Einfache Zusammenhänge zwischen der Gumbel- und der pq-Funktion

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 7. September 2016 – Letzte Revision: 20. Dezember 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Die Grundgleichung f_1 **3**

2 Die gespiegelte Grundgleichung f_2 **5**

3 Die Umkehrgleichung f_3 **7**

4 Die gespiegelte Umkehrgleichung f_4 **9**

5 Sonstige Zusammenhänge **11**

6 Besondere Eigenschaften **12**

7 Die Gumbel- und die pq-Verteilung **14**

8 Die Gumbel- und die pq-Dichtefunktion **15**

9 Die Umkehrgleichung der Gumbelverteilung **17**

10 Die Umkehrgleichung der Gumbeldichte **18**

11 Der Zusammenhang der Koeffizienten p, q mit β, μ **19**
11.1 Bei gegebenen p und q 19
11.2 Bei gegebenen β und μ 20

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Die Grundgleichung f_1

[001]ff.

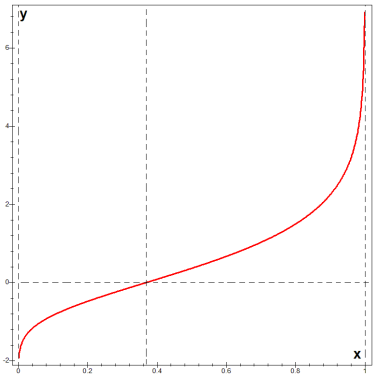
$$f_1 = y = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{x}{p}\right)$$

Bei: Grundgleichung

$$p = q = 1$$

$\Rightarrow$

$$f_1^* = y^* = -\ln\left(-\ln x\right)$$



Definitionsbereich:

$$-\infty < \left(y = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{x}{p}\right)\right) < +\infty$$

$\Rightarrow$

$$0 < x < p \qquad \rightarrow \qquad 0 < x^* < 1$$

Nullstelle:

$$0 = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{x}{p}\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_N = p \cdot e^{-p \cdot q} \qquad \rightarrow \qquad x_N^* = e^{-1}$$

1. Aufleitung:

$$\int y = -x \cdot \frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{x}{p}\right) - \frac{p}{q} \cdot \mathrm{Ei}\left(1, -\ln\frac{x}{p}\right)$$

Mit:

$$\mathrm{Ei}\left(1, -\ln\frac{x}{p}\right) = \int_1^\infty \left(\frac{x}{p}\right)^k \cdot k^{-1} \cdot dk$$

Wobei:

$$\int_0^1 y^* = \gamma = 0{,}577215664\ldots$$

1. Ableitung:

$$y' = -\frac{1}{q} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln\frac{x}{p}} \qquad \rightarrow \qquad y'^* = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln x}$$

2. Ableitung:

$$y'' = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\ln^2\frac{x}{p}} \cdot \left(1 + \ln\frac{x}{p}\right) \qquad \rightarrow \qquad y''^* = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1 + \ln x}{\ln^2 x}$$

Extrema:

$$y' = 0 = -\frac{1}{q} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln\frac{x}{p}}$$

$\Rightarrow$

$$x_E = \text{n.def.}$$

Wendepunkte:

$$y'' = 0 = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\ln^2 \frac{x}{p}} \cdot \left(1 + \ln \frac{x}{p}\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_W = p \cdot e^{-1} \qquad \rightarrow \qquad x_W^* = e^{-1}$$

$$y_W = \frac{1}{q} \cdot \ln (p \cdot q) \qquad \rightarrow \qquad y_W^* = 0$$

2 Die gespiegelte Grundgleichung f_2

[1])

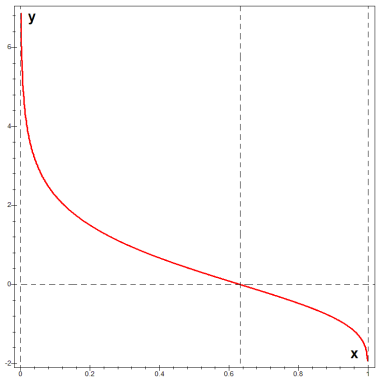
$$f_2 = y = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{p-x}{p}\right)$$

