Kleine Theorie über Interpolationsfehlerpolynome
Allgemeines und Beispiele

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

Erstellt: 20. August 2014 – Letzte Revision: 29. August 2014

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Allgemeines Lösungsverfahren

1.1 Vorbereitende Betrachtungen

[001] Gegeben ist ein Interpolationspolynom nach Verfahren I:

$$P(x)_I = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$$

Gegeben ist ein Interpolationspolynom nach Verfahren II:

$$P(x)_{II} = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \ldots + b_{n-1} \cdot x^{n-1} + b_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot x^i$$

Beide Polynome sind vom gleichen Grad und wurden mindestens ermittelt über die selben Datenpunkte $P_0 = (x_0, y_0)$ und $P_n = (x_n, y_n)$.

Die Differenz beider Polynome sei das Fehlerpolynom der Interpolation.

$$P(x) = P(x)_I - P(x)_{II}$$

$\Rightarrow$

$$P(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1) \cdot x + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1}) \cdot x^{n-1} + (a_n - b_n) \cdot x^n = \sum_{i=0}^{n} (a_i - b_i) \cdot x^i$$

$\Rightarrow$

$$P(x) = c_0 + c_1 \cdot x + \ldots + c_{n-1} \cdot x^{n-1} + c_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot x^i$$

Mit:

$$c_i = a_i - b_i$$

Angenommen, die Datenpunkte seien nach der Abszisse aufsteigend sortiert, so dass gilt

$$x_0 = MIN(x_i) \qquad x_n = MAX(x_i)$$

dann kann das bestimmte Integral des Fehlerpolynoms ermittelt werden.

$$\tilde{F}(c_i) = \int_{x_0}^{x_n} P(x) dx = \int_{x_0}^{x_n} \left(\sum_{i=0}^{n} c_i \cdot x^i \right) dx$$

Von Interesse im weiteren Verlauf ist der Betrag des Fehlerpolynoms.

$$F(c_i) = \int_{x_0}^{x_n} |P(x)| dx = \left| \int_{x_0}^{x_n} \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot x^i dx \right|$$

Damit ist $F(c_i)$ berechnet.

$$\tilde{F}(c_i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x_n^{i+1} - x_0^{i+1}}{i+1} \cdot c_i$$

$\Rightarrow$

$$F(c_i) = \left| \sum_{i=0}^{n} \frac{x_n^{i+1} - x_0^{i+1}}{i+1} \cdot c_i \right|$$

$\Rightarrow$

$$F(c_i) = \mathrm{sgn} \tilde{F}(c_i) \cdot \tilde{F}(c_i)$$

1.2 Verkürztes Verfahren - Über m ein Minimum ermitteln

Ziel ist es, einen Bereich zu finden, wo das Fehlerpolynom minimiert ist. Dafür gibt es global drei Möglichkeiten.

- Optimierung der Koeffizienten c_i. Diese stehen jedoch fest über die einzelnen Interpolationen.
- Die Anzahl der Datenpunkte gegen unendlich gehen lassen. Diese stehen jedoch ebenso im Vornherein fest.
- Den Ausdruck $x_n^{i+1} - x_0^{i+1}$ optimieren.

Dazu muss umgestellt werden:

$$\tilde{F}(x_m, m) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x_m + m)^{i+1} - (x_m - m)^{i+1}}{i+1} \cdot c_i$$

$\Rightarrow$

$$F(x_m, m) = \left| \sum_{i=0}^{n} \frac{(x_m + m)^{i+1} - (x_m - m)^{i+1}}{i+1} \cdot c_i \right|$$

Mit $m > 0$! Wobei x_m der Mittelpunkt des zukünftigen minimierten Fehlerpolynoms sein soll und m das symmetrische Intervall um x_m.

Zuerst wird das Fehlerpolynom zentriert, bedeutet, es wird ohne Änderung der Allgemeingültigkeit $x_m = 0$ gesetzt.

$$\tilde{F}(m) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(+m)^{i+1} - (-m)^{i+1}}{i+1} \cdot c_i$$

$\Rightarrow$

$$F(m) = \left| \sum_{i=0}^{n} \frac{(+m)^{i+1} - (-m)^{i+1}}{i+1} \cdot c_i \right|$$

Jetzt kann auf Extrema untersucht werden.

$$F'(m) = \frac{d}{dm} F(m)$$

$\Rightarrow$

$$F'(m) = \text{sgn}\tilde{F}(x_m) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} (+m)^i \cdot c_i + \sum_{i=0}^{n} (-m)^i \cdot c_i \right)$$

$\Rightarrow$

$$\text{sgn}\tilde{F}(x_m) \cdot \sum_{i=0}^{n} (+m)^i \cdot c_i = -\text{sgn}\tilde{F}(x_m) \cdot \sum_{i=0}^{n} (-m)^i \cdot c_i$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=0}^{n} (+m)^i \cdot c_i = -\sum_{i=0}^{n} (-m)^i \cdot c_i$$

Ist m definiert, befindet sich das Fehlerintegral in einem Extrema. Welcher Art klärt die 2. Ableitung. Gesucht ist ein Minimum, so dass gelten muss:

$$F''(m) = \frac{d}{dm} F'(m)$$

$\Rightarrow$

$$F''(m) = \text{sgn}\tilde{F}(x_m) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} i \cdot (+m)^{i-1} \cdot c_i + \sum_{i=0}^{n} i \cdot (-m)^{i-1} \cdot c_i \right)$$

$\Rightarrow$

$$\text{sgn}\tilde{F}(x_m) \cdot \sum_{i=0}^{n} i \cdot (+m)^{i-1} \cdot c_i > -\text{sgn}\tilde{F}(x_m) \cdot \sum_{i=0}^{n} i \cdot (-m)^{i-1} \cdot c_i$$

Der Wert für $\text{sgn}\tilde{F}(x_m)$ ist bekannt, da $x_m = 0$ gesetzt wurde. Somit gilt

$$\text{sgn}\tilde{F}(x_m) = 0$$

und der Nachweis ist vorerst nicht durchführbar. Die Ermittlung von m als ein Extrema (potentielles Minimum) hat jedoch den Vorteil, dass im Ausführlichen Verfahren nur eine Unbekannte in $F(x_m, m) = F(x_m)$ vorkommt.

