... und es kippt doch (nicht) ...
Kippen infolge (ungünstiger) Windlasten

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 10. Januar 2015 – Letzte Revision: 11. September 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Modell und Bemessung **4**
2.1 Einzelkraft 4
2.2 Zwei Teilkräfte 5
2.3 Drei Teilkräfte 6
2.4 n- Teilkräfte 7

3 Nachweis **8**
3.1 Aufbau von κ 8
3.2 Übergang zum nachzuweisenden Modell 9
3.3 Nachweis der (Nicht)Erfüllbarkeit des Übergangs 10

4 Anmerkungen **12**

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Einleitung

[001]ff.

In der Zeit der Stürme und Windböen hört man oft in lokalen Medien, was alles so letzte Nacht oder mitten am Tag vom Winde verweht wurde. Auch ich hatte schon einmal Besuch von Nachbars Tomatengewächshaus mitten in der dunklen Tageszeit. Die Paradiesfrüchte waren schon lange geerntet. Auf der Wiese landete lediglich ein großer Haufen Holz und Folie. Nun, der Kunststoff zum Verwerten, das Holz in den Kamin, einen Schaden gab es nicht für mich, nur einen gehörigen Schrecken über das Splittern und Krachen mitten in der Nacht und das hektische Nachschauen in Schlappen und dünner Wäsche bei eben Wind, Niesel und Dunkelheit.

Am nächsten Morgen dann gab es am Frühstückstisch das große Auswerten. Im Garten noch das neu angelieferte Brennholz, daneben unser heil gebliebener Gartengeräteschuppen. Natürlich beteuerte ich, dass das Ding stabil in der Erde verankert war und noch stärkere Winde ertragen würde. Aber dann kam diese gefürchtete Frage, welche erst einmal einen stutzen und dann hilflos zurück lässt. Denn wie soll man an einem Frühstückstisch auf die Schnelle nachweisen ohne Wissenschaft, aber mit Brotkrümeln und Butterflecken, das es eben nicht so ist wie:

„ ... und wenn der Wind so ungünstig kommt, dass es doch umkippt?“

Der Nachweis ist schnell im ingenieurwissenschaftlichen Kontext durchführbar über einen energetischen Vergleich zwischen ankommender (Wind)Energie und (Lage)Energie des betrachteten Systems.

Dennoch soll hier gezeigt werden, dass der Nachweis auch mit Bordmitteln der Technischen Mechanik (nicht des Frühstückstisches) sprich „Kräfte am System“ erfolgen kann.

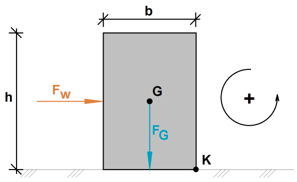
Daher wird sich dieses Thema **nicht** bis in das kleinste Detail erschöpfen.

Es sei mir verziehen. Der Kaffee wird sonst kalt.

2 Modell und Bemessung

2.1 Einzelkraft

Ein System wird mit einer Windlast F_W belegt. Zum Anfang als Einzelkraft angesehen, soll diese im Schwerpunkt angreifen, welcher idealerweise im Mittelpunkt des betrachteten Objektes liegt.



Das resultierende Kippmoment M_K soll berechnet werden.

$$M_K = F_G \cdot \frac{b}{2} - F_W \cdot \frac{h}{2} = 0$$

Das System bleibt stabil, solange gilt:

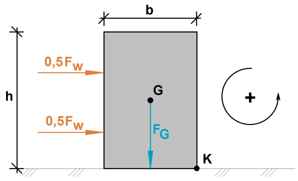
$$F_G \cdot b \geq F_W \cdot h$$

$\Rightarrow$

$$F_W \leq F_G \cdot \frac{b}{h}$$

2.2 Zwei Teilkräfte

Es wird die im ersten Modell betrachtete Einzelkraft in zwei Teilkräfte zerlegt, welche mit gleichen Rand- und Mittenabständen das System angreift.



Das resultierende Kippmoment M_K soll berechnet werden.

$$M_K = F_G \cdot \frac{b}{2} - \frac{1}{2} \cdot F_W \cdot \frac{1}{3} \cdot h - \frac{1}{2} \cdot F_W \cdot \frac{2}{3} \cdot h = 0$$

Das System bleibt stabil, solange gilt:

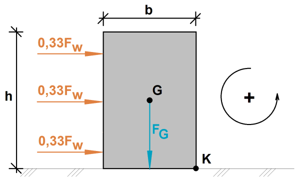
$$F_G \cdot b \geq F_W \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \right) \cdot h$$

$\Rightarrow$

$$F_W \leq F_G \cdot \frac{b}{h}$$

2.3 Drei Teilkräfte

Es wird die im ersten Modell betrachtete Einzelkraft in drei Teilkräfte zerlegt, welche mit gleichen Rand- und Mittenabständen das System angreift.



