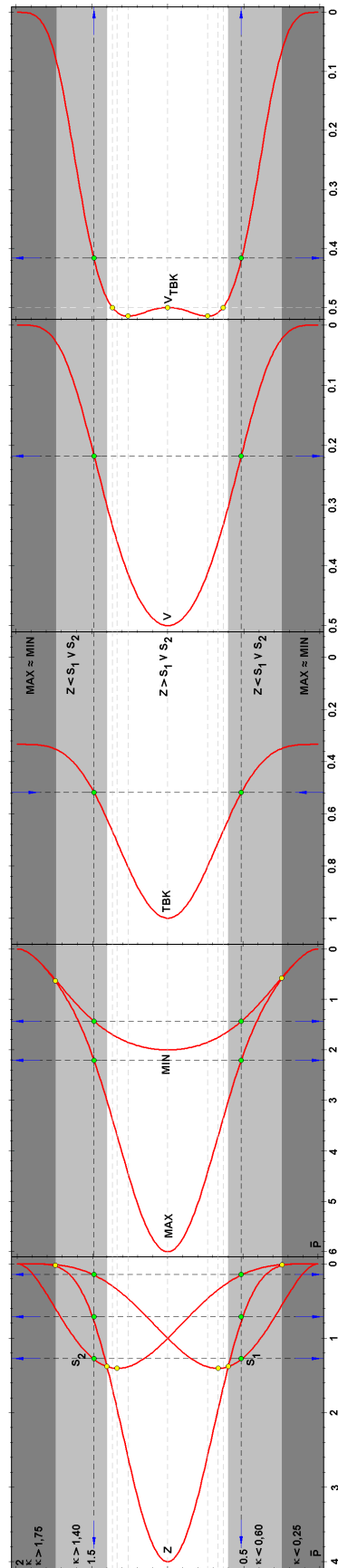
Als Kontrollmittel kann das TBK nochmals aus den genormten Werten ermittelt und verglichen werden.

$$TBK_{SZS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2,245}{1,445} = 0,518$$

SZS grafisch

- Grafisch

Für das gewählte Beispiel die grafische Auswertung folgend.



5 Beispiel - Z

Z numerisch

- **Numerisch**

Messung des Zentralimpulses - Z-Methode.

Die gleichen Interferometerkerne wie in Beispiel *SZS*. Jedoch mit anderer Laserquelle und empfindlicheren Detektoren. Die Elektronik ist in der Lage, den Zentralimpuls einzeln zu messen.

$$\overline{MAX} = 0,408 [\mu\text{W}] \quad \overline{MIN} = 0,105 [\mu\text{W}]$$

Das TBK ist berechenbar.

$$TBK_Z = \frac{1}{1} \cdot \frac{0,408}{0,105} = 3,886$$

⇒

$$V_{TBK_Z} = \frac{1}{TBK_Z} = 0,257$$

Über die Beziehung zwischen TBK und κ sind die Werte für κ_1 und κ_2 zu ermitteln.

$$\kappa_1 = 0,550 \quad \kappa_2 = 1,450$$

Mit den κ -Werten sind die genormten Leistungen der beiden Satelliten S_1 , S_2 und des Zentralimpulses Z bekannt.

$$S_1 = 1,337 \quad Z = 1,029 \quad S_2 = 0,192$$

Aus diesen Werten wiederum sind das genormte Minimum bzw. Maximum darstellbar.

$$MAX = 2,558 \quad MIN = 1,529$$

Das Time-Bin-Kriterium für drei Impulse ist zu berechnen.

$$TBK_{SZS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2,558}{1,529} = 0,558$$