Der hier ermittelte Wert von m gilt für alle möglichen zukünftigen Extremapunkte von $F(c_i) = \operatorname{sgn}\tilde{F}(c_i) \cdot \tilde{F}(c_i)$. Bedeutet, ist ein x_m bekannt, egal ob Minimum oder Maximum, besitzt es unter anderen, zusätzlichen Intervallwerten $\tilde{m}$ immer den Intervallwert m aus dem Verkürzten Verfahren. Das gilt jedoch nicht, falls $x_m = 0$ im Ausführlichen Verfahren berechnet wird.

Gleichzeitig kann dadurch abgeschätzt werden, dass hochgradige Fehlerpolynome oftmals kein minimiertes Fehlerpolynom generieren können, weil

$$\sum_{i=0}^{n} (+m)^i \cdot c_i = -\sum_{i=0}^{n} (-m)^i \cdot c_i$$

keine reellen Lösungen liefert. Dann muss im Ausführlichen Verfahren mit zwei Unbekannten m und x_m das Minimum berechnet werden, falls eines vorhanden ist.

1.3 Ausführliches Verfahren - Über x_m ein Minimum ermitteln

$$\tilde{F}\left(x_m, m\right) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\left(x_m + m\right)^{i+1} - \left(x_m - m\right)^{i+1}}{i+1} \cdot c_i$$

$\Rightarrow$

$$F\left(x_m, m\right) = \left| \sum_{i=0}^{n} \frac{\left(x_m + m\right)^{i+1} - \left(x_m - m\right)^{i+1}}{i+1} \cdot c_i \right|$$

Es kann auf Extrema untersucht werden. Der Wert m für ein potentielles Minimum ist aus dem Verkürzten Verfahren bekannt, daher gilt $F\left(x_m, m\right) = F\left(x_m\right)$.

$$F'\left(x_m\right) = \frac{d}{dx_m} F\left(x_m\right)$$

$\Rightarrow$

$$F'\left(x_m\right) = \operatorname{sgn}\tilde{F}\left(x_m\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} \left(x_m + m\right)^{i} \cdot c_i - \sum_{i=0}^{n} \left(x_m - m\right)^{i} \cdot c_i \right)$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{i=0}^{n} \left(x_m + m\right)^{i} \cdot c_i = \sum_{i=0}^{n} \left(x_m - m\right)^{i} \cdot c_i$$

Ist x_m definiert, befindet sich das Fehlerintegral in einem Extrema. Welcher Art klärt die 2. Ableitung. Gesucht ist ein Minimum, so dass gelten muss:

$$F''\left(x_m\right) = \frac{d}{dx_m} F'\left(x_m\right)$$

$\Rightarrow$

$$F''\left(x_m\right) = \operatorname{sgn}\tilde{F}\left(x_m\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} i \cdot \left(x_m + m\right)^{i-1} \cdot c_i - \sum_{i=0}^{n} i \cdot \left(x_m - m\right)^{i-1} \cdot c_i \right)$$

$\Rightarrow$

$$\operatorname{sgn}\tilde{F}\left(x_m\right) \cdot \sum_{i=0}^{n} i \cdot \left(x_m + m\right)^{i-1} \cdot c_i > \operatorname{sgn}\tilde{F}\left(x_m\right) \cdot \sum_{i=0}^{n} i \cdot \left(x_m - m\right)^{i-1} \cdot c_i$$

1.4 Vereinfachungen

- Der Ausdruck
$$\sum_{i=0}^{n}(+m)^{i}\cdot c_i+\sum_{i=0}^{n}(-m)^{i}\cdot c_i$$
kann vereinfacht werden für **ungerade** Werte von n:
$$2\cdot\sum_{i=0}^{(n-1)/2} m^{2\cdot i}\cdot c_{2\cdot i}$$
$\Rightarrow$
$$F'(m)=\operatorname{sgn}\tilde{F}(c_i)\cdot 2\cdot\sum_{i=0}^{(n-1)/2} m^{2\cdot i}\cdot c_{2\cdot i}=0$$
$\Rightarrow$
$$\sum_{i=0}^{(n-1)/2} m^{2\cdot i}\cdot c_{2\cdot i}=0$$
kann vereinfacht werden für **gerade** Werte von n:
$$2\cdot\sum_{i=0}^{n/2} m^{2\cdot i}\cdot c_{2\cdot i}$$
$\Rightarrow$
$$F'(m)=\operatorname{sgn}\tilde{F}(c_i)\cdot 2\cdot\sum_{i=0}^{n/2} m^{2\cdot i}\cdot c_{2\cdot i}=0$$
$\Rightarrow$
$$\sum_{i=0}^{n/2} m^{2\cdot i}\cdot c_{2\cdot i}=0$$

