

Kleiner Ausflug in die Balkentheorie

—

Die Durchbiegung ω als zentrales Element

Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 28. März 2014 – Letzte Revision: 5. August 2024

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Der Balken in der klassischen Balkentheorie	5
2.1	Der Euler-Bernoulli- und der Timoshenko-Balken	5
2.2	Der Euler-Bernoulli-Balken	7
2.3	Der Timoshenko-Balken	9
3	Der Balken in der Plattentheorie	13
3.1	Der Plattenstreifen als Balken	13
3.2	Der Plattenstreifen als Kirchhoff-Balken	14
3.3	Der Plattenstreifen als Mindlin-Balken	16
4	Der Balken in der Scheibentheorie	19
5	Der Balken in der Schalentheorie	23
5.1	Der Biegebalken über die Kesselformel	24
5.2	Der Biegebalken über die Membrantheorie	27
6	Die Durchbiegung ω als zentrales Element	29
6.1	Vergleich der Durchbiegungen ω der verschiedenen Balkentypen	29
6.2	Verhältnis der Durchbiegungen ω der verschiedenen Balkentypen	30
7	Anhang	31
7.1	Nachweis $b = 1$	31
7.2	Nachweis $r_m \gg h$	32

Literatur

[Bara] Thorsten Bartel. Höhere Festigkeitslehre. Technische Universität Dortmund. Seite 66 - 70.

[Barb] Thorsten Bartel. Höhere Festigkeitslehre. Technische Universität Dortmund. Seite 71 - 75.

[JP] Uwe Starossek Jürgen Priebe. Stahlbau I. Technische Universität Hamburg- Harburg, Institut für Baustatik und Stahlbau. Seite 3-33.

[Mat] Friedrich U. Mathiak. Ebene Flächentragwerke II. Hochschule Neubrandenburg. Seite 133 - 137 , 183 - 207.

[Sch] Schalentheorie. Dr.-Ing. Raecke.

[Tec] Technische Mechanik. Holzmann, Meyer, Schumpich.

[Vid05] Dr.-Ing. Inna Videkhina. Einführung in die Theorie der Platten. Universität München, 2005. Seite 9, 26.

✚ Das hier vorliegende Arbeitsblatt ist eher eine akademische Betrachtung als ingenieurtechnische Vorgehensweise. Daher wird an verschiedenen Stellen vom gewohnten Wege aus DINs, ISOs und ENs abgewichen. Die Berechnungsgrundlagen vorhandener Regelwerke werden **nicht** hergeleitet. ✚

Gewidmet im Allgemeinen

dem ungarischen Lande

Gewidmet im Speziellen

Familie und Frau
Vajda Béláné
und der Gemeinde
Zalaszántó
Magyarország
Ungarn



1 Einleitung

Wie immer, gleich zu Anfang meiner Arbeitsblätter, hier ist nichts vollständig und nichts perfekt. Auch (Schreib)Fehler können vorkommen. Arbeitsblätter dien(t)en mir lediglich zur tieferen Einarbeitung in ein Thema. Hier vorliegend ein sehr kleiner Einblick in die Balkentheorie. Die Arbeitsblätter sind oftmals schon sehr alt. Doch erst jetzt komme ich dazu, diese aufzuschreiben.

Einleitung

Vorliegend wird, wie schon gesagt, die Balkentheorie beleuchtet. Als zentrales Element die Durchbiegung des betrachteten Balken. Einen Balken zu beschreiben ist gar nicht so einfach. Viele Wissenschaftler und Ingenieure haben Modelle entwickelt, um einen Balken mathematisch zu beschreiben. Mehr oder weniger aufwendig sind dann die Berechnungsgrundlagen. Am Ende ergeben sich oft sehr ähnliche Werte, weshalb man sich oftmals fragt, ob das verwendete Modell optimal für den vorliegenden Anwendungsfall ist - „... wegen eines Millimeter weniger Durchbiegung diesen Aufwand betreiben? ...“.

Arbeitswerkzeug allen Handelns ist das Biegemoment. Dort begann all das Leben im gekrümmten Balkenuniversum. Denn ...

$$M = -EI \cdot \omega''$$

... am Anfang war das Moment.

2 Der Balken in der klassischen Balkentheorie

2.1 Der Euler-Bernoulli- und der Timoshenko-Balken

Die Balkentheorie beschreibt das Verhalten von Balken bei Auftreten einer Last. Die technische Mechanik ist die ihr zugrunde liegende Theorie. **Balkentheorie**

Von Interesse sind Längs-, Biege- und Querverformung und die Biegelinie.

Zur Berechnung erforderlich ist die Biege- und Schubsteifigkeit EI bzw. GA mit dem Elastizitätsmodul E , dem Trägheitsmoment I , dem Gleitmodul G und die Querschnittsfläche A .

Ein Balken ist biegesteif. Wird ein Balken nur entlang seiner Längsachse belastet nennt man den Balken ein Stab. Bei genügend hoher Belastung wird der Stab erwartungsgemäß ausknicken und wird dann Knickstab genannt.

Im Allgemeinen wird als Balken einen Euler-Bernoulli-Balken (EBB) verstanden. Für den EBB gilt - Querschnitte, die im unbelasteten Zustand rechtwinklig zur Nulllinie ausgerichtet sind, bleiben auch bei der Verformung eben. Für die erweiterte Balkentheorie wird das nicht mehr angenommen, dort ist die Querschnittsebene um einen Schubwinkel gedreht. Dieser Balken ist der Timoshenko-Balken (TB). Die TB- Theorie berücksichtigt die Schubverformung der Querschnittsebene.

Für die Berechnung der Belastungsgrößen des Balkens können 3 Theorien angewandt werden, welche sich aufsteigend durch angenommene oder reale Imperfektionen und Verformungen verkomplizieren und so das wirkliche Abbild immer besser darstellen. Das bedeutet jedoch nicht, dass nur die Theorie III. Ordnung nutzbare Ergebnisse liefert.

Die Berechnungstheorien I. bis III. Ordnung.

Für die Definition der einzelnen Theorie ist Unterscheidungsmerkmal die Verformung des Balkens.

- **Theorie I. Ordnung**

Es werden am *unverformten* Balken die Kräfte und Momente ermittelt.

- **Theorie II. Ordnung**

Es werden am *verformten* Balken die Kräfte und Momentelement ermittelt. Bei deren Betrachtung wird jedoch ein lineares, mathematisches Modell genutzt.

- **Theorie III. Ordnung**

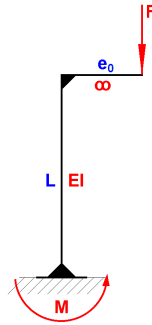
Es werden am *verformten* Balken die Kräfte und Momente ermittelt. Bei deren Betrachtung werden auch nichtlineare, mathematische Modelle genutzt.

Im weiteren Verlauf gilt $EI = \text{const.}$ über den gesamten Querschnitt.

Ein Beispielsmodell für die unterschiedliche Betrachtungsweise innerhalb der Theorien.

- **Theorie I. Ordnung**

Für einen außermittig e_0 gedrückten Stab gilt beispielshalber:

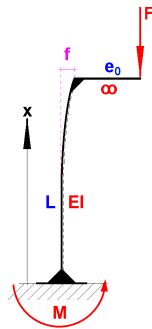


⇒

$$IM = F \cdot e_0$$

- **Theorie II. Ordnung**

Vorverformung f mit $e = e_0 + f$:



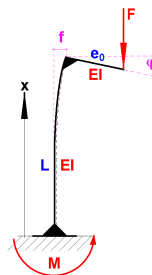
$$IIM = F \cdot (e_0 + f)$$

⇒

$$IIM = IM + M_0$$

- **Theorie III. Ordnung**

Vorverformung f mit $e = e_0 \cdot \cos \varphi + f$:



$$IIIM = F \cdot (e_0 \cdot \cos \varphi + f)$$

⇒

$$IIIM = IM \cdot \cos \varphi + M_0$$

⇒

$$IIIM = IM \cdot (\cos \varphi - 1) + IIM$$

2.2 Der Euler-Bernoulli-Balken

Euler-Bernoulli

Die bernoullischen Annahmen sind nach Jakob I. Bernoulli benannte Vereinfachungen der Balkentheorie, die sich mit dem Verhalten belasteter Balken beschäftigt.