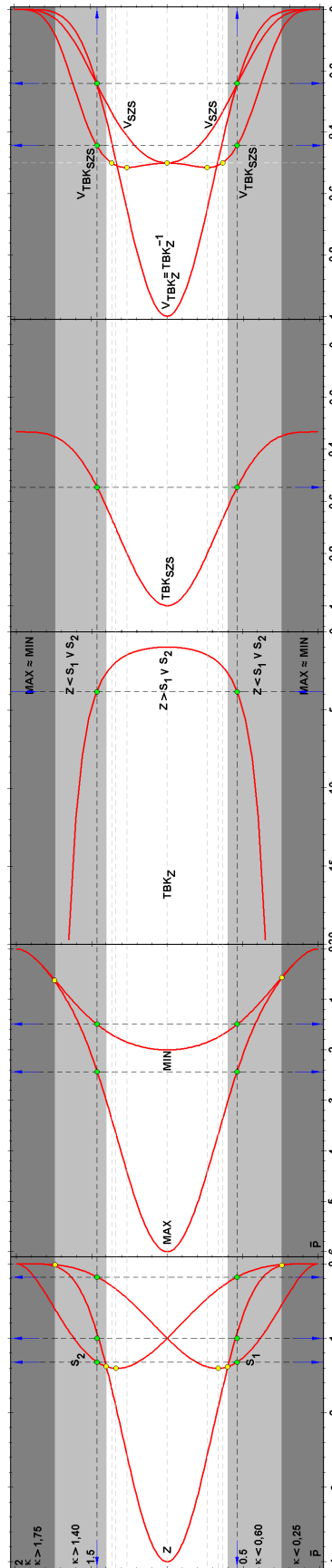
Die Visibilitäten können nun ermittelt werden.

$$V_{SZS} = \frac{2,558 - 1,529}{2,558 + 1,529} = 0,252 \quad V_{TBK_{SZS}} = \frac{0,252}{0,558} = 0,452$$

Z grafisch

• Grafisch

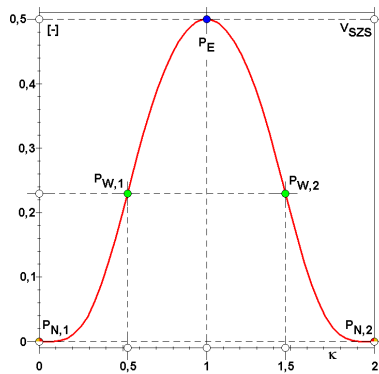
Für das gewählte Beispiel die grafische Auswertung folgend.