Bei: gesp. Grundgl.

$$p = q = 1$$

$\Rightarrow$

$$f_2^* = y^* = -\ln\left(-\ln\left(1-x\right)\right)$$



Definitionsbereich:

$$-\infty < \left(y = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{p-x}{p}\right)\right) < +\infty$$

$\Rightarrow$

$$0 < x < p \qquad \rightarrow \qquad 0 < x^* < 1$$

Nullstelle:

$$0 = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{p-x}{p}\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_N = p \cdot \left(1 - e^{-p \cdot q}\right) \qquad \rightarrow \qquad x_N^* = 1 - e^{-1}$$

1. Aufleitung:

$$\int y = -x \cdot \frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{p-x}{p}\right) + \frac{p}{q} \cdot \mathrm{Ei}\left(1, -\ln\frac{p-x}{p}\right) + \frac{p}{q} \cdot \ln\left(\ln\frac{p-x}{p}\right)$$

Mit:

$$\mathrm{Ei}\left(1, -\ln\frac{p-x}{p}\right) = \int_1^\infty \left(\frac{p-x}{p}\right)^k \cdot k^{-1} \cdot dk$$

Wobei:

$$\int_0^1 y^* = \gamma = 0{,}577215664\ldots$$

1. Ableitung:

$$y' = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{p-x} \cdot \frac{1}{\ln\frac{p-x}{p}} \qquad \rightarrow \qquad y'^* = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{\ln\left(1-x\right)}$$

[1] Gemeinsamer Punkt = Symmetrieachse:
$-\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{x}{p}\right) = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{p-x}{p}\right)$
$\Rightarrow$
$x_S = \frac{p}{2} \qquad \rightarrow \qquad x_S^* = \frac{1}{2}$
$y_S = -\frac{1}{q} \cdot \ln\frac{\ln 2}{p \cdot q} \qquad \rightarrow \qquad y_S^* = -\ln\left(\ln 2\right) \approx 0{,}367$

2. Ableitung:

$$y'' = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{(p-x)^2} \cdot \frac{1}{\ln^2 \frac{x}{p}} \cdot \left(1 + \ln \frac{x}{p}\right) \qquad \rightarrow \qquad y''^* = \frac{1}{(1-x)^2} \cdot \frac{1+\ln x}{\ln^2 x}$$

Extrema:

$$y' = 0 = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{p-x} \cdot \frac{1}{\ln \frac{p-x}{p}}$$

$\Rightarrow$

$$x_E = \text{n.def.}$$

Wendepunkte:

$$y'' = 0 = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{(p-x)^2} \cdot \frac{1}{\ln^2 \frac{x}{p}} \cdot \left(1 + \ln \frac{x}{p}\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_W = p \cdot \left(1 - e^{-1}\right) \qquad \rightarrow \qquad x_W^* = 1 - e^{-1}$$

$$y_W = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{1}{p \cdot q} \qquad \rightarrow \qquad y_W^* = 0$$

3 Die Umkehrgleichung f_3

[2])

$$x = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{y}{p}\right)$$

$\Rightarrow$

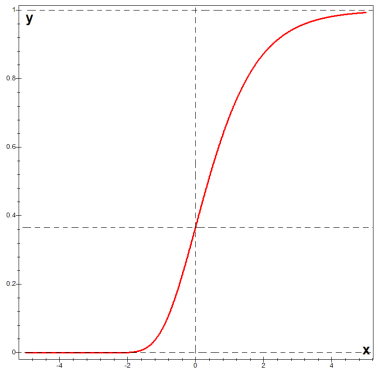
$$f_3 = y = p \cdot e^{-p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x}}$$

Bei: Umkehrgleichung

$$p = q = 1$$

$\Rightarrow$

$$f_3^* = y = e^{-e^{-x}}$$



Definitionsbereich:

$$0 < \left(y = p \cdot e^{-p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x}}\right) < 1$$

$\Rightarrow$

$$-\infty < x < -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{1}{p}\right) \quad \rightarrow \quad -\infty < x^* < +\infty$$