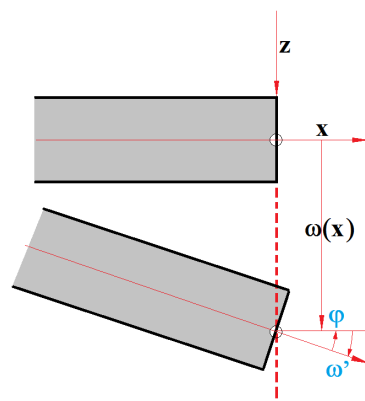
[Bara]

Annahmen

- Die Länge ist viel größer als der Querschnitt.
- Der Schwerpunkt des Querschnitts unterliegt lediglich einer Verschiebung.
- Die Verformungen sind klein.
- Es tritt keine Verwölbung auf.
- Nur ein eindimensionaler Spannungszustand tritt auf.

Im weiteren Verlauf gilt $EI = \text{const.}$ und $GA = \text{const.}$

Gegeben sind zwei Differentialgleichungen:^{1,2}



⇒

$$M = -EI \cdot \varphi' \quad Q = k \cdot GA \cdot (\omega' + \varphi)$$

⇒

$$[\text{Nm}] = [\text{Nm}^2] \cdot [\text{m}^{-1}] \quad [\text{N}] = [1] \cdot [\text{N}] \cdot [1 + 1]$$

Mit k einem Korrekturfaktor um die Ungleichverteilung der Schubspannungen im Balken ausgleichen zu können. G dem Gleitmodul und A der Querschnittsfläche. kGA selbst ist dann die Schubsteifigkeit. ω' ist die Verdrehung und φ die Verzerrung.

Für den EBB gilt Schubstarrheit. Bedeutet:

$$\omega' + \varphi = 0$$

⇒

$$\omega'' = -\varphi'$$

Der EBB ist damit definiert.³

$$M = EI \cdot \omega'' \quad Q = 0$$

⇒

$$EI \cdot \omega^{IV} - q = 0 \quad EI \cdot \omega''' + F = 0 \quad EI \cdot \omega'' - M = 0$$

Mit den Einheiten:

$$[\text{Nm}^2] \cdot [\text{m}^{-3}] - [\text{Nm}^{-1}] = 0 \quad [\text{Nm}^2] \cdot [\text{m}^{-2}] + [\text{N}] = 0 \quad [\text{Nm}^2] \cdot [\text{m}^{-1}] - [\text{Nm}] = 0$$

⇒

$$\omega' = [\text{m}^0] = [1] \quad \omega = [\text{m}^{+1}]$$

¹Zur Ermittlung der folgenden Differentialgleichungen siehe unter „Naviersche Gleichung“.

²Winkel in Uhrzeigerichtung werden hier positiv und Winkel entgegen negativ definiert.

³Zur Ermittlung der folgenden Differentialgleichungen siehe unter „Naviersche Gleichung“.

Berechnung der Durchbiegung ω für den EBB. So ist gegeben

$$E \cdot I \cdot \omega^{IV} - q = 0$$

So soll hier q eine Flächenlast darstellen, zum Beispiel die Eigenlast des Balkens, dann gilt für die folgenden Integrale

$$\omega''' = \frac{q}{E \cdot I} \cdot \int dx$$

\Rightarrow

$$\omega'' = \frac{q}{E \cdot I} \cdot \int \int dx = \frac{q}{E \cdot I} \cdot \int (x + C_1) \cdot dx \cdot dx$$

\Rightarrow

$$\omega'' = \frac{q}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 + C_1 \cdot x + C_2 \right)$$

Die bekannten Randbedingungen bestimmen die Integrationskonstanten.

$$\omega''(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$$

Und für C_1

$$\omega''(L) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{2} \cdot L$$

\Rightarrow

$$\omega'' = M = \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \cdot (x^2 - x \cdot L)$$

Es wird weiter integriert.

$$\omega' = \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int (x^2 - x \cdot L) \cdot dx$$

\Rightarrow

$$\omega = \omega_{EBB} = \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int \int (x^2 - x \cdot L) \cdot dx \cdot dx$$

\Rightarrow

$$\omega_{EBB} = \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \int \left(\frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot L + C_3 \right) \cdot dx$$

\Rightarrow

$$\omega_{EBB} = \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot x^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 \cdot L + C_3 \cdot x + C_4 \right)$$

Die bekannten Randbedingungen bestimmen die Integrationskonstanten.

$$\omega(0) = 0 \quad \rightarrow \quad C_4 = 0$$

Und für C_3

$$\omega(L) = 0 \quad \rightarrow \quad C_3 = \frac{1}{12} \cdot L^3$$

\Rightarrow

$$\omega_{EBB} = \frac{q}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot x^4 - \frac{1}{6} \cdot x^3 \cdot L + \frac{1}{12} \cdot L^3 \cdot x \right)$$

\Rightarrow

$$\omega_{EBB} = \frac{q \cdot L^4}{24 \cdot E \cdot I} \cdot \left(\frac{x^4}{L^4} - 2 \cdot \frac{x^3}{L^3} + \frac{x}{L} \right)$$

Wobei L die Auflagerlänge des Balkens darstellt. Die Eigenlast q wird mit 1 angenommen. Das Trägheitsmoment I mit dem eines rechteckigen Querschnitts belegt.

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Für die Balkenbreite gilt hier $b = 1$.

$$\omega_{EBB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{L^4}{E \cdot h^3} \cdot \left(\frac{x^4}{L^4} - 2 \cdot \frac{x^3}{L^3} + \frac{x}{L} \right)$$

2.3 Der Timoshenko-Balken

Timoshenko

Die Theorie um den TB stellt eine Erweiterung der klassischen EBB- Theorie dar, bei der zusätzlich neben der veränderten Trägheit eines verformten Balkens auch Schubverformung berücksichtigt wird.

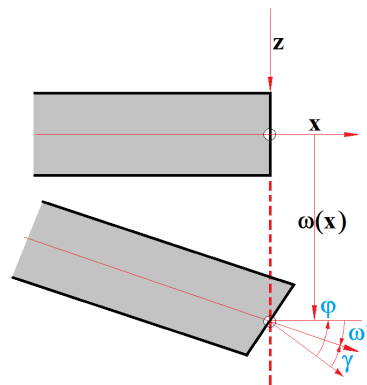
[Barb]

Damit erweitert sich die Bernoullischen-Annahme um eine weitere.

- Die Länge ist viel größer als der Querschnitt.
- Der Schwerpunkt des Querschnitts unterliegt lediglich einer Verschiebung.
- Die Verformungen sind klein.
- Es tritt keine Verwölbung auf.
- Nur ein eindimensionaler Spannungszustand tritt auf.
- Die Querschnittsnormale ist nicht unbedingt parallel zur Tangente der Biegelinie.

Durch das Zulassen zusätzlicher Balkendeformation infolge Schub verringert sich die Steifigkeit des Balkens. Die Folge sind höhere Deformationen und geringere Eigenfrequenzen (werden nicht betrachtet).⁴

Die Aussage, dass Deformationen sich grundsätzlich erhöhen infolge Schub, gilt nur für den Vergleich innerhalb einer Theorienfamilie. Benutzt man mathematische Beschreibungen und Ansätze, welche immer feiner die physikalische Realität eines Balkens beschreiben, so kann sich durchaus im Endergebnis eine kleinere Deformation ergeben.



⇒

$$\omega' - \gamma + \varphi = 0$$

⇒

$$\varphi = \gamma - \omega' \quad \Leftrightarrow \quad \omega' + \varphi = \gamma$$

⇒

$$\varphi' = \gamma' - \omega'' \quad \Leftrightarrow \quad \omega'' + \varphi' = \gamma'$$

Der Timoshenko-Balken ist damit definiert.

$$M = -EI \cdot \varphi' \quad Q = k \cdot GA \cdot (\omega' + \varphi)$$

⇒

$$M = EI \cdot (\omega'' - \gamma') \quad Q = k \cdot GA \cdot \gamma$$

Mit den Einheiten:

$$[\text{Nm}] = [\text{Nm}^2] \cdot [\text{m}^{-1} - \text{m}^{-1}] \quad [\text{N}] = [1] \cdot [\text{N}] \cdot [1]$$

Die Verzerrung γ ist ermittelbar.⁵

$$k \cdot GA \cdot \gamma' + q = 0 \quad k \cdot GA \cdot \gamma - F = 0$$

⁴Winkel in Uhrzeigerichtung werden hier positiv und Winkel entgegen negativ definiert.

⁵Zur Ermittlung der folgenden Differentialgleichungen siehe unter „Naviersche Gleichung“.