Das resultierende Kippmoment M_K soll berechnet werden.

$$M_K = F_G \cdot \frac{b}{2} - \frac{1}{3} \cdot F_W \cdot \frac{3}{4} \cdot h - \frac{1}{3} \cdot F_W \cdot \frac{2}{4} \cdot h - \frac{1}{3} \cdot F_W \cdot \frac{1}{4} \cdot h = 0$$

Das System bleibt stabil, solange gilt:

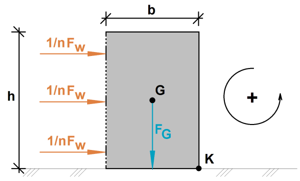
$$F_G \cdot b \geq F_W \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot h$$

$\Rightarrow$

$$F_W \leq F_G \cdot \frac{b}{h}$$

2.4 n- Teilkräfte

Es wird die im ersten Modell betrachtete Einzelkraft in n- Teilkräfte (Streckenlast für $n \rightarrow \infty$) zerlegt, welche mit gleichen Rand- und Mittenabständen das System angreift.



$$M_K = F_G \cdot \frac{b}{2} - \frac{1}{n} \cdot F_W \cdot \frac{n}{n+1} \cdot h - \frac{1}{n} \cdot F_W \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot h - \ldots - \frac{1}{n} \cdot F_W \cdot \frac{2}{n+1} \cdot h - \frac{1}{n} \cdot F_W \cdot \frac{1}{n+1} \cdot h = 0$$

Das resultierende Kippmoment M_K soll berechnet werden.

$$F_G \cdot b \geq F_W \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} + 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n+1} + \ldots + 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n+1} + 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}\right) \cdot h$$

Das System bleibt stabil, solange gilt:

$$F_W \leq F_G \cdot \frac{b}{\kappa \cdot h}$$

Mit:

$$\kappa = 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} + 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n+1} + \ldots + 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n+1} + 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}$$

$\Rightarrow$

$$\kappa = \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} i$$

$\Rightarrow$

$$\kappa = \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{2} \cdot (n+1)$$

$\Rightarrow$

$$\kappa = 1$$

3 Nachweis

3.1 Aufbau von κ

Es soll κ ein wenig näher betrachtet werden.

$$\kappa = 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-0}{n+1} + 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n+1} + \ldots + 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n+1} + 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1}$$

In κ sind folgende Teilterme enthalten:

- Konstanter Multiplikator $\leftarrow 2$
- Die Amplitude der n.- Einzelkraft $\leftarrow \frac{1}{n}$
- Hebelarm der n.- Einzelkraft zum Drehpunkt K $\leftarrow \frac{n-k}{n+1}$

3.2 Übergang zum nachzuweisenden Modell

Wie ändert sich κ, wenn die Amplituden der Einzelkräfte nicht reziprok zu n sind, sondern rein zufällig[1], aber im Rahmen der Rand- und Nebenbedingungen. Dann ist folgender Übergang gegeben:

$$\frac{1}{n} \to \frac{1}{m_i}$$

Mit den Nebenbedingungen:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} = 1 \qquad 0 < \frac{1}{m_i} \leq 1 \qquad n \geq 1$$

Insbesondere:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m_i} = 1 \qquad 0 < \frac{1}{m_i} < 1 \qquad n > 1$$

Für κ ändert sich dann:

$$\kappa = 2 \cdot \frac{1}{m_n} \cdot \frac{n}{n+1} + 2 \cdot \frac{1}{m_{n-1}} \cdot \frac{n-1}{n+1} + \ldots + 2 \cdot \frac{1}{m_2} \cdot \frac{2}{n+1} + 2 \cdot \frac{1}{m_1} \cdot \frac{1}{n+1}$$

$\Rightarrow$

$$\kappa = \frac{2}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{m_i}$$

Kann es nun dennoch zum Kippen kommen, falls eine ungünstig ansetzende Teilwindkraft auftritt? Vielleicht, jedoch auch nur dann, wenn der globale Nachweis es zulässt:

$$F_W > F_G \cdot \frac{b}{\kappa \cdot h}$$

Es wird zweckmäßig umgestellt.

$$\kappa > \frac{F_G}{F_W} \cdot \frac{b}{h}$$

Einsetzen der Berechnungsgrundlage für κ und weiteres Umstellen.

$$\frac{2}{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{m_i} > \frac{F_G}{F_W} \cdot \frac{b}{h}$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{m_i} > \frac{n+1}{2} \cdot \frac{F_G}{F_W} \cdot \frac{b}{h}$$

Erweitern mit n.

$$n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{m_i} > n \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{F_G}{F_W} \cdot \frac{b}{h}$$

Rechter Term als Summenformel.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{m_i} \cdot i > \frac{F_G}{F_W} \cdot \frac{b}{h} \cdot \sum_{i=1}^{n} i$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n}{m_i} - \frac{F_G}{F_W} \cdot \frac{b}{h} \right) \cdot i > 0$$

Ist letztere Bedingung erfüllt, dann kippt das System dennoch.