Nullstelle:

$$0 = p \cdot e^{-p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x}}$$

$\Rightarrow$

$$x_N = \text{n.def.}$$

1. Aufleitung:

$$\int y = \frac{p}{q} \cdot \text{Ei}\left(1, p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x}\right)$$

Mit:

$$\text{Ei}\left(1, p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x}\right) = \int_1^{\infty} e^{-k \cdot p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x}} \cdot k^{-1} \cdot dk$$

1. Ableitung:

$$y' = p^2 \cdot q^2 \cdot e^{-q \cdot \left(x + p \cdot e^{-q \cdot x}\right)} \quad \rightarrow \quad y'^* = e^{-x - e^{-x}}$$

2. Ableitung:

$$y'' = p^2 \cdot q^3 \cdot \left(p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x} - 1\right) \cdot e^{-q \cdot \left(x + p \cdot e^{-q \cdot x}\right)} \quad \rightarrow \quad y''^* = \left(e^{-x} - 1\right) \cdot e^{\left(-x - e^{-x}\right)}$$

Extrema:

$$y' = 0 = p^2 \cdot q^2 \cdot e^{-q \cdot \left(x + p \cdot e^{-q \cdot x}\right)}$$

$\Rightarrow$

$$x_E = \text{n.def.}$$

[2] Durch die Transformation (G = Grundgleichung, U = Umkehrgleichung):
$x_G \rightarrow y_U \qquad y_G \rightarrow x_U$

Wendepunkte:

$$y'' = 0 = p^2 \cdot q^3 \cdot \left(p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x} - 1\right) \cdot e^{-q \cdot \left(x + p \cdot e^{-q \cdot x}\right)}$$

$\Rightarrow$

$$x_W = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{1}{p \cdot q} \qquad \rightarrow \qquad x_W^* = 0$$

$$y_W = p \cdot e^{-1} \qquad \rightarrow \qquad y_W^* = e^{-1}$$

4 Die gespiegelte Umkehrgleichung f_4

[3])

$$x = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{p-y}{p}\right)$$

$\Rightarrow$

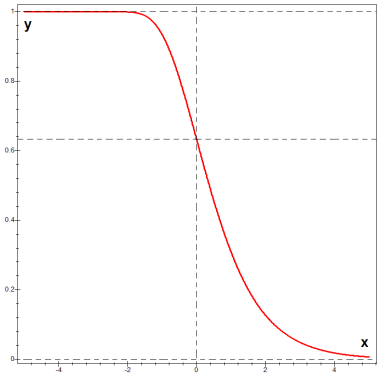
$$f_4 = y = p \cdot \left(1 - e^{-p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x}}\right)$$

Bei: gesp. Umk.gl.

$$p = q = 1$$

$\Rightarrow$

$$f_4^* = y = 1 - e^{-e^{-x}}$$



Definitionsbereich:

$$0 < \left(y = p \cdot \left(1 - e^{-p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x}}\right)\right) < 1$$

$\Rightarrow$

$$-\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{p-1}{p}\right) < x < +\infty \qquad \rightarrow \qquad -\infty < x^* < +\infty$$

Nullstelle:

$$0 = p \cdot \left(1 - e^{-p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x}}\right)$$

$\Rightarrow$

$$x_N = \text{n.def.}$$

1. Aufleitung:

$$\int y = p \cdot \left(x - \frac{1}{q} \cdot \text{Ei}\left(1, p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x}\right)\right)$$

Mit:

$$\text{Ei}\left(1, p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x}\right) = \int_1^{\infty} e^{-k \cdot p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x}} \cdot k^{-1} \cdot dk$$

1. Ableitung:

$$y' = -p^2 \cdot q^2 \cdot e^{-q \cdot \left(x + p \cdot e^{-q \cdot x}\right)} \qquad \rightarrow \qquad y'^* = -e^{-x - e^{-x}}$$

2. Ableitung:

$$y'' = -p^2 \cdot q^3 \cdot \left(p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x} - 1\right) \cdot e^{-q \cdot \left(x + p \cdot e^{-q \cdot x}\right)} \qquad \rightarrow \qquad y''^* = \left(1 - e^{-q \cdot x}\right) \cdot e^{-x - e^{-x}}$$