⇒

$$[1] \cdot [N] \cdot [m^{-1}] + [Nm^{-1}] = 0 \quad [1] \cdot [N] \cdot [1] - [N] = 0$$

Eine Verbindung zwischen Schub- und Biegesteifigkeit steht nun auch zur Verfügung.

$$k \cdot GA \cdot \gamma - EI \cdot (\gamma'' - \omega''') = 0$$

⇒

$$[1] \cdot [N] \cdot [1] - [Nm^2] \cdot [m^{-2} - m^{-2}] = 0$$

Der Euler-Bernoulli-Balken ist ein Sonderfall des Timoshenko-Balkens.

$$M = EI \cdot \lim_{\gamma \rightarrow 0} (\omega'' - \gamma') \quad Q = k \cdot GA \cdot \lim_{\gamma \rightarrow 0} \gamma$$

⇒

$$M = EI \cdot \omega'' \quad Q = 0$$

Zum Schluss ein Vergleich der Durchbiegungen. Der Wert der Durchbiegung beläuft sich auf die (Grund)Durchbiegung nach Euler und zusätzlich durch die Verzerrung γ . So gilt für vorliegende Definition der Drehwinkelvorzeichen:

$$\omega'_{TB} = \omega'_{EBB} - \gamma$$

⇒

$$\omega_{TB} = \omega_{EBB} - \int \gamma$$

Mit obig getroffener Annahme:

$$\frac{Q}{k \cdot GA} = \gamma$$

⇒

$$\omega_{TB} = \omega_{EBB} - \frac{1}{k \cdot GA} \int Q(x) \cdot dx$$

Bei einem angenommenen, gleichmäßig, flächenbelasteten Balken (z. B. durch Eigengewicht q) kann der Querkraftverlauf folgendermaßen dargestellt werden:

$$\frac{d}{dx} Q(x) \propto -q \quad \leftrightarrow \quad Q(x) \propto - \int q \cdot dx$$

⇒

$$\omega_{TB} = \omega_{EBB} + \frac{1}{k \cdot GA} \int \int q \cdot dx \cdot dx$$

Für die Flächenlast, das Eigengewicht wird $q = 1$ gesetzt.

$$\omega_{TB} = \omega_{EBB} + \frac{1}{k \cdot GA} \int (x + C_1) \cdot dx$$

⇒

$$\omega_{TB} = \omega_{EBB} + \frac{1}{k \cdot GA} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{k \cdot GA} \cdot C_1 \cdot x + \frac{1}{k \cdot GA} \cdot C_2$$

Die Integrationskonstante C_2 wird über die Randbedingung am Auflager bestimmt.

$$x = 0 \quad \leftrightarrow \quad \omega_{TB} = 0 \quad \omega_{EBB} = 0$$

⇒

$$0 = C_2$$

⇒

$$\omega_{TB} = \omega_{EBB} + \frac{1}{k \cdot GA} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{k \cdot GA} \cdot C_1 \cdot x$$

Die Integrationskonstante C_1 wird über die Randbedingung am Auflager bestimmt.

$$x = L \quad \leftrightarrow \quad \omega_{TB} = 0 \quad \omega_{EBB} = 0$$

⇒

$$-\frac{L}{2} = C_1$$

⇒

$$\omega_{TB} = \omega_{EBB} + \frac{x}{2 \cdot k \cdot GA} \cdot (x - L)$$

Die Querdehnungszahl μ wird eingefügt und G eliminiert.

$$\mu = \frac{E}{2 \cdot G} - 1$$

⇒

$$2 \cdot G = \frac{E}{1 + \mu}$$

⇒

$$\omega_{TB} = \omega_{EBB} + \frac{x \cdot (1 + \mu)}{k \cdot A \cdot E} \cdot (x - L)$$

Die Fläche A des TB wird explizit angegeben.

$$\omega_{TB} = \omega_{EBB} + \frac{x}{k \cdot b \cdot h \cdot E} \cdot (x - L) \cdot (1 + \mu)$$

Für den TB wird eine verallgemeinerte Breite von $b = 1$ angenommen.

$$\omega_{TB} = \omega_{EBB} + \frac{1 + \mu}{k \cdot h \cdot E} \cdot (x - L) \cdot x$$

Der Korrekturfaktor k für den Querschubeinfluss ist bei einem rechteckigen Balken in etwa $5/6$, für einen kreisförmigen Querschnitt in etwa $9/10$.

$$\omega_{TB} = \omega_{EBB} + \frac{6}{5} \cdot \frac{1 + \mu}{h \cdot E} \cdot (x - L) \cdot x$$

3 Der Balken in der Plattentheorie

3.1 Der Plattenstreifen als Balken

Plattentheorie

Die Plattentheorie beschreibt die Eigenschaften von Platten unter Belastung.

Um die Berechnungen innerhalb der Plattentheorie pragmatischer zu gestalten, bedient man sich einiger Vereinfachungen und legt fest, unter welchen Randbedingungen sie gültig sind, wie z.B:

- Die Dicke der Platte ist klein im Vergleich zu den anderen geometrischen Ausdehnungen.
- Die Verformungen und Durchbiegungen sind klein gegenüber der Plattendicke.
- Gerade Linienabschnitte, die orthogonal auf der Mittelfläche stehen bei Abwesenheit einer Belastung werden auch im verformten Zustand als gerade und orthogonal zur verformten Mittelfläche angenommen.

Platten werden ausschließlich normal zur Mittelebene beansprucht, was das wesentliche Unterscheidungsmerkmal zur Scheibe ist.

Besonders die dritte Randbedingung lässt vermuten, dass die Plattentheorie eine verallgemeinerte Theorie der Balkentheorie beinhaltet.

Platten sind eine Sonderform von Schalen, der Scheibe und der rotationssymmetrischen Schale.

Verformungen werden als klein angenommen und daher über die Theorie I. Ordnung ermittelt, es sei, eine endliche Verformung ist abzusehen, dann muss über die Theorie II. Ordnung gerechnet werden.

[Vid05]

	Platteneigenschaften			
	sehr kleine Durchbiegungen	kleine Durchbiegungen	große Durchbiegungen	
	weniger dünn	dünn		sehr dünn
	$\frac{L}{h} \leq \{8 \dots 10\}$	$\{8 \dots 10\} \leq \frac{L}{h} \leq \{80 \dots 100\}$		$\frac{L}{h} \geq \{80 \dots 100\}$
		$\frac{\omega}{h} \leq \{0, 2 \dots 0, 5\}$ biegesteif Stahlbetonplatte	$\frac{\omega}{h} \geq \{0, 2 \dots 0, 5\}$ biegeweich Stahlplatte	
	Querschubverzerrungen vorhanden	Querschubverzerrungen nicht vorhanden	Querschubverzerrungen nicht vorhanden	Membranwirkung
Plattentheorie	Reissner Mindlin	Kirchhoff		von Karman
Balkentheorie	Timoshenko	Euler Bernoulli		Theorie II. Ordnung

Kirchhoff

[Mat]

3.2 Der Plattenstreifen als Kirchhoff-Balken

Die Plattentheorie nach Kirchhoff beschreibt eine Differentialgleichung 4. Ordnung.

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} \cdot \omega + 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cdot \omega + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \cdot \omega = \frac{p}{K}$$

Dabei ist $\frac{\partial^4}{\partial x^4}$; $\frac{\partial^4}{\partial y^4}$ die Durchbiegung, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ die Verwindung der Platte entlang den entsprechenden Achsen, p die flächige Belastung und K die Plattensteifigkeit.

$$K = \frac{E}{12} \cdot \frac{h^3}{1 - \mu^2}$$

⇒

$$[K] = [Nm^{-2}] \cdot \frac{[m^3]}{[1]} = [Nm]$$

In der Plattensteifigkeit ist μ zu finden, die Querdehnungszahl.

$$\mu = \frac{E}{2 \cdot G} - 1$$

⇒

$$K = \frac{h^3}{3} \cdot \frac{G^2}{4 \cdot G - E}$$

Die Kirchhoffsche Differentialgleichung lässt sich umschreiben.

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \cdot \omega = \frac{p}{K}$$

⇒

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 \cdot \omega = \frac{p}{K}$$

⇒

$$K \cdot \Delta^2 \omega = p$$

Wobei Δ der Laplace-Operator darstellt. Die Kirchhoffsche Differentialgleichung in dieser Schreibweise wird Inhomogene Bipotential-Gleichung genannt.

