Gibt es ein Maxima des polaren Trägheitsmoments eines Kreisrings?

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

Erstellt: 12. Mai 2012 – Letzte Revision: 4. April 2015

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Berechnung des polaren Trägheitsmomentes I_P eines Kreisrings

[001]

I_P- Berechnung

Das polare Trägheitsmoment eines Kreisrings ist erfragt. Die allgemeine Berechnungsgrundlage dazu ist gegeben mit:

$$I_P = \int_A \rho^2 \cdot dA$$

Der mittlere Radius ρ eines Kreisrings ist konstant und besitzt keine Abhängigkeiten. Das Flächeninkrement dA um den mittleren Radius ist:

$$dA = U \cdot d\rho$$

$\Rightarrow$

$$dA = 2\pi \cdot \rho \cdot d\rho$$

Das Flächeninkrement wird eingesetzt.

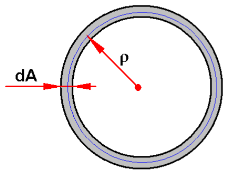

Abbildung 1: Die Berechnung des polaren Trägheitsmomentes.

$$I_P = 2\pi \cdot \int_r^R \rho^3 \cdot d\rho$$

$\Rightarrow$

$$I_P = \frac{\pi}{2} \cdot \rho^4\Big|_r^R = \frac{\pi}{2} \cdot \left(R^4 - r^4\right)$$

2 Problemstellung

Gegeben ist das polare Trägheitsmoment I_P eines Kreisrings (im weiteren Verlauf I genannt). Problemstellung

$$I_P = I = \frac{\pi}{2} \cdot \left(R^4 - r^4\right) = I\left(R, r\right)$$

Mit R dem Außenradius und r dem Innenradius. Gegeben ist die Fläche eines Kreisrings A_P (im weiteren Verlauf A genannt).

$$A_P = A = \pi \cdot \left(R^2 - r^2\right) = A\left(R, r\right)$$

Gesucht ist das **lokale** maximale polare Trägheitsmoment I bei **gegebener, konstanter Kreisringfläche** A und frei wählbaren Radien R und r.

3 Nebenbedingung

Nebenbedingung

Um die Fragestellung lösen zu können, wird die Wandstärke t des Kreisrings eingeführt. So gilt eindeutig:

$$R = r + t$$

$\Rightarrow$

$$R^2 = (r + t)^2$$

$\Rightarrow$

$$R^4 = (r + t)^4$$

In die Kreisringfläche eingesetzt:

$$A = \pi \cdot \left([r + t]^2 - r^2 \right) = A\,(t, r)$$

$\Rightarrow$

$$A = \pi \cdot t \cdot (2r + t) = A\,(t, r)$$

Der nun linear vorkommende Radius r wird isoliert und die Nebenbedingung definiert.

$$r = \frac{A - \pi \cdot t^2}{2\pi \cdot t}$$

4 Rückführung auf eine Abhängige

In das polare Trägheitsmoment I wird ebenfalls eingesetzt. Rückführung

$$I = \frac{\pi}{2} \cdot \left((r+t)^4 - r^4 \right) = I\left(t, r\right)$$

Der Wert für r ist aus der Nebenbedingung bekannt, wird dieser in das polare Trägheitsmoment eingesetzt, ist I nur noch von der Wandstärke t abhängig.

$$I = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\left(\frac{A - \pi \cdot t^2}{2\pi \cdot t} + t \right)^4 - \left(\frac{A - \pi \cdot t^2}{2\pi \cdot t} \right)^4 \right) = I\left(t\right)$$

5 Ermittlung der Extrema und Problemlösungen

Problemlösung

Um ein Extrema zu ermitteln, wird nach t differenziert.