[3] Gemeinsamer Punkt = Symmetrieachse:
$p \cdot e^{-p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x}} = p \cdot \left(1 - e^{-p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x}}\right)$
$\Rightarrow$
$x_S = -\frac{1}{q} \cdot \ln\frac{\ln 2}{p \cdot q} \qquad \rightarrow \qquad x_S^* = -\ln(\ln 2) \approx 0{,}367$
$y_S = \frac{p}{2} \qquad \rightarrow \qquad y_S^* = \frac{1}{2}$

Extrema:

$$y' = 0 = -p^2 \cdot q^2 \cdot e^{-q\cdot\left(x+p\cdot e^{-q\cdot x}\right)}$$

$\Rightarrow$

$$x_E = \text{n.def.}$$

Wendepunkte:

$$y'' = 0 = -p^2 \cdot q^3 \cdot \left(p \cdot q \cdot e^{-q\cdot x} - 1\right) \cdot e^{-q\cdot\left(x+p\cdot e^{-q\cdot x}\right)}$$

$\Rightarrow$

$$x_W = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{1}{p \cdot q} \qquad \rightarrow \qquad x_W^* = 0$$

$$y_W = p \cdot \left(1 - e^{-1}\right) \qquad \rightarrow \qquad y_W^* = 1 - e^{-1}$$

5 Sonstige Zusammenhänge

Es gilt für die Spiegelung der Umkehrgleichung folgender Zusammenhang. Zusammenhang

$$f_3 = p \cdot e^{-p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x}} \qquad f_4 = p - p \cdot e^{-p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x}}$$

$\Rightarrow$

$$f_3 + f_4 = p$$

Bei:

$$p = q = 1$$

$\Rightarrow$

$$f_3^* + f_4^* = 1$$

Sowie für deren Umkehrfunktion.

$$f_1 = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{x}{p}\right) \qquad \rightarrow \qquad p \cdot q \cdot e^{-q \cdot f_1} + \ln x = \ln p$$

Und:

$$f_2 = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{p - x}{p}\right) \qquad \rightarrow \qquad p \cdot q \cdot e^{-q \cdot f_2} + \ln\left(p - x\right) = \ln p$$

$\Rightarrow$

$$p \cdot q \cdot e^{-q \cdot f_1} + \ln x = p \cdot q \cdot e^{-q \cdot f_2} + \ln\left(p - x\right)$$

$\Rightarrow$

$$e^{-q \cdot f_2} - e^{-q \cdot f_1} = -\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{p - x}{x} = \frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{x}{p - x}$$

Bei:

$$p = q = 1$$

$\Rightarrow$

$$e^{-f_2} - e^{-f_1} = -\ln\frac{1 - x}{x} = \ln\frac{x}{1 - x}$$

6 Besondere Eigenschaften

Eigenschaften

Es wird die Differenz der Grund- und der gespiegelten Grundgleichung gebildet.

$$f_{1,2} = f_1 - f_2 = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{x}{p}\right) + \frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{p-x}{p}\right)$$

$\Rightarrow$

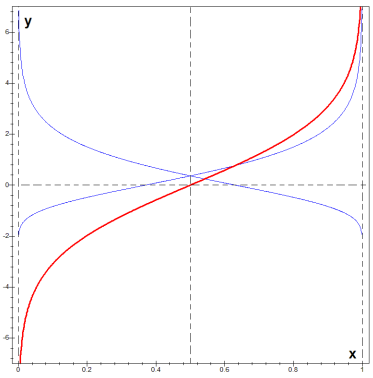
$$f_{1,2} = \frac{1}{q} \cdot \ln\frac{\ln\frac{p-x}{p}}{\ln\frac{x}{p}}$$

Bei:

$$p = q = 1$$

$\Rightarrow$

$$f_{1,2}^* = \ln\frac{\ln(1-x)}{\ln x}$$



Die Umkehrgleichung wird ermittelt.

$$x = \ln\frac{\ln(1-y)}{\ln y}$$

$\Rightarrow$

$$y^{e^x} + y - 1 = 0$$

Die Ordinate y lässt sich über die zweite Ableitung nach x isolieren.

$$\left(y^{e^x} + y - 1\right) \cdot \frac{d}{dx} = y^{e^x} \cdot e^x \cdot \ln y = 0$$

$\Rightarrow$

$$\left(y^{e^x} + y - 1\right) \cdot \frac{d^2}{dx^2} = y^{e^x} \cdot e^{2 \cdot x} \cdot \ln^2 y + y^{e^x} \cdot e^x \cdot \ln y = 0$$

$\Rightarrow$

$$f_3^* = e^{-e^{-x}}$$

Es wird die Differenz der gespiegelten Grund- und der Grundgleichung gebildet.

