

Gaußsches Wellenpaket - GWP

Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 2. September 2007 – Letzte Revision: 10. September 2020

Inhaltsverzeichnis

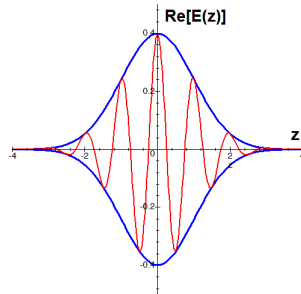
1	Gaußsches Wellenpaket - Ortsraum	3
1.1	Mathematische Beschreibung	4
1.2	Extrempunkt der Hüllkurve	5
1.3	Wendepunkte der Hüllkurve	6
1.4	Fläche der Hüllkurve	7
1.5	Halbwertsbreite der Hüllkurve	8
1.6	Aufenthaltswahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsdichte	9
1.7	Normierung des GWP im Ortsraum	10
1.8	Autokorrelation, Leistungsdichtespektrum	11
2	Gaußsches Wellenpaket - Frequenzraum	12
2.1	Extrempunkt der Hüllkurve	13
2.2	Wendepunkte der Hüllkurve	14
2.3	Fläche der Hüllkurve	15
2.4	Halbwertsbreite der Hüllkurve	16
2.5	Normierung des GWP im Frequenzraum	17
3	Vergleich GWP im Orts- und im Frequenzraum	18

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

1 Gaußsches Wellenpaket - Ortsraum

Standardwelle für die Quantenphysik, Optik. Gleichzeitig repräsentiert das GWP ein Elektron (Hy- [001]ff. pothese von de Broglie).



Gaußsches Wellenpaket

1.1 Mathematische Beschreibung

Die mathematische Beschreibung für das unnormierte GWP erfolgt durch:

$$E(z; t) = e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}} \cdot e^{ik(z-ct)}$$

Für das GWP wird der *Re*-Anteil benötigt:

$$E(z; t) = \left(\cosh \frac{1}{2} \frac{(z-ct)^2}{b^2} - \sinh \frac{1}{2} \frac{(z-ct)^2}{b^2} \right) \cdot (\cos k(ct-z) - i \sin k(ct-z))$$

⇒

$$E(z; t) = \begin{cases} + \cosh \frac{1}{2} \frac{(z-ct)^2}{b^2} \cdot \cos k(ct-z) - i \cosh \frac{1}{2} \frac{(z-ct)^2}{b^2} \cdot \sin k(ct-z) \\ - \sinh \frac{1}{2} \frac{(z-ct)^2}{b^2} \cdot \cos k(ct-z) + i \sinh \frac{1}{2} \frac{(z-ct)^2}{b^2} \cdot \sin k(ct-z) \end{cases}$$

⇒

$$\operatorname{Re} [E(z; t)] = \left(\cosh \frac{1}{2} \frac{(z-ct)^2}{b^2} - \sinh \frac{1}{2} \frac{(z-ct)^2}{b^2} \right) \cdot \cos k(ct-z)$$

⇒

$$\operatorname{Re} [E(z; t)] = e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}} \cdot \cos k(ct-z)$$

Die Hüllkurve davon:

$$[E(z; t)]_H = e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}}$$

Für den *Im*-Anteil analog:

$$\operatorname{Im} [E(z; t)] = e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}} \cdot \sin k(z-ct)$$

1.2 Extrempunkt der Hüllkurve

Der Extrempunkt P_E der Hüllkurve stellt eine wichtige Größe dar.

$$[E(z;t)]'_H = \frac{d}{dz} \cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}}$$

⇒

$$[E(z;t)]'_H = \frac{ct - z}{b^2} \cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}}$$

⇒

$$\frac{ct - z}{b^2} \cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}} = 0$$

⇒

$$z = ct$$

⇒

$$[E(z = ct)]_H = e^0 = 1$$

⇒

$$P_E(z = ct; 1)$$

1.3 Wendepunkte der Hüllkurve

Die Wendepunkte P_W der Hüllkurven stellen eine wichtige Größe dar.

$$[E(z; t)]_H'' = \frac{d^2}{dz^2} \cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}}$$

⇒

$$[E(z; t)]_H'' = \frac{b^2 - (z - ct)^2}{b^4} \cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}}$$

⇒

$$0 = \frac{b^2 - (z - ct)^2}{b^4} \cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}}$$