Um eine Platte als einen Balken beschreiben zu können, wird die Platte als Plattenstreifen definiert. Bedeutet die Breite (und die Höhe) der Platte wird als klein angesehen (entlang der y-Achse). Damit vereinfacht sich die Kirchhoffsche Differentialgleichung zu:

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} \cdot \omega = \omega^{IV} = \frac{p}{K}$$

⇒

$$K \cdot \omega^{IV} - p = 0$$

Ist p bekannt, können durch einfaches Integrieren die Lösungen ermittelt werden. Für den allgemeinen Fall gilt im Vergleich vom Kirchhoffschen- Balken (KB) zum EBB:

$$K \cdot \omega^{IV} - p = 0 \quad \leftrightarrow \quad EI \cdot \omega^{IV} - q = 0$$

⇒

$$[Nm] \cdot [m^{-3}] - [Nm^{-2}] = 0 \quad \leftrightarrow \quad [Nm^2] \cdot [m^{-3}] - [Nm^{-1}] = 0$$

Die Belastung q_y bzw. F :

$$K \cdot \omega''' + q_y = 0 \quad \leftrightarrow \quad EI \cdot \omega''' + F = 0$$

⇒

$$[Nm] \cdot [m^{-2}] + [Nm] = 0 \quad \leftrightarrow \quad [Nm^2] \cdot [m^{-2}] + [N] = 0$$

Die Belastung q_x :

$$q_x = 0 \quad \leftrightarrow \quad -$$

Das Moment m_{yy} bzw. M_y :

$$K \cdot \omega'' - m_{yy} = 0 \quad \leftrightarrow \quad EI \cdot \omega'' - M_y = 0$$

\Rightarrow

$$[\text{Nm}] \cdot [\text{m}^{-1}] - [\text{N}] = 0 \quad \leftrightarrow \quad [\text{Nm}^2] \cdot [\text{m}^{-1}] - [\text{Nm}] = 0$$

Das Moment m_{xx} bzw. M_x :

$$K \cdot \mu \cdot \omega'' - m_{xx} = 0 \quad \leftrightarrow \quad M_x = 0$$

\Rightarrow

$$[\text{Nm}] \cdot [1] \cdot [\text{m}^{-1}] - [\text{N}] = 0 \quad \leftrightarrow \quad [-]$$

Das Moment m_{xy} :

$$m_{xy} = 0 \quad \leftrightarrow \quad M_{xy} = 0$$

Die Durchbiegung ω_{KB} und ω_{EBB} :

$$\omega_{KB} = \omega_{EBB} \cdot (1 - \mu^2) \quad \leftrightarrow \quad \omega_{EBB} = \omega_{EBB}$$

Die Durchbiegung des KB-Plattenstreifens ist demnach $(1 - \mu^2)$ -fach kleiner als die Durchbiegung des EBB-Balkens.

$$\omega_{KB} = \omega_{EBB} \cdot (1 - \mu^2)$$

Der Grund, die Annahme eines Balkens als brettförmiges Konstruktionselement mit der Konsequenz einer behinderten Querdehnung führt zu einer numerischen Erhöhung des Elastizitätsmoduls. Daher sollten für E folgende Relationen in den Berechnungen zugrunde gelegt werden.

$$E_{KB} = (1 - \mu^2) \cdot E \quad \leftrightarrow \quad E_{EBB} = E$$

Die numerische Erhöhung von E beträgt etwa 9/8 für Stahl.

Eine Deutung dieser Abschätzung ist möglich über folgenden Zusammenhang:

$$1 - \mu^2 \stackrel{?}{=} \frac{EI}{K}$$

Für den Plattenstreifen wird eine verallgemeinerte Breite von $b = 1$ angenommen.

$$1 - \mu^2 \stackrel{?}{=} \frac{E}{G} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{E}{G}\right)$$

\Rightarrow

$$1 - \mu^2 \stackrel{?}{=} \frac{E}{G} - \frac{1}{4} \cdot \frac{E^2}{G^2} = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{E^2}{G^2} + \frac{E}{G} - 1 = 1 - \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{E^2}{G^2} - \frac{E}{G} + 1\right) = 1 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{E}{G} - 1\right)^2$$

\Rightarrow

$$1 - \mu^2 \stackrel{!}{=} 1 - \mu^2$$

Mindlin

[Mat]

3.3 Der Plattenstreifen als Mindlin-Balken

Die klassische Plattentheorie nach Kirchhoff ist im Endergebnis eine Differentialgleichung 4. Ordnung. Bedeutet letztendlich, das die Randbedingungen der Platte auf zwei pro Randpunkt beschränkt sind, obwohl drei erst eine physikalisch sinnvolle Beschreibung des Plattenproblems ermöglichen. Die kleine Ordnung des Kirchhoffschen Ergebnisses ist geschuldet der Tatsache, dass Querschubverzerrungen (wie beim EBB) wiederum vernachlässigt werden. Neben Reissner und Panc wurden viele Beiträge zur erweiterten Plattentheorie veröffentlicht. Genutzt wird hier letztendlich die Theorie entwickelt von Mindlin. Ein System aus Differentialgleichungen 6. Ordnung ermöglicht dann die Beschreibung von Randpunkten mit 3 Bedingungen. Eine Herleitung wird hier nicht aufgezeigt und ist an entsprechender Stelle selbst nachzulesen.

Die Berechnungsgrundlagen für ω der Schubelastischen Platte nach Mindlin.

$$\omega = \beta - \lambda^2 \cdot \Delta_P \cdot \omega$$

Mit:

ω	Durchbiegung	[m]
μ	Querkontraktionszahl	[1]
s	Bogenlänge	[1]
h	Plattendicke	[m]
β	Winkelvektor	[m]
$\Delta_P = \nabla_P \cdot \nabla_P$	planarer Laplace- Operator	[-]
∇_P	planarer Nabla- Operator	[-]
$\lambda^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{h^2}{s} \cdot \frac{1}{1-\mu}$	Hilfsgröße	[m ²]

Die nun anstehende Konvertierung einer angenommenen schubweichen Platte zu einem Plattenstreifen beschreibt den Mindlin-Balken - MB. Dann ergibt sich:

$$\Delta_P \rightarrow \frac{d^2}{dx^2}$$

⇒

$$\omega_{MB} = \beta - \lambda^2 \cdot \omega''_{KB}$$

Wobei KB den Kirchhoff-Balken bezeichnet und MB den Balken nach Mindlin.

Nach Mindlin sind 2 Fallunterscheidungen möglich.

In der Balkenmitte gilt $\beta = 0$ und $\omega_{KB} = -\lambda^2 \cdot \omega''_{KB}$.

$$\omega_{MB} = \omega_{KB}$$

Bedeutet, die Berechnungsgrundlagen zwischen KB und MB unterscheiden sich nicht.

An den Rändern des Balkens gilt $\beta = \omega_{KB}$ und $\omega_{KB} \neq -\lambda^2 \cdot \omega''_{KB}$.

$$\omega_{MB} = \omega_{KB} - \lambda^2 \cdot \omega''_{KB}$$

Durch Substitution von ω_{KB} durch ω_{MB} lassen sich nun die Ableitungen von ω sowie M und q berechnen.

Die Fallunterscheidung bedeutet jedoch, dass eine Biegelinie, betrachtet über die ganze Länge des Plattenstreifens in 3 Intervalle aufgeteilt werden muss (linker Lagerbereich, Mitte, rechter Lagerbereich). Außerdem ist zu erwarten, dass selbst in den Auflagern des Plattenstreifens eine numerische Durchbiegung zu beobachten ist, falls nicht $\omega''_{KB}(x_A) = 0$ gilt, für den Fall, die Abszisse x befindet sich in den Auflagepunkten (z.B. $x_A = 0$ oder $x_A = L$ mit L der Länge des Plattenstreifens). Bei Mindlin wird dann von einem „nicht ausgebogenen Zustand“ gesprochen. Um das alles zu umgehen wird eine Konstante eingefügt, welche den Beitrag von $\omega''_{KB}(x_A) \neq 0$ eliminiert.

$$\omega_{MB} = \omega_{KB} - \lambda^2 \cdot \omega''_{KB} + \lambda^2 \cdot \omega''_{KB}(x_A)$$

⇒

$$\omega_{MB} = \omega_{KB} + \lambda^2 \cdot (\omega''_{KB}(x_A) - \omega''_{KB})$$

Bleibt nun die Betrachtung von λ^2 .

$$\lambda^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{h^2}{s} \cdot \frac{1}{1-\mu}$$

Für den Plattenstreifen werden bei Mindlin aus energetischen Überlegungen unter dem Ansatz quadratisch verteilter Schubspannungen angegeben, dass:

$$s = \frac{5}{6}$$

⇒

$$\lambda^2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{h^2}{1-\mu}$$

Die Höhe h ist bekannt und die Querkontraktionszahl μ materialabhängig. Für Stahl ergäbe sich daher.

$$\mu = 0,3$$

⇒

$$\lambda^2 = \frac{2}{7} \cdot h^2 \approx 0,3 \cdot h^2$$

Dadurch, dass der Wert h^2 im Nenner steht, ist ersichtlich, dass die Berechnung einer Platte nach Mindlin eine „dicke“ Platte voraussetzt, während die Kirchhoff-Theorie eine dünnwandige Platte annimmt. Der Übergang zwischen beiden Theorien ist mittels Grenzwertbildung aufzeigbar.

$$\omega_{MB} = \omega_{KB} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1-\mu} \cdot (\omega''_{KB}(x_A) - \omega''_{KB}) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} h^2$$

⇒

$$\omega_{MB} = \omega_{KB}$$

Die Lösung der DGL zur Berechnung von ω_{MB} :

$$\omega_{MB} = \omega_{KB} - \lambda^2 \cdot \omega''_{KB} + \lambda^2 \cdot \omega''_{KB}(x_A)$$

Mit:

$$\omega''_{KB} = \frac{6 \cdot x}{E \cdot h^3} \cdot (L - x) \cdot (1 - \mu^2)$$

⇒

$$\omega''_{KB}(x_A) = \omega''_{KB}(0) = 0$$

So ergibt sich letztendlich:

$$\omega_{MB}(x) = \frac{x \cdot (1 - \mu^2)}{2 \cdot E \cdot h^3} \cdot (12 \cdot \lambda^2 \cdot (x - L) - (x - 2 \cdot L) \cdot x^2 - L^3)$$

4 Der Balken in der Scheibentheorie

Scheibentheorie
[JP]

Die Scheibentheorie beschreibt die Berechnung der Spannungen und Verformungen von Scheiben.