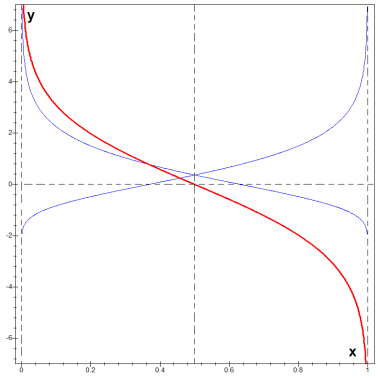
$$f_{2,1} = f_2 - f_1 = -\frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{p-x}{p}\right) + \frac{1}{q} \cdot \ln\left(-\frac{1}{p \cdot q} \cdot \ln\frac{x}{p}\right)$$

$\Rightarrow$

$$f_{2,1} = \frac{1}{q} \cdot \ln\frac{\ln\frac{x}{p}}{\ln\frac{p-x}{p}}$$

$\Rightarrow$

$$f_{2,1}^* = \ln\frac{\ln x}{\ln(1-x)}$$



Die Umkehrgleichung wird ermittelt.

$$x = \ln \frac{\ln y}{\ln (1-y)}$$

$\Rightarrow$

$$(1-y)^{e^x} - y = 0$$

Die Ordinate y lässt sich über die zweite Ableitung nach x isolieren.

$$\left((1-y)^{e^x} - y\right) \cdot \frac{d}{dx} = (1-y)^{e^x} \cdot e^x \cdot \ln (1-y) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\left((1-y)^{e^x} - y\right) \cdot \frac{d^2}{dx^2} = (1-y)^{e^x} \cdot e^{2 \cdot x} \cdot \ln^2 (1-y) + (1-y)^{e^x} \cdot e^x \cdot \ln (1-y) = 0$$

$\Rightarrow$

$$f_4^* = 1 - e^{-e^{-x}}$$

7 Die Gumbel- und die pq-Verteilung

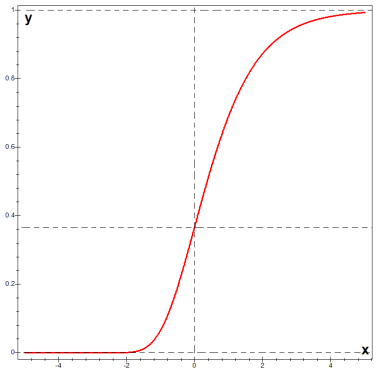
Verteilung

Über der Umkehrgleichung f_3 ist bekannt:

$$y = p \cdot e^{-p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x}}$$

Für den Spezialfall $p = 1$ und $q = 1$ geht f_3 in die Standard- Gumbel- Verteilung über:

$$f_3^* = y_G^* = F_G^*(x) = e^{-e^{-x}}$$



Die allgemeine Beschreibung der Gumbel- Verteilung ist gegeben mit:

$$y_G = F_G(x) = e^{-e^{-\frac{1}{\beta} \cdot (x-\mu)}}$$

Wobei β einen Skalierungs- und μ einen Verschiebefaktor darstellt.

Die Gumbel- Verteilung besitzt folgende Charakteristika.