⇒

$$(z - ct)^2 = b^2$$

⇒

$$z_1 - ct = +b \qquad z_2 - ct = -b$$

⇒

$$z_1 = b + ct \qquad z_2 = ct - b$$

Die Differenz beider:

$$\Delta z = z_1 - z_2 = b + ct - ct + b = 2b$$

Weiterhin:

$$[E(z_1 = b + ct)]_H = [E(z_2 = ct - b)]_H = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,6065$$

⇒

$$P_{W,1} \left(z_1; e^{-\frac{1}{2}} \right) \qquad P_{W,2} \left(z_2; e^{-\frac{1}{2}} \right)$$

1.4 Fläche der Hüllkurve

Die Fläche der Hüllkurve zur Abszisse.

$$\int E(z; t)_H = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}} dz$$

⇒

$$\int E(z; t)_H = \sqrt{2\pi} \cdot b$$

1.5 Halbwertsbreite der Hüllkurve

Die Halbwertsbreite der Hüllkurve ist von Interesse.

$$[E(z; t)]_H = e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot [E(z = ct)]_H$$

⇒

$$z_{FWHM} = ct \pm \sqrt{2b^2 \cdot \ln 2}$$

⇒

$$\Delta z_{FWHM} = 2b \cdot \sqrt{2 \cdot \ln 2}$$

⇒

$$\Delta z_{FWHM} = \Delta z \cdot \sqrt{2 \cdot \ln 2}$$

Mit Δz dem Abstand der Wendepunkte untereinander.

$$\Delta z_{FWHM} \approx 1,177 \cdot \Delta z$$

⇒

$$\Delta z_{FWHM} \approx 2,355 \cdot b$$

Die Halbwertsbreite ist demnach 1,177-fach größer als die Wendepunktbreite.

1.6 Aufenthaltswahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsdichte

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeitsdichte des Elektrons bzw. Photons innerhalb des GWP soll errechnet werden. Der Mittelwert der Hüllkurve wird gesucht:

$$\int |E(z)|_H^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}} dz$$

⇒

$$\int |E(z;t)|_H^2 = ct \cdot \sqrt{2\pi} \cdot b$$

Für den Mittel- oder Erwartungswert des Ortes gilt:

$$\frac{\int |E(z;t)|_H^2}{\int E(z;t)_H} = ct \equiv z_0$$

Wobei z_0 der Mittelwert des Aufenthaltsortes darstellt. Die mittlere quadratische Abweichung von z_0 beträgt:

$$\int |E(z - z_0; t)|_H^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - ct)^2 \cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}} dz$$

⇒

$$\int |E(z - z_0; t)|_H^2 = \sqrt{2\pi} \cdot b^3$$

⇒

$$\frac{\int |E(z - z_0; t)|_H^2}{\int E(z;t)_H} = b^2$$

Die Standardabweichung demnach:

$$\sqrt{\frac{\int |E(z - z_0; t)|_H^2}{\int E(z;t)_H}} = b$$

1.7 Normierung des GWP im Ortsraum

Die Normierung des GWP auf 1:

$$\frac{E(z; t)}{\int E(z; t)_H} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot b} \cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}} \cdot e^{ik(z-ct)}$$

Die Hüllkurve dazu:

$$\frac{E(z; t)_H}{\int E(z; t)_H} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot b} \cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{2b^2}}$$

Die Wellenfunktion:

$$\psi(z; t) = \sqrt{\frac{E(z; t)_H}{\int E(z; t)_H}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi} \cdot b}} \cdot e^{-\frac{(z-ct)^2}{4b^2}}$$

1.8 Autokorrelation, Leistungsdichtespektrum

Die Autokorrelationsfunktion für eine nichtperiodische, symmetrische Funktion:

$$E_{xx}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2b} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2b^2}} \cdot e^{-\frac{(z-z_0)^2}{2b^2}} dz_0$$

⇒

$$E_{xx}(z) = e^{-\frac{z^2}{2b^2}}$$

Es wird das Leistungsdichtespektrum ermittelt:

$$F[E(z)] = [E(\omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2b^2}} \cdot e^{-i \cdot k \cdot c \cdot z} dz$$

⇒

$$F[E(z)] = [E(\omega)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{b}{2} \cdot e^{-\frac{k^2 \cdot c^2 \cdot b^2}{2}}$$

⇒

$$F[E(z)] = [E(\omega)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{b}{2} \cdot e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}}$$

Wobei der Fourierterm folgendermaßen entwickelt wird:

$$e^{-i\omega z}$$

Mit:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \lambda = \frac{c}{f}$$

⇒

$$k = \frac{2\pi f}{c} = \frac{\omega}{c}$$

⇒

$$\omega = kc$$

⇒

$$e^{-ikcz}$$

Damit ist die Fouriertransformation in den Frequenzraum abgeschlossen.