- Der Ausdruck
$$\sum_{i=0}^{n} i\cdot(+m)^{i-1}\cdot c_i+\sum_{i=0}^{n} i\cdot(-m)^{i-1}\cdot c_i$$
kann vereinfacht werden für **ungerade** Werte von n:
$$2\cdot\sum_{i=0}^{(n-1)/2}(2\cdot i+1)\cdot m^{2\cdot i}\cdot c_{2\cdot i+1}$$
$\Rightarrow$
$$F''(m)=\operatorname{sgn}\tilde{F}(x_m)\cdot 2\cdot\sum_{i=0}^{(n-1)/2}(2\cdot i+1)\cdot m^{2\cdot i}\cdot c_{2\cdot i+1}>0$$
$\Rightarrow$
$$\operatorname{sgn}\tilde{F}(x_m)\cdot\sum_{i=0}^{(n-1)/2}(2\cdot i+1)\cdot m^{2\cdot i}\cdot c_{2\cdot i+1}>0$$
kann vereinfacht werden für **gerade** Werte von n:
$$2\cdot\sum_{i=0}^{(n-2)/2}(2\cdot i+1)\cdot m^{2\cdot i}\cdot c_{2\cdot i+1}$$
$\Rightarrow$
$$F''(m)=\operatorname{sgn}\tilde{F}(x_m)\cdot 2\cdot\sum_{i=0}^{(n-2)/2}(2\cdot i+1)\cdot m^{2\cdot i}\cdot c_{2\cdot i+1}>0$$
$\Rightarrow$
$$\operatorname{sgn}\tilde{F}(x_m)\cdot\sum_{i=0}^{(n-2)/2}(2\cdot i+1)\cdot m^{2\cdot i}\cdot c_{2\cdot i+1}>0$$

- Der Ausdruck
$$\sum_{i=0}^{n} (x_m + m)^i \cdot c_i - \sum_{i=0}^{n} (x_m - m)^i \cdot c_i$$
kann pragmatisch umgestellt werden für alle Werte von n:
$$\sum_{i=0}^{n} \Big((x_m + m)^i - (x_m - m)^i \Big) \cdot c_i$$
$\Rightarrow$
$$(x_m + m)^n \cdot c_n - (x_m - m)^n \cdot c_n + \sum_{i=0}^{n-1} \Big((x_m + m)^i - (x_m - m)^i \Big) \cdot c_i$$
Aufbauend auf die bekannten Werte der reduzierten Summe kann das Polynom nächsthöheren Grades berechnet werden.

- Der Ausdruck
$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot (x_m + m)^{i-1} \cdot c_i - \sum_{i=0}^{n} i \cdot (x_m - m)^{i-1} \cdot c_i$$
kann pragmatisch umgestellt werden für alle Werte von n:
$$(x_m + m)^{n-1} \cdot n \cdot c_n - (x_m - m)^{n-1} \cdot n \cdot c_n + \sum_{i=0}^{n-1} \Big((x_m + m)^{i-1} - (x_m - m)^{i-1} \Big) \cdot i \cdot c_i$$
Das Polynom ist die Ableitung des Ausdrucks und kann so ermittelt werden.
$$(x_m + m)^n \cdot c_n - (x_m - m)^n \cdot c_n + \sum_{i=0}^{n-1} \Big((x_m + m)^i - (x_m - m)^i \Big) \cdot c_i$$

2 Spezielle Lösungsverfahren

2.1 Septisches Fehlerpolynom

$$n = 7$$

Verkürztes Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben mit:

$$c_0 + c_2 \cdot m^2 + c_4 \cdot m^4 + c_6 \cdot m^6 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $m \in R^+ \setminus \{0\}$.

Ausführliches Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben:

$$P_7 = 7 \cdot c_7 \cdot x_m^6 + 35 \cdot c_7 \cdot m^2 \cdot x_m^4 + 21 \cdot c_7 \cdot m^4 \cdot x_m^2 + c_7 \cdot m^6 + P_6 = 0$$

$\Rightarrow$

$$7 \cdot R_7 \cdot x_m^6 + 6 \cdot R_6 \cdot x_m^5 + 5 \cdot R_5 \cdot x_m^4 + 4 \cdot R_4 \cdot x_m^3 + 3 \cdot R_3 \cdot x_m^2 + 2 \cdot R_2 \cdot x_m + R_1 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $x_m \in R$. Die Bedingung für das Vorhandensein eines Minimums ist nachzuweisen unter:

$$\left(21 \cdot R_7 \cdot x_m^5 + 15 \cdot R_6 \cdot x_m^4 + 10 \cdot R_5 \cdot x_m^3 + 6 \cdot R_4 \cdot x_m^2 + 3 \cdot R_3 \cdot x_m + R_2\right) \cdot \mathrm{sgn} F\left(x_m\right) > 0$$

Mit:

$R_7 = c_7$

$R_6 = c_6$

$R_5 = 7 \cdot c_7 \cdot m^2 + c_5$

$R_4 = 5 \cdot c_6 \cdot m^2 + c_4$

$R_3 = 7 \cdot c_7 \cdot m^4 + \frac{10}{3} \cdot c_5 \cdot m^2 + c_3$

$R_2 = 3 \cdot c_6 \cdot m^4 + 2 \cdot c_4 \cdot m^2 + c_2$

$R_1 = c_7 \cdot m^6 + c_5 \cdot m^4 + c_3 \cdot m^2 + c_1$

2.2 Sextisches Fehlerpolynom (Triquadratisches Fehlerpolynom)

$$n = 6$$

Verkürztes Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben mit:

$$c_0 + c_2 \cdot m^2 + c_4 \cdot m^4 + c_6 \cdot m^6 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $m \in R^+ \setminus \{0\}$.

Ausführliches Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben:

$$P_6 = 6 \cdot c_6 \cdot x_m^5 + 20 \cdot c_6 \cdot m^2 \cdot x_m^3 + 6 \cdot c_6 \cdot m^4 \cdot x_m + P_5 = 0$$

$\Rightarrow$

$$6 \cdot R_6 \cdot x_m^5 + 5 \cdot R_5 \cdot x_m^4 + 4 \cdot R_4 \cdot x_m^3 + 3 \cdot R_3 \cdot x_m^2 + 2 \cdot R_2 \cdot x_m + R_1 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $x_m \in R$. Die Bedingung für das Vorhandensein eines Minimums ist nachzuweisen unter:

$$\left(15 \cdot R_6 \cdot x_m^4 + 10 \cdot R_5 \cdot x_m^3 + 6 \cdot R_4 \cdot x_m^2 + 3 \cdot R_3 \cdot x_m + R_2\right) \cdot \mathrm{sgn} F\left(x_m\right) > 0$$

Mit:

$R_6 = c_6$

$R_5 = c_5$

$R_4 = 5 \cdot c_6 \cdot m^2 + c_4$

$R_3 = \frac{10}{3} \cdot c_5 \cdot m^2 + c_3$

$R_2 = 3 \cdot c_6 \cdot m^4 + 2 \cdot c_4 \cdot m^2 + c_2$

$R_1 = c_5 \cdot m^4 + c_3 \cdot m^2 + c_1$

2.3 Quintisches Fehlerpolynom

$$n = 5$$

Verkürztes Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben mit:

$$c_0 + c_2 \cdot m^2 + c_4 \cdot m^4 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $m \in R^+ \setminus \{0\}$.