Definitionsbereich:

$$-\infty < x < +\infty$$

Wertebereich:

$$0 < y < 1$$

Nullstelle:

$$x_N = \text{n.def.}$$

1. Aufleitung:

$$\int y = \beta \cdot \text{Ei}\left(1, e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}\right)$$

Mit:

$$\text{Ei}\left(1, e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}\right) = \int_1^{\infty} e^{-t \cdot e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}} \cdot t^{-1} \cdot dk$$

1. Ableitung:

$$y' = \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} \cdot e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

2. Ableitung:

$$y'' = \frac{1}{\beta^2} \cdot \left(e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} - 1\right) \cdot e^{-\frac{x-\mu}{\beta}} \cdot e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

Extrema:

$$y' = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_E = \text{n.def.}$$

Wendepunkte:

$$y'' = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_W = \mu \qquad y_W = e^{-1}$$

Die erste Ableitung einer Verteilfunktion ist seine Dichtefunktion.

8 Die Gumbel- und die pq-Dichtefunktion

Gegeben ist die Verteilfunktion $F_{pq}(x)$ der pq- Verteilung. Dichte

$$F_{pq}(x) = p \cdot e^{-p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x}} \qquad \rightarrow \qquad F^*_{pq}(x) = e^{-e^{-x}}$$

Die erste Ableitung definiert die Dichtefunktion $f_{pq}(x)$.

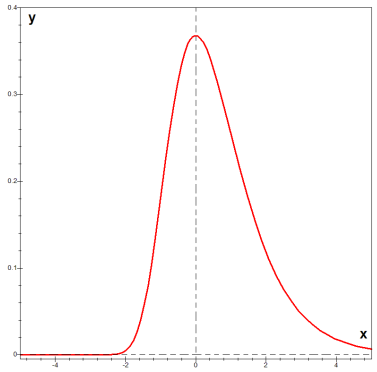
$$y' = p^2 \cdot q^2 \cdot e^{-q \cdot \left(x + p \cdot e^{-q \cdot x}\right)}$$

$\Rightarrow$

$$f_{pq}(x) = p^2 \cdot q^2 \cdot e^{-q \cdot x} \cdot e^{-q \cdot p \cdot e^{-q \cdot x}}$$

Für den Spezialfall $p = 1$ und $q = 1$ geht f_{pq} in die Standard- Gumbel- Dichte über:

$$f^*_G(x) = e^{-x} \cdot e^{-e^{-x}} = e^{-x} \cdot F^*_G(x) = e^{-x} \cdot F^*_{pq}(x)$$



Die allgemeine Beschreibung der Gumbel- Dichte ist gegeben mit:

$$f_G(x) = \frac{1}{\beta} \cdot e^{-\frac{1}{\beta} \cdot (x - \mu)} e^{-e^{-\frac{1}{\beta} \cdot (x - \mu)}}$$

Wobei β einen Skalierungs- und μ einen Verschiebefaktor darstellt.

Die Gumbel- Dichte besitzt folgende Charakteristika.

Definitionsbereich:

$$-\infty < y < +\infty$$

Wertebereich:

$$0 < x \leq \frac{1}{\beta} \cdot e^{-1}$$

Nullstelle:

$$x_N = \text{n.def.}$$

1. Aufleitung:

$$\int y = y_G = F_G(x) = e^{-e^{-\frac{x - \mu}{\beta}}}$$

1. Ableitung:

$$y' = \frac{1}{\beta^2} \cdot \left(e^{-\frac{x - \mu}{\beta}} - 1\right) \cdot e^{-\frac{x - \mu}{\beta}} \cdot e^{-e^{-\frac{x - \mu}{\beta}}}$$

2. Ableitung:

$$y'' = \frac{1}{\beta^3} \cdot \left(\left(e^{-\frac{x - \mu}{\beta}} - 3\right) \cdot e^{-\frac{x - \mu}{\beta}} + 1\right) \cdot e^{-\frac{x - \mu}{\beta}} \cdot e^{-e^{-\frac{x - \mu}{\beta}}}$$

Extrema:

$$x_E = \mu \qquad y_E = \frac{1}{\beta} \cdot e^{-1}$$

Wendepunkte:

$$x_{W;1} = \mu - \beta \cdot \ln\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}\right) \qquad y_{W;1} = \frac{1}{\beta} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}\right) \cdot e^{-\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}\right)}$$

$$x_{W;2} = \mu - \beta \cdot \ln\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}\right) \qquad y_{W;1} = \frac{1}{\beta} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}\right) \cdot e^{-\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}\right)}$$

Abstand der Wendepunkte:

$$\sigma_W^2 = |\beta| \cdot \ln \frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \approx 1,925 \cdot |\beta|$$

Die erste Aufleitung einer Dichtefunktion ist seine Verteilfunktion.