[1] Das entspräche dann der Frage: „ ... und wenn der Wind so ungünstig kommt, dass es doch umkippt?“

3.3 Nachweis der (Nicht)Erfüllbarkeit des Übergangs

Aber, diese Bedingung ist nicht vollständig für alle m_i nachweisbar, da unbekannt ist, welches Signum der Ausdruck $\frac{n}{m_i} - \frac{F_G}{F_W} \cdot \frac{b}{h}$ besitzt für ein konkret betrachtetes m_i. Die Summe aller Terme mit positiven Signum muss größer sein, als die mit negativen Signum, um dass das System kippt.

Fakt ist, egal wieviel Möglichkeiten es gibt, mit dem der Wind angreifen könnte, um das System kippen zu lassen, es muss dann mindestens ein Ausdruck von m_i geben[2], das ein positives Signum besitzt und gleichzeitig so groß ist, dass gilt:

$$\left(\frac{n}{m_k} - \frac{F_G}{F_W} \cdot \frac{b}{h}\right) \cdot k > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \left(\frac{n}{m_i} - \frac{F_G}{F_W} \cdot \frac{b}{h}\right) \cdot i$$

Es wird mit dem linken Term auf beiden Seiten summiert.

$$2 \cdot \left(\frac{n}{m_k} - \frac{F_G}{F_W} \cdot \frac{b}{h}\right) \cdot k > \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n}{m_i} - \frac{F_G}{F_W} \cdot \frac{b}{h}\right) \cdot i$$

Der rechte Term ist durch obige Kippbedingung definiert. Diese wird eingesetzt.

$$2 \cdot \left(\frac{n}{m_k} - \frac{F_G}{F_W} \cdot \frac{b}{h}\right) \cdot k > 0$$

Die Werte 2 und k können gekürzt werden, da $2 \neq 0$ und $k = 0$ ausgeschlossen ist durch die Randbedingung $n \geq 1$.

$$\frac{n}{m_k} > \frac{F_G}{F_W} \cdot \frac{b}{h}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{n}{m_k} \cdot F_W > F_G \cdot \frac{b}{h}$$

Dieser nun relative einfache Ausdruck besagt wieder, ist die Bedingung erfüllt, kippt das System infolge der Einwirkung von F_W modifiziert durch n/m_k.[3]

Mit der allgemeinen, globalen Kippbedingung kann weiter untersucht werden.

$$F_W > F_G \cdot \frac{b}{h}$$

Beide Relationen werden subtrahiert und umgeformt.

$$\frac{n}{m_k} \cdot F_W - F_W > 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{n}{m_k} > 1$$

$\Rightarrow$

$$n > m_k$$

Es ist immer noch gegeben, ist diese Bedingung erfüllt, kippt das System!

Bekannt und definiert ist n aus den Nebenbedingungen.

$$n > 1$$

Wieder werden die Relationen subtrahiert und umgestellt.[4]

$$0 > m_k - 1$$

[2] Wenn mehr als eine Kraft das System zum Kippen brächte, dann kann **eine** aus diesen Kräften gebildete Ersatzkraft das auch.

[3] Setzt man hier $m_k \to n$, dann erfolgt eine Rückführung in das anfängliche Modell.

[4] Warum nicht $n \geq 1$? Weil nachgewiesen werden soll, dass eine besonders ungünstig angreifende Teilkraft das System zum Kippen bringt. Am Modell sind also mindestens zwei Teilkräfte beteiligt, daher $n > 1$.

⇒

$$m_k < 1$$

⇒

$$\frac{1}{m_k} > 1$$

Das jedoch steht im Widerspruch zur Nebenbedingung, welche fordert für alle:

$$0 < \frac{1}{m_i} < 1$$

Das System wird nicht kippen, solange $F_W \leq F_G \cdot \frac{b}{h}$ erfüllt ist.

„ ... und wenn der Wind doch so ungünstig kommt, dass es wirklich umkippt?“

Dann bauen wir uns eben einen neuen Gartengeräteschuppen.

4 Anmerkungen

Was man beachten muss.

Es wurde nachgewiesen: „Das System kippt nicht!“ Solange der Wind sich an die vereinbarten F_W hält, solange kippt da nichts. Aber, alles hat jedoch ein aber: „Nur solange alle Randbedingungen erhalten bleiben.“ Oftmals ist das für alternde Systeme im Allgemeinen nicht gegeben.

- durch Korrosion geschwächte Querschnitte
- sich mit der Zeit lockernde Verbindungen
- im Laufe der Jahre geänderte Lagerbedingungen
- das ganze System ändert sich (eine durch Alterung porös gewordene Scheibe wird zerstört, das geschlossene System wird zum offenen, der Wind fährt im Inneren in eine Windfalle).

Letztendlich entspricht letzteres Szenario dem Grenzwert von b.

$$F_W \leq \lim_{b \to 0} F_G \cdot \frac{b}{h}$$

$\Rightarrow$

$$F_W \leq 0$$

Das System fällt schon ohne Wind um.

LaTeX 2_ε