Unter Scheiben werden dabei ebene Flächentragwerke verstanden, die ausschließlich durch Kräfte belastet werden, die in ihrer Ebene wirken.

Im Unterschied dazu werden ebene Flächentragwerke, die allein durch Kräfte orthogonal zu ihrer Ebene belastet werden, als Platten bezeichnet.

Als Hilfsmittel zur analytischen Berechnung des Scheibenspannungszustandes dient die Airysche Spannungsfunktion.

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} \cdot \omega + 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} \cdot \omega + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \cdot \omega = 0$$

Die Voraussetzungen der Scheibentheorien verbieten die Nutzung Ihrer Erkenntnisse in der Balkentheorie. Dennoch ist es interessant zu zeigen, zu welchen Ergebnissen die Scheibentheorie führt, wenn man sie dennoch als Berechnungsgrundlage der Durchbiegung nutzt. So wird festgelegt, dass der Scheibenstreifen keine Verwindung erfährt und dass keine Verformungen in y-Richtung zu erwarten sind. Die Airysche Spannungsfunktion reduziert sich dann zu

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} \cdot \omega = \omega^{IV} = 0$$

Der Unterschied zu Kirchhoff ist demnach hier das Verschwinden der Inhomogenität p/K . Damit diese zu Null reduziert werden kann, gibt es die Möglichkeit $p \rightarrow 0$ oder $K \rightarrow \infty$. Wobei das Verschwindenlassen der Last p nicht sinnvoll ist für die Berechnung einer Durchbiegung.

Die Durchbiegung des Balkens nach Kirchhoff war berechnet mit

$$\omega_{KB} = \omega_{EBB} \cdot (1 - \mu^2)$$

Wobei μ ermittelbar ist durch

$$1 - \mu^2 = \frac{E \cdot I}{K}$$

Der Grenzwert $K \rightarrow \infty$ dazu

$$\lim_{K \rightarrow \infty} (1 - \mu^2) = \mu_K = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{E \cdot I}{K}$$

\Rightarrow

$$\mu_K = 1$$

\Rightarrow

$$\omega_{ST} = 0$$

Was durchaus mit der Bedingung der Krafteinleitung korreliert. Gibt es keine Eigenlast, welche orthogonal zur Scheibenebene wirkt, dann gibt es auch keine Durchbiegung in der „Balkenmitte“.

Wenn die Kraft nur in der Scheibenebene wirken darf, dann kann unter Umständen ein Scheibenstreifen als Knickstab angesehen werden und dessen Berechnungsgrundlagen so ermittelt werden. Ausgangsgleichung ist dann

- **analog(!) Eulerfall 1 \equiv Fall 1**⁶

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} \cdot \omega = \frac{d^4}{dx^4} \cdot \omega = \omega^{IV} = 0$$

\Rightarrow

$$\omega''' = \int dx = C_0$$

\Rightarrow

$$\omega'' = \int C_0 \cdot dx = C_0 \cdot x + C_1$$

⁶Hier wird nicht der betreffende Eulerfall beschrieben, lediglich ein ähnliches ω . Mindestrandbedingungen: $\omega''(L) = 0$, $\omega(0) = 0$ und $\omega'(0) = 0$

Die Randbedingungen sind bekannt und bestimmen die Integrationskonstanten C_0 und C_1 .

$$\omega''(L) = 0 = C_0 \cdot L + C_1$$

\Rightarrow

$$\omega'' = C_0 \cdot (x - L)$$

Sowie:

$$\omega''(0) = -\frac{M}{E \cdot I} = C_0 \cdot (0 - L)$$

\Rightarrow

$$E \cdot I \cdot \omega'' = M \cdot \left(\frac{x}{L} - 1\right)$$

Es wird weiter integriert.

$$E \cdot I \cdot \omega' = E \cdot I \cdot \int \omega'' \cdot dx = M \cdot \left(\frac{x^2}{2 \cdot L} - x + C_2\right)$$

Die Verdrehung am FuÙe des Knickstabes ist Null, daher:

$$E \cdot I \cdot \omega'(0) = 0 = \frac{0^2}{2 \cdot L} - 0 + C_2$$

\Rightarrow

$$C_2 = 0$$

\Rightarrow

$$E \cdot I \cdot \omega' = M \cdot \left(\frac{x^2}{2 \cdot L} - x\right)$$

Die letzte Integration liefert die Biegelinie.

$$E \cdot I \cdot \omega = E \cdot I \cdot \int \omega' \cdot dx = M \cdot \left(\frac{x^3}{6 \cdot L} - \frac{x^2}{2} + C_3\right)$$

Die Integrationskonstante C_3 ist erfragt.

$$E \cdot I \cdot \omega(0) = 0 = \frac{0^3}{6 \cdot L} - \frac{0^2}{2} + C_3$$

\Rightarrow

$$C_3 = 0$$

\Rightarrow

$$E \cdot I \cdot \omega = M \cdot \left(\frac{x^3}{6 \cdot L} - \frac{x^2}{2}\right)$$

\Rightarrow

$$\omega = \frac{M}{E \cdot I} \cdot \frac{x^2}{6} \cdot \left(\frac{x}{L} - 3\right)$$

Eine Nebenbedingung ist bekannt.

$$\omega''' + \alpha^2 \cdot \omega' = 0$$

Für eine wahre Aussage ist dann α^2 definiert mit:

$$\alpha^2 = \frac{2}{x \cdot (2 \cdot L - x)}$$

An der Stelle $x = L$.

$$\alpha^2(L) = \frac{2}{L^2}$$

Die allgemeine Berechnungsgrundlage der Knickkraft ist definiert.

$$N_K = \alpha^2(L) \cdot E \cdot I$$

\Rightarrow

$$N_{K_{ST}} = \frac{2}{L^2} \cdot E \cdot I$$

Für den Eulerfall 1 ist gegeben.

$$N_{KE} = \frac{\pi^2}{4 \cdot L^2} \cdot E \cdot I$$

Das Verhältnis beider Knickkräfte.

$$\frac{N_{KE}}{N_{KST}} = \frac{\pi^2}{8} \approx 1,234$$

Der Eulerfall ist demnach etwas günstiger.

- **analog(!) Eulerfall 2 \equiv Fall 2⁷**

Mit der Forderung der Scheibentheorie

$$\omega^{IV} = 0$$

ergibt sich nach der zweiten Integration eine lineare Funktion. Diese kann jedoch die Randbedingungen

$$\omega''(0) = 0 \quad \omega''(L) = 0$$

nicht erfüllen. Daher existiert kein Fall 2 analog Eulerfall 2.

- **analog(!) Eulerfall 3 \equiv Fall 3⁸**

Mit der Forderung der Scheibentheorie

$$\omega^{IV} = 0$$

ergeben sich nach der vierten Integration vier Integrationskonstanten C_0 , C_1 , C_2 und C_3 . Mit den Mindestrandbedingungen $\omega(L) = 0$, $\omega''(L) = 0$, $\omega(0) = 0$ und $\omega'(0) = 0$ und der Bedingung

$$\omega''(L) = -\frac{M}{E \cdot I}$$

kann eine Bedingung nicht erfüllt werden. Daher existiert kein Fall 3 analog Eulerfall 3.