Ausführliches Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben:

$$P_5 = 5 \cdot c_5 \cdot x_m^4 + 10 \cdot c_5 \cdot m^2 \cdot x_m^2 + c_5 \cdot m^4 + P_4 = 0$$

$\Rightarrow$

$$5 \cdot R_5 \cdot x_m^4 + 4 \cdot R_4 \cdot x_m^3 + 3 \cdot R_3 \cdot x_m^2 + 2 \cdot R_2 \cdot x_m + R_1 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $x_M \in R$. Die Bedingung für das Vorhandensein eines Minimums ist nachzuweisen unter:

$$\left(10 \cdot R_5 \cdot x_m^3 + 6 \cdot R_4 \cdot x_m^2 + 3 \cdot R_3 \cdot x_m + R_2\right) \cdot \text{sgn} F\left(x_m\right) > 0$$

Mit:

$R_5 = c_5$

$R_4 = c_4$

$R_3 = \frac{10}{3} \cdot c_5 \cdot m^2 + c_3$

$R_2 = 2 \cdot c_4 \cdot m^2 + c_2$

$R_1 = c_5 \cdot m^4 + c_3 \cdot m^2 + c_1$

2.4 Biquadratisches Fehlerpolynom

$$n = 4$$

Verkürztes Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben mit:

$$c_0 + c_2 \cdot m^2 + c_4 \cdot m^4 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $m \in R^+ \setminus \{0\}$.

Ausführliches Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben:

$$P_4 = 4 \cdot c_4 \cdot x_m \cdot x_m^2 + 4 \cdot c_4 \cdot m^2 \cdot x_m + P_3 = 0$$

$\Rightarrow$

$$4 \cdot R_4 \cdot x_m^3 + 3 \cdot R_3 \cdot x_m^2 + 2 \cdot R_2 \cdot x_m + R_1 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $x_M \in R$. Die Bedingung für das Vorhandensein eines Minimums ist nachzuweisen unter:

$$\left(6 \cdot R_4 \cdot x_m^2 + 3 \cdot R_3 \cdot x_m + R_2\right) \cdot \mathrm{sgn} F\left(x_m\right) > 0$$

Mit:

$R_4 = c_4$

$R_3 = c_3$

$R_2 = 2 \cdot c_4 \cdot m^2 + c_2$

$R_1 = c_3 \cdot m^2 + c_1$

2.5 Kubisches Fehlerpolynom

$$n = 3$$

Verkürztes Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben mit:

$$c_0 + c_2 \cdot m^2 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $m \in R^+ \setminus \{0\}$.

Ausführliches Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben:

$$P_3 = 3 \cdot c_3 \cdot x_m^2 + c_3 \cdot m^2 + P_2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$3 \cdot R_3 \cdot x_m^2 + 2 \cdot R_2 \cdot x_m + R_1 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $x_m \in R$. Die Bedingung für das Vorhandensein eines Minimums ist nachzuweisen unter:

$$(3 \cdot R_3 \cdot x_m + R_2) \cdot \mathrm{sgn} F\,(x_m) > 0$$

Mit:

$R_3 = c_3$

$R_2 = c_2$

$R_1 = c_3 \cdot m^2 + c_1$

2.6 Quadratisches Fehlerpolynom

$$n = 2$$

Verkürztes Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben mit:

$$c_0 + c_2 \cdot m^2 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $m \in R^+ \setminus \{0\}$.

Ausführliches Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben:

$$P_2 = 2 \cdot c_2 \cdot x_m + P_1 = 0$$

$\Rightarrow$

$$2 \cdot R_2 \cdot x_m + R_1 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $x_m \in R$. Die Bedingung für das Vorhandensein eines Minimums ist nachzuweisen unter:

$$R_2 \cdot \mathrm{sgn} F(x_m) > 0$$

Mit:

$R_2 = c_2$

$R_1 = c_1$

2.7 Lineares Fehlerpolynom

$$n = 1$$

Verkürztes Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben mit:

$$c_0 = 0$$

Mögliche Lösungen sind alle $m \in R^+ \setminus \{0\}$.

Ausführliches Verfahren

Das zu lösende Polynom ist gegeben:

$$P_1 = c_1 = 0$$

$\Rightarrow$

$$R_1 = 0$$

Keine mögliche Lösungen, unabhängig von $x_m \in R$. Die Bedingung für das Vorhandensein eines Minimums wäre nachzuweisen unter:

$$0 \cdot \mathrm{sgn} F\left(x_m\right) > 0$$

Mit:

$R_1 = c_1$

2.8 Sonderfälle $n = 1$ und $n = 2$

Die quadratische und die lineare Interpolation nehmen eine kleine Sonderstellung ein.