6 Anhang - Grafische Darstellung ausgewählter Größen

Anhang

- V_{SZS}



- **Nullstellen**

$$P_{N,1}(0; 0)$$

$$P_{N,2}(2; 0)$$

- **Wendestellen**

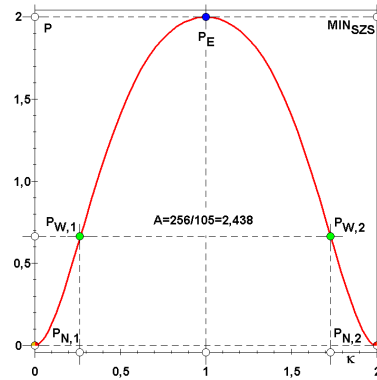
$$P_{W,1}(0,527; 0,229)$$

$$P_{W,2}(1,473; 0,229)$$

- **Extrema**

$$P_E(1; 0,5)$$

- MIN_{SZS}



- **Nullstellen**

$$P_{N,1}(0; 0)$$

$$P_{N,2}(2; 0)$$

- **Wendestellen**

$$P_{W,1}(0,274; 0,684)$$

$$P_{W,2}(1,726; 0,684)$$

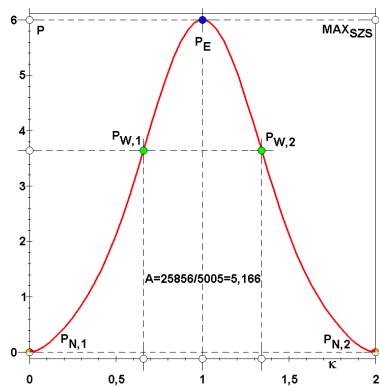
- **Extrema**

$$P_E(1; 2)$$

- **Flächenwerte**

$$\int_0^2 MIN_{SZS} d\kappa = \frac{256}{105} = 2,438$$

- MAX_{SZS}



- Nullstellen

$$P_{N,1}(0; 0)$$

$$P_{N,2}(2; 0)$$

- Wendestellen

$$P_{W,1}(0,670; 3,768)$$

$$P_{W,2}(1,330; 3,768)$$

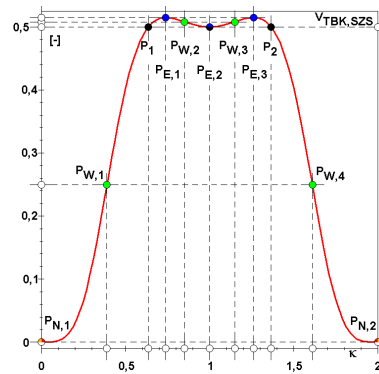
- Extrema

$$P_E(1; 6)$$

- Flächenwerte

$$\int_0^2 MAX_{SZS} d\kappa = \frac{25856}{5005} = 5,166$$

- $V_{\text{TBK,SZS}}$



- **Nullstellen**

$$P_{N,1} (0 ; 0)$$

$$P_{N,2} (2 ; 0)$$

- **Wendestellen**

$$P_{W,1} (0,389 ; 0,247)$$

$$P_{W,2} (0,846 ; 0,508)$$

$$P_{W,3} (1,154 ; 0,508)$$

$$P_{W,4} (1,611 ; 0,247)$$

- **Extrema**

$$P_{E,1} (0,740 ; 0,515)$$

$$P_{E,2} (1,000 ; 0,500)$$

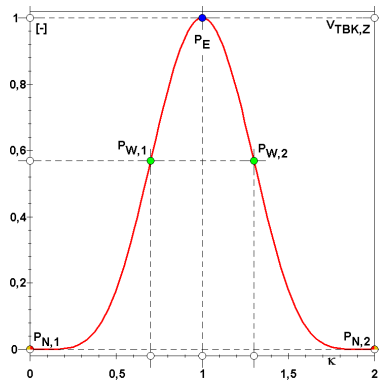
$$P_{E,3} (1,260 ; 0,515)$$

- **spezielle Punkte**

$$P_1 (0,636 ; 0,500)$$

$$P_2 (1,364 ; 0,500)$$

- $V_{TBK,Z}$



- **Nullstellen**

$$P_{N,1} (0 ; 0)$$

$$P_{N,2} (2 ; 0)$$

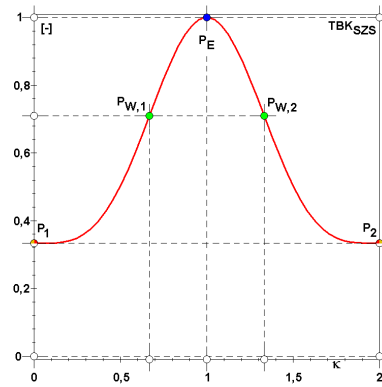
- **Wendestellen**

$$P_{W,1} (0,698 ; 0,564)$$

$$P_{W,2} (1,302 ; 0,564)$$

- **Extrema**

$$P_E (1 ; 1)$$