- **analog(!) Eulerfall 4 \equiv Fall 4⁹**

Mit der Forderung der Scheibentheorie

$$\omega^{IV} = 0$$

ergeben sich nach der vierten Integration vier Integrationskonstanten C_0 , C_1 , C_2 und C_3 . Mit den Mindestrandbedingungen $\omega(L) = 0$, $\omega'(L) = 0$, $\omega(0) = 0$ und $\omega'(0) = 0$ und der Bedingung

$$\omega''(L/2) = -\frac{M}{E \cdot I}$$

kann eine Bedingung nicht erfüllt werden. Daher existiert kein Fall 4 analog Eulerfall 4.

⁷Hier wird nicht der betreffende Eulerfall beschrieben, lediglich ein ähnliches ω . Mindestrandbedingungen: $\omega(L) = 0$, $\omega''(L) = 0$, $\omega(0) = 0$ und $\omega''(0) = 0$

⁸Hier wird nicht der betreffende Eulerfall beschrieben, lediglich ein ähnliches ω . Mindestrandbedingungen: $\omega(L) = 0$, $\omega''(L) = 0$, $\omega(0) = 0$ und $\omega'(0) = 0$

⁹Hier wird nicht der betreffende Eulerfall beschrieben, lediglich ein ähnliches ω . Mindestrandbedingungen: $\omega(L) = 0$, $\omega'(L) = 0$, $\omega(0) = 0$ und $\omega'(0) = 0$

5 Der Balken in der Schalentheorie

Eine Schale ist ein flächiges Tragwerk, das einfach oder doppelt (räumlich) gekrümmt ist und das Belastungen sowohl senkrecht als auch in seiner Ebene aufnehmen kann.

Schalentheorie

Bei Schalen, deren Dicke klein gegenüber der Spannweite ist, kann die Biegung vernachlässigt werden. Diesen Zustand bezeichnet man als Membranspannungszustand.

Annahmen:

- Die Schalendicke ist klein im Vergleich zu den übrigen Abmessungen.
- Die Verformungen sind klein im Vergleich zur Schalendicke.
- Punkte die auf einer Normalen zur Mittelebene liegen, befinden sich auch nach einer Verformung wieder auf einer solchen Geraden.
- Senkrecht zur Mittelebene wirkende Normal- und Schubspannungen sind vernachlässigbar.
- Der Werkstoff ist homogen und isotrop und folgt dem Hookeschen Gesetz.
- Abweichungen von den genannten Voraussetzungen bedingen in der Regel weit höheren Berechnungsaufwand.

Höhere Schalentheorien:

- Multi-Direktor-Schalentheorien
- Mehrschichten-Schalentheorien

Berechnungstheorien

- Membrantheorie:

Die Membrantheorie geht im Gegensatz zur Biegetheorie von einigen weiteren Vereinfachungen aus. Sie ergibt keine genauen Lösungen, jedoch ist sie für viele Anwendungsfälle ausreichend. Durchbiegungen werden vernachlässigt. Die maximalen Biegemomente treten in den Randbereichen auf. Formänderungen werden vernachlässigt. Das Tragwerk wird im unverformten Zustand untersucht. Die Kräfte an den Schalenrändern sind tangential zur Mittelebene gerichtet. Der Rand einer Membranschale ist frei oder tangential abgestützt. Es treten nur Normal- und Schubspannungen auf, die innerhalb der Ebene liegen und über die Wandstärke konstant sind.

- Biegetheorie:

Die Biegesteifheit der Schale muss berücksichtigt werden. Manchmal genügt es die Einwirkungen der Biegetheorie lokal nachträglich zu berücksichtigen. Das gilt vor allem, wenn der Rand der Schale gelenkig oder eingespannt abgestützt ist und damit die Bedingungen der Membrantheorie nicht erfüllt sind.

5.1 Der Biegebalken über die Kesselformel

Kesselformel

Die Kesselformel nach DIN2413 ist eine Ansammlung von Berechnungsgrundlagen für die Auslegung von Kesseln, Behältern unter Druck und Rohrleitungen. Per Vorschrift gilt die Kesselformel nicht für dickwandige Bauteile und Platten. Daher ist die Kesselformel nicht geeignet um einen Biegebalken zu dimensionieren. Dennoch ist es interessant zu schauen, zu welchen Ergebnissen die Schalentheorie über die Kesselformel führt, wenn man sie als Berechnungsgrundlage der Durchbiegung nutzt.

Nach [Tec] gilt für die Radialverformung eines unendlich langen Rohrs:

$$\Delta r(x) = \frac{p}{E} \cdot r_x \cdot \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \cdot \left(\frac{r_a^2}{r_x^2} \cdot (1 + \mu) + 1 - \mu \right)$$

Wobei r_i der Innenradius ist und r_a der Außenradius. Beide Radien sind miteinander verknüpft über die Wandstärke (als Rohr) bzw. Balkenhöhe (als Balken) h .

$$r_a = r_i + h$$

Weiterhin ist die Lage der neutralen Faser bekannt.

$$\frac{r_i + r_a}{2} = r_m$$

⇒

$$r_i = r_m - \frac{h}{2} \quad r_a = r_m + \frac{h}{2}$$

Das wird in die obige Berechnungsgrundlage eingearbeitet und diese umgestellt.

$$\Delta r(x) = \frac{p}{E} \cdot \frac{r_x}{2} \cdot \frac{(r_m - \frac{h}{2})^2}{h \cdot r_m} \cdot \left(\frac{(r_m + \frac{h}{2})^2}{r_x^2} \cdot (1 + \mu) + 1 - \mu \right)$$

Die betrachtete Stelle r_x soll die von r_m sein.

$$\Delta r = \frac{p}{E} \cdot \frac{1}{2 \cdot h} \cdot \left(r_m - \frac{h}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{(r_m + \frac{h}{2})^2}{r_m^2} \cdot (1 + \mu) + (1 - \mu) \right)$$

Bei der Übertragung des Modells Rohr auf einen Biegebalken kann davon ausgegangen werden, dass zukünftig $r_m \gg h$ gilt. Daher kann weiter vereinfacht werden.

$$r_m - \frac{h}{2} \approx r_m \approx r_m + \frac{h}{2}$$

⇒

$$\Delta r = \frac{p}{E} \cdot \frac{1}{h} \cdot r_m^2$$

Der nächste Schritt ist die Ermittlung von r_m . Dazu wird die allgemeine Berechnungsgrundlage der Biegelinie des Euler-Bernoulli-Balkens als Basis herangezogen.

$$\omega_{EBB} = \frac{q}{24} \cdot \frac{L^4}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{x^4}{L^4} - 2 \cdot \frac{x^3}{L^3} + \frac{x}{L} \right)$$

Der Radius r_m ist nun ermittelbar über eine differentialgeometrische Vorgabe. Der Rechenweg wird nicht aufgezeigt. Das Ergebnis für die Stelle $x = L/2$ (Biegebalken, beidseitig gelenkig gelagert) ist von Interesse.

$$r_m = \frac{\sqrt{\omega_{EBB}'^2 + 1}^3}{\omega_{EBB}''}$$

⇒

$$r_m = 8 \cdot \frac{E \cdot I}{q \cdot L^2}$$

Das Ergebnis wird eingesetzt, die Berechnungsgrundlage von Δr ist von nun an die von $\Delta\omega_{SSB}$ der „Schalenstreifenbalken“.

$$\Delta\omega_{SSB} \left(\frac{L}{2} \right) = 64 \cdot \frac{p}{q^2} \cdot \frac{E \cdot I^2}{h \cdot L^4}$$

Der Quotient von p und q ist von Interesse. Für die Linien- bzw. Flächenlast gilt:

$$p = \frac{F}{L \cdot b} \quad q = \frac{F}{L}$$

⇒

$$\frac{p}{q^2} = \frac{1}{b} \cdot \frac{L}{F} = \frac{1}{q \cdot b}$$

⇒

$$\Delta\omega_{SSB} \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{64}{q} \cdot \frac{E \cdot I^2}{b \cdot h \cdot L^4}$$

Das Flächenträgheitsmoment I wird ersetzt.