$$\frac{d}{dt}I = \frac{d}{dt}\left[\frac{\pi}{2}\cdot\left(\left(\frac{A+\pi\cdot t^2}{2\pi\cdot t}\right)^4 - \left(\frac{A-\pi\cdot t^2}{2\pi\cdot t}\right)^4\right)\right] = \frac{d}{dt}I(t)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}I = -\frac{A}{2}\cdot\frac{\left(A-\pi\cdot t^2\right)\cdot\left(A+\pi\cdot t^2\right)}{\pi^2\cdot t^3} = \frac{d}{dt}I(t)$$

Anschließend wird $\frac{d}{dt}I = 0$ gesetzt und nach t umgestellt. Ergebnis sind infolge des 4. Grades von t vier Lösungen, wovon eine einen praktischen Sinn ergibt, das extremale t_E.

$$t_{1;2} = \pm\sqrt{+\frac{A}{\pi}} \qquad t_{3;4} = \pm\sqrt{-\frac{A}{\pi}}$$

$\Rightarrow$

$$t_E = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

Damit ist auch r_E bekannt.

$$r_E = \frac{A-\pi\cdot t_E^2}{2\pi\cdot t_E} = 0$$

$\Rightarrow$

$$R_E = t_E$$

Für das polare Widerstandsmoment ergibt sich dann das Extrema mit:

$$I_E = \frac{\pi}{2}\cdot R_E^4 = I_E(R_E)$$

Analog für die Fläche:

$$A = \pi\cdot R_E^2 = A(R_E)$$

Das Extrema des polaren Widerstandsmomentes eines Kreisrings ist demnach das polare Widerstandsmoment eines Kreises.

6 Kontrolle der Art des Extrema

Bleibt zu zeigen, ob das Extrema ein Minimum oder ein Maximum darstellt. Dazu wird die zweite Ableitung von I_P ermittelt. Kontrolle

$$\frac{d^2}{dt^2} I = \frac{d}{dt} \left[-\frac{A}{2} \cdot \frac{\left(A - \pi \cdot t^2\right) \cdot \left(A + \pi \cdot t^2\right)}{\pi^2 \cdot t^3} \right] = \frac{d^2}{dt^2} I\left(t\right)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d^2}{dt^2} I = \frac{A}{2} \cdot \frac{\pi^2 \cdot t^4 + 3 \cdot A^2}{\pi^2 \cdot t^4} = \frac{d^2}{dt^2} I\left(t\right)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d^2}{dt^2} I = 2 \cdot A = \frac{d^2}{dt^2} I\left(t_E\right)$$

Zu sehen ist, dass für alle praktisch vorkommenden Werte von R gilt:

$$\frac{d^2}{dt^2} I > 0$$

7 Auswertung

Auswertung

Demnach ist das einzig gefundene Extrema ein Minimum. Ein laut Aufgabenstellung erfragtes **lokales** Maximum gibt es nicht unter den gewählten Randbedingungen.

$$I_{Min} = \frac{A^2}{2 \cdot \pi}$$

Bei:

$$t = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

Bei:

$$R = t = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

Bei:

$$r = 0$$

8 Nachtrag

Die Aussage, dass das polare Trägheitsmoment eines Kreises ein Minimum darstellt, ist auf den ersten Blick nicht einsichtig, verstößt es doch gegen die einfach aufzustellende Aussage, dass dann gelten müsste:

$$I_{Kreisring} > I_{Kreis}$$

$\Rightarrow$

$$R^4 - r^4 > R^4$$

$\Rightarrow$

$$r^4 < 0$$

Lösung: Hier wurde bei der Aufstellung der Probeaussage grob gegen eine Randbedingung verstoßen, nämlich das gilt $A = const$. Richtig aufgestellt gilt:

$$(r + t)^4 - r^4 > t^4$$

$\Rightarrow$

$$r^2 + \frac{3}{2} \cdot r \cdot t + t^2 > 0$$

Schon diese Ungleichung ist für alle real vorkommende r und t wahr. Eingesetzt mit t_E und $r = 0$ vereinfacht sich die Aussage zu:

$$A > 0$$

Was immer erfüllt ist.

LaTeX