9 Die Umkehrgleichung der Gumbelverteilung

Die Anti-Gumbel-Verteilung wird durch die Umkehrfunktion gebildet. Anti- Gumbel Vert.

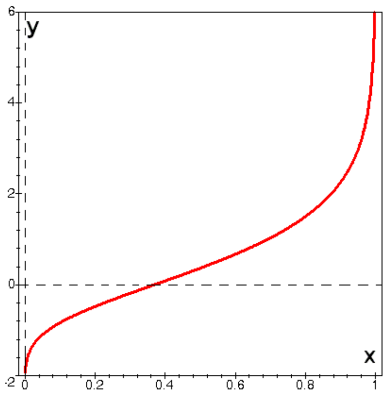
$$x = e^{-e^{-\frac{y-\mu}{\beta}}}$$

$\Rightarrow$

$$y_{AG} = F_{AG} = \mu - \beta \cdot \ln(-\ln x)$$

Für den Spezialfall $\beta = 1$ geht die Anti-Gumbel-Verteilung in ihre Standardform über:

$$y^*_{AG} = F^*_{AG} = -\ln(-\ln x)$$



Wobei β einen Skalierungs- und μ einen Verschiebefaktor darstellt.

Die Anti-Gumbel-Verteilung besitzt folgende Charakteristika.

Definitionsbereich:

$$0 < x < 1$$

Wertebereich:

$$-\infty < y < +\infty$$

Nullstelle:

$$x_N = e^{-e^{\frac{\mu}{\beta}}}$$

1. Aufleitung:

$$\int y_{AG} = \mu \cdot x - \beta \cdot x \cdot \ln(-\ln x) - \beta \cdot \mathrm{Ei}(1, -\ln x)$$

Mit:

$$\mathrm{Ei}(1, -\ln x) = x \cdot \int_1^{\infty} \frac{e^t}{t} \cdot dt$$

1. Ableitung:

$$y' = -\frac{\beta}{x \cdot \ln x}$$

2. Ableitung:

$$y'' = (\ln x + 1) \cdot \frac{\beta}{x^2 \cdot \ln^2 x}$$

Extrema:

$$x_E = \text{n.def.}$$

Wendepunkte:

$$x_W = e^{-1} \qquad y_W = \mu$$

Die erste Ableitung einer Verteilfunktion ist seine Dichtefunktion.

10 Die Umkehrgleichung der Gumbeldichte

Anti- Gumbel Dich.

Die erste Ableitung der Anti-Gumbel-Verteilung liefert die Dichte.

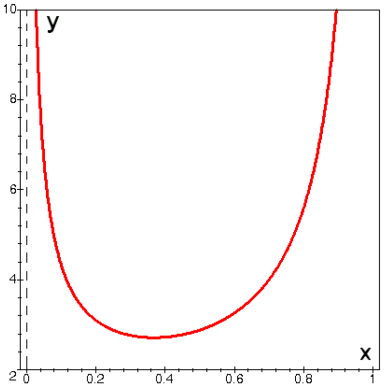
$$y'_{AG} = f_{AG}$$

$\Rightarrow$

$$f_{AG} = -\frac{\beta}{x \cdot \ln x}$$

Für den Spezialfall $\beta = 1$ geht die die Anti-Gumbel-Dichte in ihre Standardform über:

$$f^*_{AG} = -\frac{1}{x \cdot \ln x}$$



Wobei β einen Skalierungsfaktor darstellt.

Die Gumbel-Dichte besitzt folgende Charakteristika.