Quadratische Interpolation

$$m = \sqrt{-\frac{c_0}{c_2}}$$

Sowie:

$$x_m = -\tfrac{c_1}{2 \cdot c_2} \quad \text{mit} \quad c_2 \cdot \text{sgn} F\left(x_m\right) > 0$$

Lineare Interpolation

$$c_0 = 0$$

Sowie:

$$c_1 = 0 \quad \text{mit} \quad 0 \cdot \text{sgn} F\left(x_m\right) > 0$$

Die lineare Interpolation ist unabhängig von m und x_m. Was auch einsichtig ist bei der Bedingung der gleichen zwei genutzten Datenpunkte. Für den Fall der linearen Interpolation wird immer gelten $P\left(x\right)_I = P\left(x\right)_{II}$ und somit $a_i - b_i = 0 \rightarrow c_i = 0 \rightarrow P\left(x\right) = 0 \rightarrow F\left(c_i\right) = 0$. Eine Minimierung des Fehlerpolynoms ist nicht notwendig/möglich.

3 Beispiel numerisch – quadratisches Fehlerpolynom

3.1 Vollständige Berechnung

Datenpunkte:

$$P_0 = (-1; +2) \qquad P_1 = (+1, +1)$$

⇒

$$x_0 = -1 \qquad x_n = +1$$

Die interpolierten Polynome dazu:

$$P(x)_I = +\frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + 0$$

Sowie:

$$P(x)_{II} = -\frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + 2$$

⇒

$$P(x) = +2 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 2$$

Für die Koeffizienten gilt dann:

$$c_2 = +2 \qquad c_1 = 0 \qquad c_0 = -2$$

Das Fehlerpolynom $F(c_i)$ ergibt sich dann zu:

$$\tilde{F}(c_i) = \sum_{i=0}^{2} \frac{x_n^{i+1} - x_0^{i+1}}{i+1} \cdot c_i$$

⇒

$$\tilde{F}(c_i) = -\frac{8}{3}$$

⇒

$$F(c_i) = +\frac{8}{3}$$

⇒

$$\text{sgn}\tilde{F}(c_i) = -1$$

3.2 Verkürztes Verfahren

Das Fehlerpolynom $F(m)$ ergibt sich dann zu:

$$\tilde{F}(m) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(+m)^{i+1} - (-m)^{i+1}}{i+1} \cdot c_i$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{F}(m) = \frac{4}{3} \cdot m^3 - 4m$$

$\Rightarrow$

$$F(m) = \frac{4}{3} \cdot m \cdot \left|m^2 - 3\right|$$

Die erste Ableitung Null gesetzt:

$$\sum_{i=0}^{2} (+m)^i \cdot c_i = -\sum_{i=0}^{2} (-m)^i \cdot c_i \leftrightarrow F'(m) = \frac{d}{dm} \cdot F(m)$$

$\Rightarrow$

$$m^2 \cdot c_2 + c_0 = -m^2 \cdot c_2 - c_0 \leftrightarrow \frac{4}{3} \cdot \left|m^2 - 3\right| + \text{sgn}\left(m^2 - 3\right) \cdot \frac{8}{3} \cdot m^2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$m = 1 \leftrightarrow m = 1$$

Es ist $m > 0$ zu beachten, $m = -1$ fällt weg!

3.3 Ausführliches Verfahren

$$m = 1$$

Das Fehlerpolynom $F(x_m)$ ergibt sich dann zu:

$$\tilde{F}(x_m) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x_m + 1)^{i+1} - (x_m - 1)^{i+1}}{i+1} \cdot c_i$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{F}(x_m) = 4 \cdot x_m^2 - \frac{8}{3}$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{F}(x_m) = \frac{4}{3} \cdot \left|3 \cdot x_m^2 - 2\right|$$

Die erste Ableitung Null gesetzt:

$$\sum_{i=0}^{2} (x_m + 1)^i \cdot c_i = \sum_{i=0}^{2} (x_m - 1)^i \cdot c_i \leftrightarrow F'(x_m) = \frac{d}{dx_m} \cdot F(x_m)$$

$\Rightarrow$

$$(x_m + 1)^2 = (x_m - 1)^2 \leftrightarrow \text{sgn}\left(3 \cdot x_m^2 - 2\right) \cdot 8 \cdot x_m = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_m = 0 \leftrightarrow x_m = 0$$

Die zweite Ableitung prüft das Extrema:

$$\text{sgn}\tilde{F}(c_i) \cdot \sum_{i=0}^{2} i \cdot (x_m + m)^{i-1} \cdot c_i > \text{sgn}\tilde{F}(c_i) \cdot \sum_{i=0}^{2} i \cdot (x_m - m)^{i-1} \cdot c_i$$

$$\leftrightarrow$$

$$F''(x_m) = \frac{d}{dx_m} \cdot F'(x_m)$$

$\Rightarrow$

$$x_m - m \overset{?}{>} x_m + m \leftrightarrow \text{sgn}\left(3 \cdot x_m^2 - 2\right) \cdot 8 \overset{?}{>} 0$$

$\Rightarrow$

$$-1 \overset{!}{<} +1 \leftrightarrow -8 \overset{!}{<} 0$$

Über $x_m = 0$ ist das Fehlerpolynom nicht zu minimieren.

Es ist nachzuweisen:

$$F(c_i) = F(m)$$
$$F(c_i) = F(x_m)$$

$\Rightarrow$

$$\frac{8}{3} = \frac{4}{3} \cdot m \cdot \left|m^2 - 3\right|$$
$$\frac{8}{3} = \frac{4}{3} \cdot \left|3 \cdot x_m^2 - 2\right|$$

Was erfüllt ist.

3.4 Vereinfachungen

Die erste Ableitung ermittelt das Extrema.

$$\sum_{i=0}^{2/2} m^{2\cdot i} \cdot c_{2\cdot i} = m^2 \cdot c_2 + m^0 \cdot c_0 = 0$$

⇒

$$m = 1$$

Die zweite Ableitung definiert die Art des Extrema.

$$\operatorname{sgn} \tilde{F}\left(c_i\right) \cdot \sum_{i=0}^{(2-2)/2} \left(2 \cdot i + 1\right) \cdot m^{2\cdot i} \cdot c_{2\cdot i+1} = c_1 \overset{?}{>} 0$$

⇒

$$0 \overset{!}{=} 0$$

3.5 Sonderfall $n = 2$

Die Ermittlung eines potentiellen Minima kann auch geführt werden über:

$$m = \sqrt{-\frac{c_0}{c_2}}$$

$\Rightarrow$

$$m = 1$$

Die Ermittlung von x_m:

$$x_m = -\tfrac{c_1}{2 \cdot c_2} \quad \text{mit} \quad c_2 \cdot \text{sgn} F\left(x_m\right) \overset{?}{>} 0$$

$\Rightarrow$

$$x_m = 0 \quad \text{mit} \quad -2 \overset{!}{<} 0$$

Es liegt kein Minima vor.