2 Gaußsches Wellenpaket - Frequenzraum

Gegeben ist ein GWP im Frequenzraum.

$$[E(\omega)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{b}{2} \cdot e^{-\frac{\omega^2 b^2}{2}}$$

⇒

$$[E(\omega)]_H = e^{-\frac{\omega^2 b^2}{2}}$$

2.1 Extrempunkt der Hüllkurve

Der Extrempunkt P_E der Hüllkurve stellt eine wichtige Größe dar.

$$[E(\omega)]'_H = \frac{d}{d\omega} \cdot e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}}$$

⇒

$$[E(\omega)]'_H = -\omega \cdot b^2 \cdot e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}}$$

⇒

$$-\omega \cdot b^2 \cdot e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}} = 0$$

⇒

$$\omega = 0$$

⇒

$$[E(0)]_H = 1$$

⇒

$$P_E(0; 1)$$

2.2 Wendepunkte der Hüllkurve

Die Wendepunkte P_W der Hüllkurven stellen eine wichtige Größe dar.

$$[E(\omega)]''_H = \frac{d^2}{d\omega^2} \cdot e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}}$$

⇒

$$[E(\omega)]''_H = (\omega^2 \cdot b^4 - b^2) \cdot e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}}$$

⇒

$$0 = (\omega^2 \cdot b^4 - b^2) \cdot e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}}$$

⇒

$$0 = \omega^2 \cdot b^2 - 1$$

⇒

$$\omega_1 = +\frac{1}{b} \qquad \omega_2 = -\frac{1}{b}$$

Die Differenz beider:

$$\Delta\omega = \frac{2}{b}$$

Weiterhin:

$$\left[E\left(+\frac{1}{b}\right) \right]_H = \left[E\left(-\frac{1}{b}\right) \right]_H = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,6065$$

⇒

$$P_{W,1} \left(+\frac{1}{b}; e^{-\frac{1}{2}} \right) \qquad P_{W,2} \left(-\frac{1}{b}; e^{-\frac{1}{2}} \right)$$

2.3 Fläche der Hüllkurve

Die Fläche der Hüllkurve zur Abszisse.

$$\int E(\omega)_H = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}} d\omega$$

⇒

$$\int E(\omega)_H = \frac{\sqrt{2\pi}}{b}$$

2.4 Halbwertsbreite der Hüllkurve

Die Halbwertsbreite der Hüllkurve ist von Interesse.

$$[E(\omega)]_H = e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot [E(0)]_H$$

⇒

$$\omega_{FWHM} = \pm \frac{1}{b} \sqrt{2 \cdot \ln 2}$$

⇒

$$\Delta\omega_{FWHM} = \frac{2}{b} \cdot \sqrt{2 \cdot \ln 2}$$

⇒

$$\Delta\omega_{FWHM} = \Delta\omega \cdot \sqrt{2 \cdot \ln 2}$$

Mit $\Delta\omega$ dem Abstand der Wendepunkte untereinander.

$$\Delta\omega_{FWHM} \approx 1,177 \cdot \Delta\omega$$

⇒

$$\Delta\omega_{FWHM} \approx 2,355 \cdot \frac{1}{b}$$

2.5 Normierung des GWP im Frequenzraum

Die Normierung des GWP auf 1:

$$[E(\omega)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{b}{2} \cdot e^{-\frac{\omega^2 \cdot b^2}{2}}$$

⇒

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [E(\omega)] d\omega = 1$$

3 Vergleich GWP im Orts- und im Frequenzraum

Die ermittelten Größen im tabellarischen Vergleich.

	$\mathbf{E}(z; t)$	$\mathbf{E}(\omega)$
$\mathbf{P_E}$	$z = ct; 1$	$0; 1$
$\mathbf{P_{W;1}}$	$b + ct; e^{-\frac{1}{2}}$	$+\frac{1}{b}; e^{-\frac{1}{2}}$
$\mathbf{P_{W;2}}$	$ct - b; e^{-\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{b}; e^{-\frac{1}{2}}$
$\mathbf{\Delta}$	$\Delta z = 2 \cdot b^{+1}$	$\Delta \omega = 2 \cdot b^{-1}$
\mathbf{A}	$\sqrt{2\pi} \cdot b^{+1}$	$\sqrt{2\pi} \cdot b^{-1}$
\mathbf{FWHM}	$2,355 \cdot b^{+1}$	$2,355 \cdot b^{-1}$
$\mathbf{f = 1}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot b^{-1}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot b^{+1}$

L^AT_EX 2_ε