# Isoperimetrisches Problem der Ebene

Björnstjerne Zindler

Letzte Revision: 24. August 2012

## Inhaltsverzeichnis



---

## Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

# 1 Problem

[001] Gesucht ist ein Nachweis des Isoperimetrischen Problems in der Ebene für den Kreis. Der Beweis, das gilt

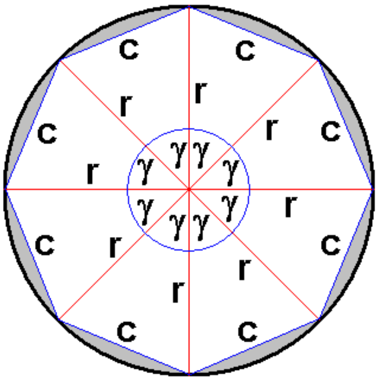
$$\frac{U}{A} \rightarrow MIN$$

mit $A$ dem Flächeninhalt des Kreises und $U$ dem Umfang. Eigentlich eine Aufgabe der Variationsrechnung, wo von einem flächenumspannenden Funktional dessen Extrema berechnet wird.

Ein anderer Nachweis kann auch mit in einem Kreis eingeschriebenen, gleichschenkligen Dreiecken durch geführt werden. Das entspricht dann einem Lagrangschen Potential, welches (hier) klassisch über die Differentialrechnung lösbar ist.

# 2 Modell

Ein Kreis wird mit gleichschenkligen Dreiecken gefüllt (Startwert: $N = 3$). Da ein Verhältnis zwischen $A$ und $U$ definiert wird, entspricht das einem Lagrangschen Potential, was dem energieärmsten Zustand freiwillig anstrebt. Das globale Extrema ist dann die Lösung des Problems. Gibt es kein lokales oder globales Minimum, ist die Behauptung (das Isoperimetrische Problem in der Ebene) für den Kreis falsch.




Abbild 1: Das Modell grafisch dargestellt.

# 3 Herleitung von $A$

Die Fläche eines einzelnen eingezeichneten, gleichschenkligen Dreiecks ist definiert durch:

$$A_\Delta = \frac{c}{2} \cdot h_C$$

Dabei ist $h_C$ die Höhe auf die Seite $c$ im gleichschenkligen Dreieck. Diese kann über den Satz des Pythagoras eliminiert werden.

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h_C^2 = r^2$$

$\Rightarrow$

$$A_\Delta = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{r^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

Für die Länge der Seite $c$ ist eine goniometrische Berechnungsgrundlage über den Spitzenwinkel $\gamma$ definiert:

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{c}{2 \cdot r}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{c}{2} = r \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$$

Eingesetzt in $A_\Delta$ und vereinfacht:

$$A_\Delta = r \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \sqrt{r^2 - \left(r \cdot \sin\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$A_\Delta = r^2 \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

$\Rightarrow$

$$A_\Delta = r^2 \cdot \sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{2} \cdot \frac{1+\cos\gamma}{2}}$$

$\Rightarrow$

$$A_\Delta = \frac{r^2}{2} \cdot \sin\gamma$$

# 4 Herleitung von $U$

Der Umfang des eingeschriebenen Dreiecks ist reduziert auf die Länge der Seite $c$:

$$U_\Delta = c$$

Mit obig hergeleiteter Definition für $c$ ist $U$ darstellbar:

$$U_\Delta = 2 \cdot r \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$$

# 5 Herleitung von $U/A$

$$\frac{U_\Delta}{A_\Delta} = \frac{4}{r} \cdot \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\gamma}$$

⇒

$$\frac{U_\Delta}{A_\Delta} = \frac{4}{r} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

⇒

$$\frac{A}{U} \propto \cos\frac{\gamma}{2}$$

Die Größe des Winkels ist abhängig von der Anzahl der eingeschriebenen Dreiecke:

$$\gamma = \frac{360°}{N} = \frac{2 \cdot \pi}{N}$$

⇒

$$\frac{A}{U} \propto \cos\frac{\pi}{N}$$

Mit $N \in \mathbb{N}$ und $N > 2$.

# 6 Herleitung des minimalen $U/A$

Um das minimale $\frac{U}{A}$ zu ermitteln ist es (hier) günstiger das maximale $\frac{A}{U}$ zu berechnen. Abgeleitet nach $N$:

$$\frac{d}{dN}\frac{A}{U} \propto \frac{d}{dN} \cdot \cos\frac{\pi}{N}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dN}\frac{A}{U} \propto \frac{\pi}{N^2} \cdot \sin\frac{\pi}{N} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\sin\frac{\pi}{N} = 0$$

$\Rightarrow$

$$N \to +\infty$$

Da die zweite Ableitung Null ergibt, ist das Ergebnis eine Stelle des globalen Extrema für $\frac{A}{U}$ und somit das globale Extrema für $\frac{U}{A}$.

$$\frac{d^2}{dN^2}\frac{A}{U} \propto \frac{d}{dN}\left(\frac{\pi}{N^2} \cdot \sin\frac{\pi}{N}\right)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d^2}{dN^2}\frac{A}{U} \propto \frac{\pi^2}{N^4} \cdot \cos\frac{\pi}{N} + \frac{\pi}{N^3} \cdot \sin\frac{\pi}{N}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{\pi}{N} \cdot \cos\frac{\pi}{N} + \sin\frac{\pi}{N}\right) \stackrel{?}{=} 0$$

$\Rightarrow$

$$0 \cdot 1 + 0 \stackrel{!}{=} 0$$

# 7 Rückführung von $N \to +\infty$ auf die geometrische Figur

$$U_\Delta = 2 \cdot r \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$$

$\Rightarrow$

$$U_{LIMIT} = \lim_{N\to+\infty}\left(2 \cdot r \cdot N \cdot \sin\frac{\pi}{N}\right)$$

$\Rightarrow$

$$U_{LIMIT} = 2 \cdot r \cdot \pi = U_{Kreis}$$

Und:

$$A_\Delta = \frac{r^2}{2} \cdot \sin\gamma$$

$\Rightarrow$

$$A_{LIMIT} = \lim_{N\to+\infty}\left(N \cdot \frac{r^2}{2} \cdot \sin\frac{2\cdot\pi}{N}\right)$$

$\Rightarrow$

$$A_{LIMIT} = r^2 \cdot \pi = A_{Kreis}$$

# 8 Nachweis, dass $U/A \rightarrow MIN$ für den Kreis gilt

Das oben erklärte globale Extrema für $\frac{U}{A}$ für $N \rightarrow +\infty$ wird zum globalen Minimum erklärt, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\frac{U_{Kreis}}{A_{Kreis}} < \frac{U_\Delta}{A_\Delta} = \frac{4}{r} \cdot \frac{1}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{2 \cdot r \cdot \pi}{r^2 \cdot \pi} < \frac{4}{r} \cdot \frac{1}{\lim\limits_{N \rightarrow +\infty} \cos\frac{\pi}{N}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{2}{r} < \frac{4}{r}$$

# 9 Auswertung

Der Kreis ist die geometrische Figur, welche in der Ebene das Isoperimetrische Problem erfüllt.