• **TBK_{SZS}**○ **spezielle Punkte**

$$P_1 (0 ; 0,33\bar{3})$$

$$P_2 (2 ; 0,33\bar{3})$$

○ **Wendestellen**

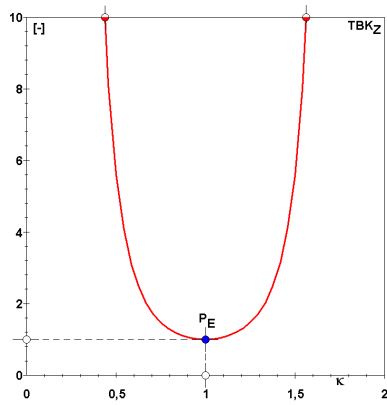
$$P_{W,1} (0,671 ; 0,713)$$

$$P_{W,2} (1,329 ; 0,713)$$

○ **Extrema**

$$P_E (1 ; 1)$$

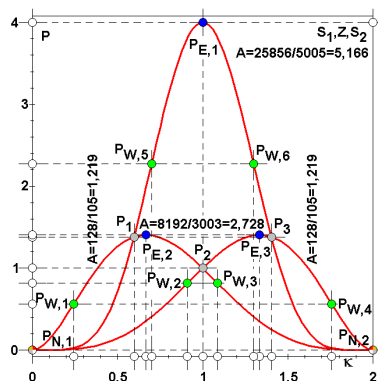
- TBK_Z



- **Extrema**

$$P_E(1; 1)$$

- S_1 und Z und S_2



- **Nullstellen**

$$P_{N,1}(0; 0)$$

$$P_{N,2}(2; 0)$$

- **Wendestellen**

$$P_{W,1}(0,245; 0,570)$$

$$P_{W,2}(0,912; 0,818)$$

$$P_{W,3}(1,088; 0,818)$$

$$P_{W,4}(1,755; 0,570)$$

$$P_{W,5}(0,698; 2,258)$$

$$P_{W,6}(1,302; 2,258)$$

- **Extrema**

$$P_{E,1}\left(\frac{2}{3}; \frac{1024}{729}\right) = (0,66\bar{6}, 1,405)$$

$$P_{E,2}(1; 4)$$

$$P_{E,3}\left(\frac{4}{3}; \frac{1024}{729}\right) = (1,33\bar{3}, 1,405)$$

- **spezielle Punkte**

$$P_1(0,597; 1,381)$$

$$P_2(1,000; 1,000)$$

$$P_3(1,403; 1,381)$$

- **Flächenwerte**

$$\int_0^2 S_1 d\kappa = \frac{128}{105} = 1,219$$

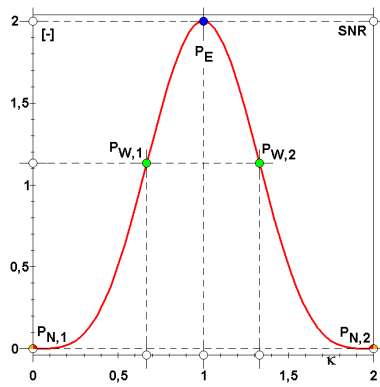
$$\int_0^2 Z d\kappa = \frac{8192}{3003} = 2,728$$

$$\int_0^2 S_2 d\kappa = \frac{128}{105} = 1,219$$

- **Summe der Flächenwerte**

$$\int_0^2 S_1 d\kappa + \int_0^2 Z d\kappa + \int_0^2 S_2 d\kappa = \frac{25856}{5005} = 5,166$$

- SNR



- Nullstellen

$$P_{N,1}(0; 0)$$

$$P_{N,2}(2; 0)$$

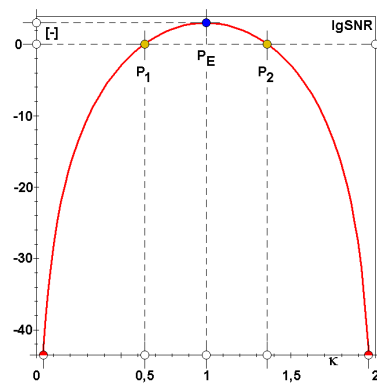
- Wendestellen

$$P_{W,1}(0,671; 1,139)$$

$$P_{W,2}(1,329; 1,139)$$

- Extrema

$$P_E(1; 2)$$

• **IgSNR**○ **Nullstellen**

$$P_{N,1} (0,636 ; 0)$$

$$P_{N,2} (1,364 ; 0)$$

○ **Extrema**

$$P_E (1 ; 3)$$

ℒ_{TeX} 2_ε