Definitionsbereich:

$$0 < x < 1$$

Wertebereich:

$$\beta \cdot e^1 < y < +\infty$$

Nullstelle:

$$x_N = \text{n.def.}$$

1. Aufleitung:

$$\int y^*_{AG} = -\beta \cdot \ln(-\ln x)$$

1. Ableitung:

$$y' = (\ln x + 1) \cdot \frac{\beta}{x^2 \cdot \ln^2 x}$$

2. Ableitung:

$$y'' = -\frac{\beta}{x^3 \cdot \ln x} \cdot \left(2 + \frac{3}{\ln x} + \frac{2}{\ln^2 x}\right)$$

Extrema:

$$x_E = e^{-1} \qquad y_E = \beta \cdot e^1$$

Wendepunkte:

$$x_W = \text{n.def.}$$

Die erste Ableitung einer Verteilfunktion ist seine Dichtefunktion.

11 Der Zusammenhang der Koeffizienten p, q mit β, μ

11.1 Bei gegebenen p und q

Für die Berechnungsgrundlage von f_3 ist der Wert x_W bekannt. So gilt für die Wendestelle: Koeffizienten

$$f_3 = p \cdot e^{-p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x}}$$

$\Rightarrow$

$$x_W = -\frac{1}{q} \cdot \ln \frac{1}{p \cdot q} = \frac{\ln(p \cdot q)}{q} = \frac{\ln p + \ln q}{q}$$

Für die Berechnungsgrundlage von $F_G(x)$ ist der Wert x_W bekannt. So gilt für die Wendestelle:

$$F_G(x) = e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$$

$\Rightarrow$

$$x_W = \mu$$

Durch Gleichsetzen beider Terme erhält man einen Zusammenhang zwischen Gumbel und pq.

$$\mu = \frac{\ln p + \ln q}{q}$$

Durch das Gleichsetzen von f_3 und $F_G(x)$ ist β ermittelbar.

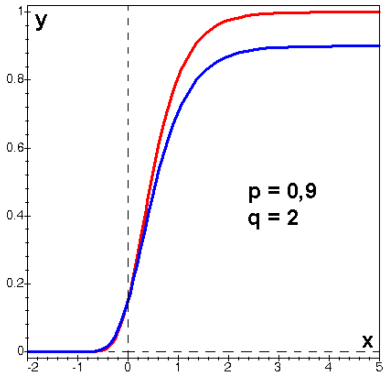
$$f_3 = F_G(x)$$

$\Rightarrow$

$$\beta = -\frac{1}{q} \cdot \frac{q \cdot x - \ln p - \ln q}{\ln(p \cdot q \cdot e^{-q \cdot x} - \ln p)}$$

Der Wert von β ist abhängig von x. Dadurch ist es möglich, nur für bestimmte x- Werte eine Gleichheit zwischen den Funktionen zu erzeugen. Es gilt beispielshalber für $x = 0$.

$$\beta_{x=0} = \frac{1}{q} \cdot \frac{\ln p + \ln q}{\ln(p \cdot q - \ln p)}$$



Für einen Wertebereich zwischen 0 und 1 ergeben sich mit $p = 1$ einfache Konvertierungsvorschriften zwischen Gumbel und pq.

$$\mu_{p=1} = \frac{\ln q}{q} \qquad \beta_{p=1} = \frac{1}{q}$$

11.2 Bei gegebenen β und μ

Die Wertebereiche von f_3 unf $F_G(x)$ sind bekannt. Daraus folgt, dass:

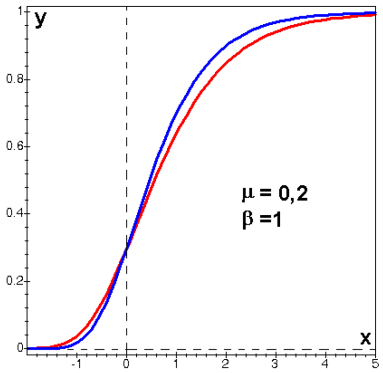
$$p = 1$$

Durch das Gleichsetzen von f_3 und $F_G(x)$ bei $p = 1$ ist β ermittelbar.

$$q \cdot x - \ln q = \frac{x - \mu}{\beta}$$

Einen allgemeingültigen analytischen Ausdruck gibt es nicht. Für den Fall $x = 0$ als speziellen Wert ist eine Berechnungsgrundlage für q vorhanden. Die Gleichheit der Funktionen liegt dann nur an dieser Stelle.

$$q_{x=0} = e^{\frac{\mu}{\beta}}$$



LaTeX 2_ε