Weitere und höhergradige Beispiele im Klassik- Maple- Worksheetformat unter:

http://www.nadirpoint.de/Dokumentenserver.html#SAW

Ergebnisse dieser Beispiele folgend.

4 Beispiel grafisch

4.1 Septisches Fehlerpolynom

$$n = 7$$

$\Rightarrow$

$$P(x)_I = \begin{cases} -\frac{29}{90090} \cdot x^7 + \frac{1013}{51480} \cdot x^6 - \frac{733}{1584} \cdot x^5 + \frac{8132}{1287} \cdot x^4 \\ -\frac{4718419}{102960} \cdot x^3 + \frac{9546707}{51480} \cdot x^2 - \frac{179383}{462} \cdot x + \frac{4294}{13} \end{cases}$$

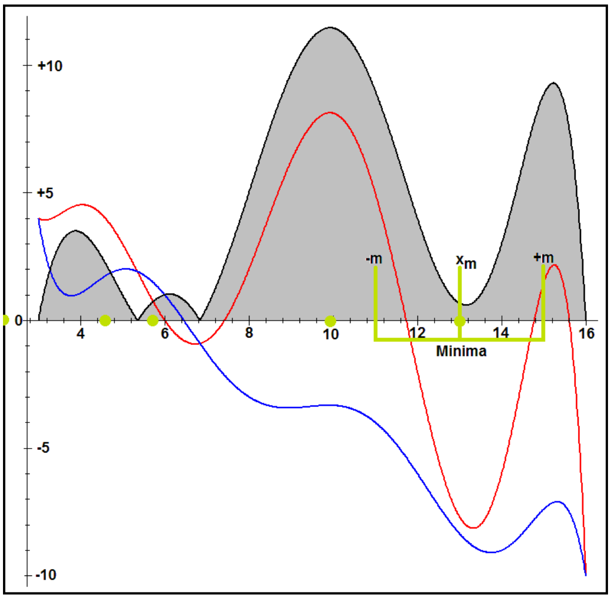
$\Rightarrow$

$$P(x)_{II} = \begin{cases} -\frac{42947}{259459200} \cdot x^7 + \frac{405959}{37065600} \cdot x^6 - \frac{25787}{86400} \cdot x^5 + \frac{32033801}{7413120} \cdot x^4 \\ -\frac{330916621}{9266400} \cdot x^3 + \frac{517474043}{3088800} \cdot x^2 - \frac{57100397}{138600} \cdot x + \frac{80192}{195} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$P(x) = \begin{cases} +\frac{3121}{19958400} \cdot x^7 - \frac{24877}{2851200} \cdot x^6 + \frac{180143}{950400} \cdot x^5 - \frac{1138963}{570240} \cdot x^4 \\ +\frac{7210853}{712800} \cdot x^3 - \frac{4256029}{237600} \cdot x^2 - \frac{3285497}{138600} \cdot x + \frac{1214}{15} \end{cases}$$

$\Rightarrow$



ROT – Interpolationspolynom I,
BLAU – Interpolationspolynom II,
SCHWARZ – Betrag des Fehlerpolynoms,
GRÜN – MIN/MAX des Fehlerpolynoms

$\Rightarrow$

#	x_m	m_0	m_1	m_2	m_3	F''	MAX / MIN
1	+ 00, 21	0	1, 81	-	-	- 175, 52	Maxima
2	+ 04, 75	0	1, 81	6, 49	-	- 008, 04	Maxima
3	+ 05, 87	0	1, 81	7, 58	-	- 005, 97	Maxima
4	+ 09, 90	0	1, 81	2, 21	5, 96	- 010, 40	Maxima
5	+ 13, 01	0	1, 81	1, 96	-	+009, 96	Mimima
6	+ 14, 08	0	1, 81	-	-	- 018, 80	Maxima

4.2 Sextisches Fehlerpolynom (Triquadratisches Fehlerpolynom)

$$n = 6$$

⇒

$$P(x)_I = \begin{cases} +\frac{7}{30888} \cdot x^6 - \frac{2647}{308880} \cdot x^5 + \frac{379}{4290} \cdot x^4 \\ +\frac{66631}{308880} \cdot x^3 - \frac{1268759}{154440} \cdot x^2 + \frac{177103}{4290} \cdot x - \frac{2222}{39} \end{cases}$$

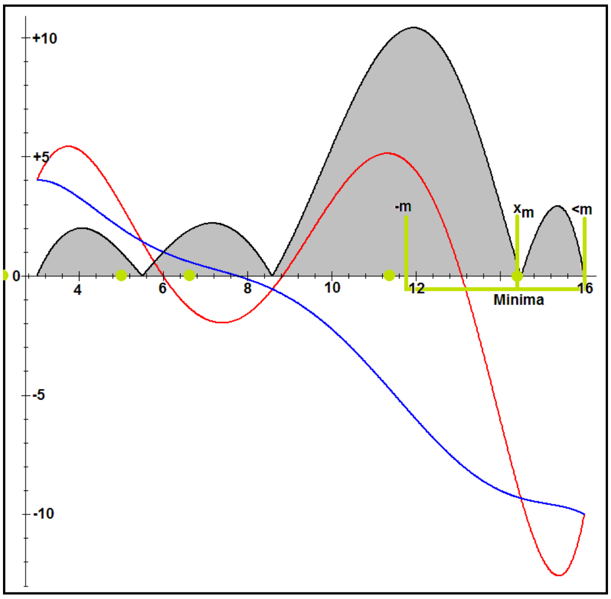
⇒

$$P(x)_{II} = \begin{cases} -\frac{1489}{10810800} \cdot x^6 + \frac{9521}{1201200} \cdot x^5 - \frac{386093}{2162160} \cdot x^4 \\ +\frac{31965}{16016} \cdot x^3 - \frac{62649803}{5405400} \cdot x^2 + \frac{4820033}{150150} \cdot x - \frac{5702}{195} \end{cases}$$