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

⇒

$$\Delta\omega_{SSB} \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{E \cdot b \cdot h^5}{q \cdot L^4}$$

In allen Herleitungen wird $b = 1$ und $q = 1$ genutzt.

$$\Delta\omega_{SSB} \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{E \cdot h^5}{L^4}$$

Damit ist die Durchbiegung des „Schalenstreifenbalkens“ ermittelt.

$$\omega_{EBB} = \frac{q}{24} \cdot \frac{L^4}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{x^4}{L^4} - 2 \cdot \frac{x^3}{L^3} + \frac{x}{L} \right) \quad \omega_{SSB} = \frac{64}{q} \cdot \frac{E \cdot I^2}{b \cdot h \cdot L^4} \cdot \left(\frac{x^4}{L^4} - 2 \cdot \frac{x^3}{L^3} + \frac{x}{L} \right)$$

⇒

$$\omega_{EBB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{L^4}{E \cdot h^3} \cdot \left(\frac{x^4}{L^4} - 2 \cdot \frac{x^3}{L^3} + \frac{x}{L} \right) \quad \omega_{SSB} = \frac{4}{9} \cdot \frac{E \cdot h^5}{L^4} \cdot \left(\frac{x^4}{L^4} - 2 \cdot \frac{x^3}{L^3} + \frac{x}{L} \right)$$

Das Verhältnis der Durchbiegungen.

$$\frac{\omega_{SSB}}{\omega_{EBB}} = 1536 \cdot \frac{E^2 \cdot I^3}{q^2 \cdot L^8 \cdot b \cdot h} = \frac{8}{9} \cdot \frac{E^2 \cdot b^2 \cdot h^8}{q^2 \cdot L^8}$$

Wann ergibt das Verhältnis den Wert von rund 1.

$$1536 \cdot \frac{E^2 \cdot I^3}{q^2 \cdot L^8 \cdot b \cdot h} = 1 \quad \frac{8}{9} \cdot \frac{E^2 \cdot b^2 \cdot h^8}{q^2 \cdot L^8} = 1$$

⇒

$$I = \frac{1}{8} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot L^8 \cdot \frac{q^2}{E^2} \cdot b \cdot h} \quad h = L \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{\sqrt{8}} \cdot \frac{q}{E \cdot b}}$$

⇒

$$I = \frac{1}{8} \cdot L^3 \cdot \sqrt[12]{\frac{1}{54} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{q^9}{E^9} \cdot b^3} \approx 0,0871 \cdot L^3 \cdot \sqrt[4]{\frac{q^3}{E^3} \cdot b}$$

Für Stahl mit $E = 210 \cdot 10^9$ [N/mm²] und $b = 100\text{mm} \equiv 0,1\text{m}$ sowie $q = 5000$ [N/m] (rund $q = 1000$ [N/m] davon Eigenlast für die zukünftigen Maße) wäre dann eine Balkenhöhe bzw. Trägheit gefordert von:

$$I = \frac{1}{8} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot L^8 \cdot \frac{5000^2}{(210 \cdot 10^9)^2} \cdot 0,1 \cdot h} \quad h = L \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{\sqrt{8}} \cdot \frac{5000}{210 \cdot 10^9 \cdot 0,1}}$$

$$\Rightarrow I [\text{m}^4] \approx 332,9 \cdot 10^{-9} \cdot \sqrt[3]{L^8 \cdot h} [\text{m}^4] \quad h [\text{mm}] \approx 0,0224 \cdot L [\text{mm}]$$

$$\Rightarrow I [\text{mm}^4] \approx 93,85 \cdot 10^{-6} \cdot L^3 [\text{mm}^4]$$

Bedeutet, bei einer Spannweite des Balkens von $L = 5000\text{mm}$ eine geforderte Profilhöhe bzw. Flächenträgheitsmoment von:

$$h = 112,1 \approx 112 [\text{mm}]$$

$$\Rightarrow I = 93,85 \cdot 10^{-6} \cdot 5000^3 = \frac{100 \cdot 112,1^3}{12} \approx 11,73 \cdot 10^6 [\text{mm}^4]$$

Für den Spannungsnachweis gilt an der äußersten Faser (vorliegend ein $qL^2/8$ -Balken):

$$\frac{q \cdot L^2}{I} \cdot \frac{h}{16} = \sigma_{vorh} \leq \sigma_{zul}$$

$$\Rightarrow 74,6 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right] \leq 240 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$$

Der Balken ist nur zu etwa 30% ausgelastet.

Für den im gesamten Skript genutzten „Vergleichsbalken“ soll gelten:

$$L = 1 \quad q = 1 \quad E = 1 \quad b = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_{SSB}}{\omega_{EBB}} = \frac{8}{9} \approx 0,889$$

5.2 Der Biegebalken über die Membrantheorie

Nach [Sch] ist die Radialaufweitung einer Membran gegeben mit:

Membranzustand

$$\Delta r(x) = r_x \cdot \varepsilon_\varphi = \frac{r_x}{E \cdot h} \cdot (n_\varphi - \mu \cdot n_S) + r_x \cdot \alpha \cdot T$$

Der Einfluss einer möglichen Temperaturänderung wird nicht betrachtet.

$$\Delta r(x) = \frac{r_x}{E \cdot h} \cdot (n_\varphi - \mu \cdot n_S)$$

Wobei:

$$n_\varphi = \sigma_\varphi \cdot h \quad n_S = \sigma_S \cdot h$$

⇒

$$\Delta r(x) = \frac{r_x}{E} \cdot (\sigma_\varphi - \mu \cdot \sigma_S)$$

Die Tangentialspannung σ_φ :

$$\sigma_\varphi = \frac{p \cdot r_m}{h}$$

Die Axialspannung σ_S :

$$\sigma_S = \frac{p \cdot r_m}{2 \cdot h}$$

⇒

$$\Delta r(x) = \frac{r_x}{E} \cdot \left(\frac{p \cdot r_m}{h} - \mu \cdot \frac{p \cdot r_m}{2 \cdot h} \right)$$

⇒

$$\Delta r(x) = \frac{r_x \cdot p \cdot r_m}{E \cdot h} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{2} \right)$$

Die betrachtete Stelle r_x soll die von r_m sein.

$$\Delta r = \frac{p}{E} \cdot \frac{r_m^2}{2 \cdot h} \cdot (2 - \mu)$$

Die berechnete Aufweitung Δr nach der Membrantheorie unterscheidet sich nur durch den Faktor $2 - \mu$ von den Berechnungsgrundlagen des unendlich langen Rohres. Letztendlich ergibt sich für r_m :

$$r_m = 8 \cdot \frac{E \cdot I}{q \cdot L^2}$$

⇒

$$\Delta \omega_{MTH} \left(\frac{L}{2} \right) = 32 \cdot \frac{p}{q^2} \cdot \frac{E \cdot I^2}{h \cdot L^4} \cdot (2 - \mu)$$

⇒

$$\Delta \omega_{MTH} \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{32}{q} \cdot \frac{E \cdot I^2}{b \cdot h \cdot L^4} \cdot (2 - \mu)$$

⇒

$$\Delta \omega_{MTH} \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{2}{9} \cdot \frac{E \cdot b \cdot h^5}{q \cdot L^4} \cdot (2 - \mu)$$

Damit sind alle weiter folgenden Formeln kompatibel mit $\Delta \omega_{SSB}(L/2)$, wenn man das Elastizitätsmodul modifiziert und mit E^* weiter rechnet.

$$E \cdot (2 - \mu) = E^*$$

⇒

$$\omega_{EBB} = \frac{q}{24} \cdot \frac{L^4}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{x^4}{L^4} - 2 \cdot \frac{x^3}{L^3} + \frac{x}{L} \right)$$

$$\omega_{MTH} = \frac{64}{q} \cdot \frac{E \cdot I^2}{b \cdot h \cdot L^4} \cdot (2 - \mu) \cdot \left(\frac{x^4}{L^4} - 2 \cdot \frac{x^3}{L^3} + \frac{x}{L} \right)$$

⇒

$$\omega_{EBB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{L^4}{E \cdot h^3} \cdot \left(\frac{x^4}{L^4} - 2 \cdot \frac{x^3}{L^3} + \frac{x}{L} \right)$$

$$\omega_{MTH} = \frac{4}{9} \cdot \frac{E \cdot h^5}{L^4} \cdot (2 - \mu) \cdot \left(\frac{x^4}{L^4} - 2 \cdot \frac{x^3}{L^3} + \frac{x}{L} \right)$$

Damit dann aber auch mit $\mu = 0,3$ ansonsten den gleichen Beispielswerten:

$$I = \frac{1}{8} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot L^8 \cdot \frac{q^2}{E^2} \cdot b \cdot h} \quad h = L \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{\sqrt{8}} \cdot \frac{q}{E \cdot b}}$$

⇒

$$I [\text{m}^4] = \frac{1}{8} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{3} \cdot L^8 \cdot \frac{5000^2}{(210 \cdot 10^9 \cdot (2 - 0,3))^2} \cdot 0,1 \cdot h [\text{m}^4]}$$

$$h [\text{mm}] = L \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{\sqrt{8}} \cdot \frac{5000}{210 \cdot 10^9 \cdot (2 - 0,3) \cdot 0,1}} [\text{mm}]$$

⇒

$$I [\text{mm}^4] = 63,0 \cdot 10^{-6} \cdot L^3 [\text{mm}^4]$$

$$h [\text{mm}] = 0,0196 \cdot L [\text{mm}]$$

⇒

$$I = 7,875 \cdot 10^6 [\text{mm}^4] \quad h = 98 [\text{mm}]$$

Die Auslastung des Beispielbalkens.

$$\frac{q \cdot L^2}{I} \cdot \frac{h}{16} = \sigma_{vorh} \leq \sigma_{zul}$$

⇒

$$97,3 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right] \leq 240 \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \right]$$

Der Balken ist nur zu etwa 40% ausgelastet.