⇒

$$P(x) = \begin{cases} -\frac{101}{277200} \cdot x^6 + \frac{6859}{415800} \cdot x^5 - \frac{44393}{166320} \cdot x^4 \\ +\frac{148033}{83160} \cdot x^3 - \frac{701663}{207900} \cdot x^2 - \frac{17674}{1925} \cdot x + \frac{416}{15} \end{cases}$$

⇒



ROT – Interpolationspolynom I,
BLAU – Interpolationspolynom II,
SCHWARZ – Betrag des Fehlerpolynoms,
GRÜN – MIN/MAX des Fehlerpolynoms

⇒

#	x_m	m_0	m_1	m_2	m_3	F''	MAX / MIN
1	+ 00, 12	0	2, 38	-	-	- 47 864	Maxima
2	+ 04, 95	0	2, 38	7,44	-	- 00 005	Maxima
3	+ 06, 76	0	2, 38	9,04	-	- 00 004	Maxima
4	+ 11, 69	0	2, 38	4,05	-	- 00 010	Maxima
5	+ 14, 22	0	2, 38	-	-	+ 00 025	Minima

4.3 Quintisches Fehlerpolynom

$$n = 5$$

$\Rightarrow$

$$P(x)_I = +\frac{6587}{154440} \cdot x^5 - \frac{25381}{118800} \cdot x^4 + \frac{6191959}{1544400} \cdot x^3 - \frac{53455367}{1544400} \cdot x^2 + \frac{11446483}{85800} \cdot x - \frac{34456}{195}$$

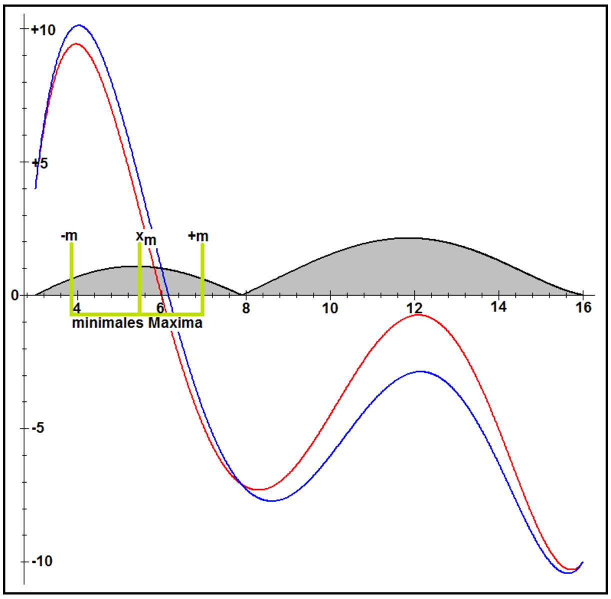
$\Rightarrow$

$$P(x)_{II} = +\frac{4153}{1029600} \cdot x^5 - \frac{16139}{79200} \cdot x^4 + \frac{3984041}{1029600} \cdot x^3 - \frac{34915693}{1029600} \cdot x^2 + \frac{7597817}{57200} \cdot x - \frac{2317}{13}$$

$\Rightarrow$

$$P(x) = -\frac{1}{4320} \cdot x^5 + \frac{469}{47520} \cdot x^4 - \frac{6643}{47520} \cdot x^3 + \frac{33287}{47520} \cdot x^2 - \frac{1531}{2640} \cdot x - \frac{23}{15}$$

$\Rightarrow$



ROT – Interpolationspolynom I,
BLAU – Interpolationspolynom II,
SCHWARZ – Betrag des Fehlerpolynoms,
GRÜN – MIN/MAX des Fehlerpolynoms

$\Rightarrow$

#	x_m	m_0	m_1	m_2	m_3	F''	MAX / MIN
1	+ 00, 74	0	1, 46	-	-	- 2, 69	Maxima
2	+ 05, 40	0	1, 46	4, 83	-	- 1, 09	Maxima
3	+ 11, 83	0	1, 46	3, 43	-	- 1, 05	Maxima
4	+ 16, 14	0	1, 46	-	-	- 2, 40	Maxima

4.4 Biquadratisches Fehlerpolynom

$$n = 4$$

$\Rightarrow$

$$P(x)_I = +\frac{5}{15444} \cdot x^4 - \frac{245}{7722} \cdot x^3 + \frac{14455}{15444} \cdot x^2 - \frac{77383}{7722} \cdot x + \frac{3097}{117}$$

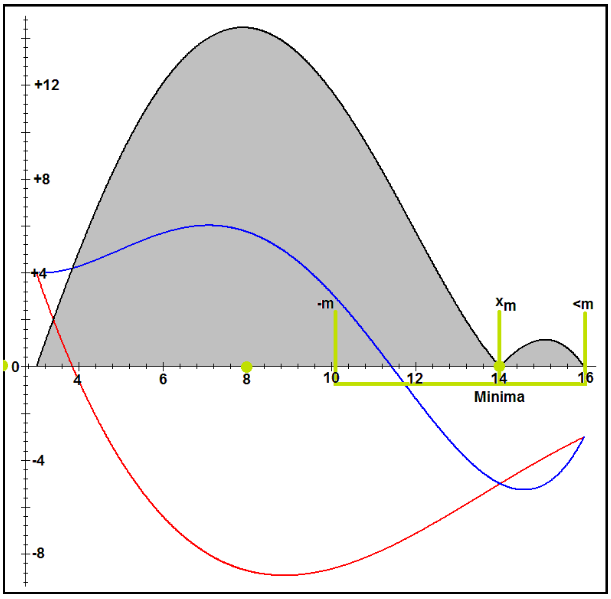
$\Rightarrow$

$$P(x)_{II} = +\frac{1621}{308880} \cdot x^4 - \frac{26779}{154440} \cdot x^3 + \frac{554339}{308880} \cdot x^2 - \frac{95311}{14040} \cdot x + \frac{1459}{117}$$

$\Rightarrow$

$$P(x) = +\frac{13}{2640} \cdot x^4 - \frac{17}{120} \cdot x^3 + \frac{2267}{2640} \cdot x^2 + \frac{4267}{1320} \cdot x - \frac{14}{1}$$

$\Rightarrow$



ROT – Interpolationspolynom I,
BLAU – Interpolationspolynom II,
SCHWARZ – Betrag des Fehlerpolynoms,
GRÜN – MIN/MAX des Fehlerpolynoms

$\Rightarrow$

#	x_m	m_0	m_1	m_2	m_3	F''	MAX / MIN
1	- 00, 49	0	3, 87	-	-	- 18, 98	Maxima
2	+ 08, 10	0	3, 87	-	-	- 07, 71	Maxima
3	+ 13, 98	0	3, 87	-	-	+ 12, 99	Minima

4.5 Kubisches Fehlerpolynom

$$n = 3$$

$\Rightarrow$

$$P\left(x\right)_I = +\frac{4}{143} \cdot x^3 - \frac{2279}{2860} \cdot x^2 + \frac{16721}{2860} \cdot x - \frac{463}{65}$$

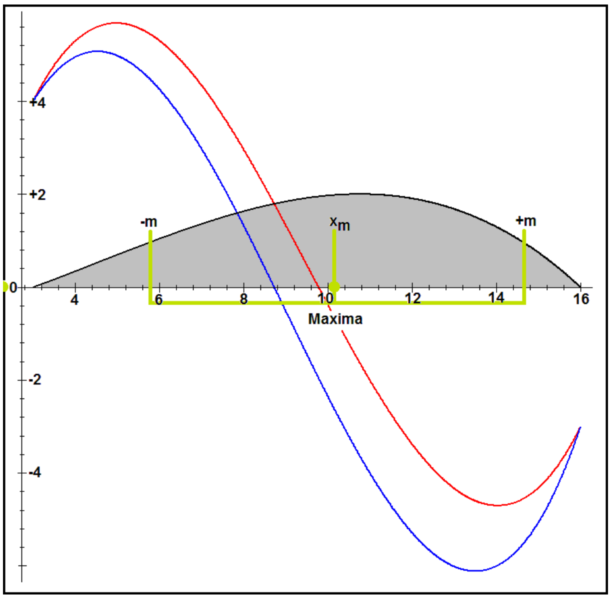
$\Rightarrow$

$$P\left(x\right)_{II} = +\frac{133}{4290} \cdot x^3 - \frac{599}{715} \cdot x^2 + \frac{24347}{4290} \cdot x - \frac{411}{65}$$

$\Rightarrow$

$$P\left(x\right) = +\frac{1}{330} \cdot x^3 - \frac{9}{220} \cdot x^2 - \frac{113}{660} \cdot x + \frac{4}{5}$$

$\Rightarrow$



ROT – Interpolationspolynom I,
BLAU – Interpolationspolynom II,
SCHWARZ – Betrag des Fehlerpolynoms,
GRÜN – MIN/MAX des Fehlerpolynoms

$\Rightarrow$

#	x_m	m_0	m_1	m_2	m_3	F''	MAX / MIN
1	- 01, 21	0	4, 42	-	-	- 0, 92	Maxima
2	+10, 21	0	4, 42	-	-	- 0, 92	Maxima

4.6 Quadratisches Fehlerpolynom

$$n = 2$$

⇒

$$P(x)_I = -\frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{2}{1}$$

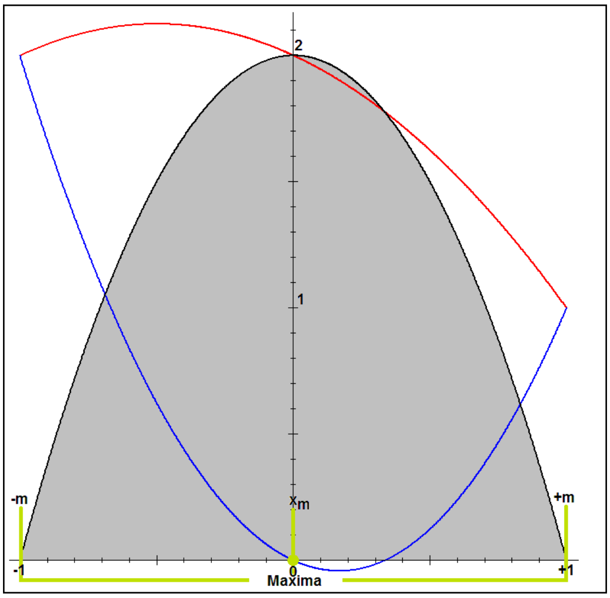
⇒

$$P(x)_{II} = +\frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{0}{2}$$

⇒

$$P(x) = +\frac{2}{1} \cdot x^2 + \frac{0}{1} \cdot x - \frac{2}{1}$$

⇒



ROT – Interpolationspolynom I,
BLAU – Interpolationspolynom II,
SCHWARZ – Betrag des Fehlerpolynoms,
GRÜN – MIN/MAX des Fehlerpolynoms

⇒

#	x_m	m_0	m_1	m_2	m_3	F''	MAX / MIN
1	0	0	1	-	-	- 8	Maxima

LaTeX