Für den im gesamten Skript genutzten "Vergleichsbalken" soll gelten:

$$L = 1 \quad q = 1 \quad E = 1 \quad b = 1$$

⇒

$$\frac{\omega_{MTH}}{\omega_{EBB}} = \frac{\omega_{SSB}}{\omega_{EBB}} \cdot (2 - \mu) = \frac{8}{9} \cdot (2 - \mu) \approx 1,512$$

6 Die Durchbiegung ω als zentrales Element

6.1 Vergleich der Durchbiegungen ω der verschiedenen Balkentypen

Folgend die Ausgangsgleichungen der Durchbiegungen zur Zusammenfassung und Vergleich.^{10,11}

Durchbiegungen

$$\begin{aligned}\omega_{EEB} &= \frac{x}{2 \cdot E \cdot h^3} \cdot (2 \cdot x^2 \cdot L - x^3 - L^3) \\ \omega_{TB} &= \frac{x}{2 \cdot E \cdot h^3} \cdot (2 \cdot x^2 \cdot L - x^3 - L^3) + \frac{6}{5 \cdot E \cdot h} \cdot (1 + \mu) \cdot x \cdot (x - L) \\ \omega_{KB} &= \frac{x}{2 \cdot E \cdot h^3} \cdot (1 - \mu^2) \cdot (2 \cdot x^2 \cdot L - x^3 - L^3) \\ \omega_{MB} &= \frac{x}{2 \cdot E \cdot h^3} \cdot (1 - \mu^2) \cdot \left(2 \cdot x^2 \cdot L - x^3 - L^3 + \frac{12}{5} \cdot \frac{h^2}{1 - \mu} \cdot (x - L) \right) \\ \omega_{SSB} &= \frac{4}{9} \cdot \frac{E \cdot h^5}{L^4} \cdot \left(2 \cdot \frac{x^3}{L^3} - \frac{x^4}{L^4} - \frac{x}{L} \right) \\ \omega_{MTH} &= \frac{4}{9} \cdot \frac{E \cdot h^5}{L^4} \cdot (2 - \mu) \cdot \left(2 \cdot \frac{x^3}{L^3} - \frac{x^4}{L^4} - \frac{x}{L} \right)\end{aligned}$$

Es folgt eine Proportionierung mit $E = 1$ und $L = 1$ und $h = 1$ und $\mu = 0,3$ und anschließende Vereinfachung.

$$\begin{aligned}\omega_{EEB} &\propto \frac{1}{2} \cdot x \cdot (2 \cdot x^2 - x^3 - 1) \\ \omega_{TB} &\propto \frac{1}{2} \cdot x \cdot (2 \cdot x^2 - x^3 - 1) + \frac{39}{25} \cdot x \cdot (x - 1) \\ \omega_{KB} &\propto \frac{91}{200} \cdot x \cdot (2 \cdot x^2 - x^3 - 1) \\ \omega_{MB} &\propto \frac{91}{200} \cdot x \cdot \left(2 \cdot x^2 - x^3 + \frac{24}{7} \cdot x - \frac{31}{7} \right) \\ \omega_{SSB} &\propto \frac{2}{3} \cdot x \cdot (2 \cdot x^2 - x^3 - 1) \\ \omega_{MTH} &\propto \frac{34}{45} \cdot x \cdot (2 \cdot x^2 - x^3 - 1)\end{aligned}$$

Der Wert der maximalen Durchbiegung ist bei $x = L/2 = 1/2$ zu erwarten. Ohne Nachweis wird dies so übernommen.

$$\begin{aligned}\omega_{EEB} \left(\frac{L}{2} \right) &\equiv -\frac{5}{32} \approx -0,156 \\ \omega_{TB} \left(\frac{L}{2} \right) &\equiv -\frac{437}{800} \approx -0,546 \\ \omega_{KB} \left(\frac{L}{2} \right) &\equiv -\frac{91}{640} \approx -0,142 \\ \omega_{MB} \left(\frac{L}{2} \right) &\equiv -\frac{1703}{3200} \approx -0,532 \\ \omega_{SSB} \left(\frac{L}{2} \right) &\equiv -\frac{5}{24} \approx -0,208 \\ \omega_{MTH} \left(\frac{L}{2} \right) &\equiv -\frac{17}{72} \approx -0,236\end{aligned}$$

¹⁰Aus Gründen des Modellansatzes wird die Berechnungsgrundlage der Durchbiegung des SSB-Balkens mit negativem Vorzeichen versehen, damit alle Balkenbiegungen in die gleiche Richtung zeigen.

¹¹Aus Gründen des Modellansatzes wird die Berechnungsgrundlage der Durchbiegung des MTH-Balkens mit negativem Vorzeichen versehen, damit alle Balkenbiegungen in die gleiche Richtung zeigen.

6.2 Verhältnis der Durchbiegungen ω der verschiedenen Balkentypen

Verhältnisse

Folgend eine Eingruppierung der Balkentypen nach der Durchbiegung ohne Prüfung der Allgemeingültigkeit.

- Gruppe 1

$$\omega_{EBB} \quad \omega_{KB}$$

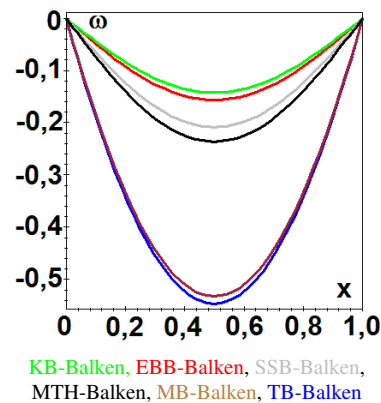
- Gruppe 2

$$\omega_{TB} \quad \omega_{MB}$$

- Gruppe 3

$$\omega_{SSB} \quad \omega_{MTH}$$

Eine grafische Darstellung der Durchbiegungen aus den Proportionen zur Information.



Eine weitere Abhängigkeit ist bekannt als die Konsistenz der Durchbiegungen.

$$\omega_{TB} + \omega_{KB} = \omega_{MB} + \omega_{EBB}$$

⇒

$$\omega_{EBB} - \omega_{KB} = \omega_{TB} - \omega_{MB}$$

Setzt man die allgemeine Berechnungsgrundlagen für die einzelnen ω ein, wird man die erwartete wahre Aussage bekommen.¹²

¹²Der Nachweis ist trivial durch einfache Umstellarbeit ausführbar und wird deshalb hier nicht durchgeführt.

7 Anhang

7.1 Nachweis $b = 1$

Warum darf man hier für $b = 1$ annehmen?

Anhang I

Man darf nicht nur, man muss. Aufgezeigt an λ .

$$\lambda^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{h^2}{s} \cdot \frac{1}{1-\mu}$$

Neben dieser ist noch die Plattensteifigkeit N nach Mindlin bekannt.

$$N = \frac{G}{6} \cdot \frac{h^3}{1-\mu} \quad N = \frac{E}{12} \cdot \frac{h^3}{1-\mu^2}$$

Das Gleitmodul G wird eingefügt.

$$\lambda^2 = \frac{1}{h \cdot s} \cdot \frac{N}{G}$$

Das Elastizitätsmodul E wird eingefügt.

$$\lambda^2 = \frac{h^2}{12 \cdot s} \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{1}{1-\mu^2}$$

Die Plattensteifigkeit K vom KB wird eingefügt.

$$K = \frac{E}{12} \cdot \frac{h^3}{1-\mu^2}$$

\Rightarrow

$$\lambda^2 = \frac{1}{h \cdot s} \cdot \frac{K}{G}$$

Die Plattensteifigkeit K vom KB wird substituiert.

$$K = \frac{EI}{1-\mu^2}$$

\Rightarrow

$$\lambda^2 = \frac{1}{h \cdot s} \cdot \frac{E}{G} \cdot \frac{I}{1-\mu^2}$$

Die Module E und G werden substituiert.

$$\frac{E}{G} = 2 \cdot \frac{1-\mu^2}{1-\mu}$$

\Rightarrow

$$\lambda^2 = \frac{2}{h \cdot s} \cdot \frac{I}{1-\mu}$$

Das Flächenträgheitsmoment I wird substituiert als Balken.

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

\Rightarrow

$$\lambda^2 = \frac{1}{6 \cdot s} \cdot \frac{b \cdot h^2}{1-\mu}$$

Zum Vergleich, am Anfang war gegeben:

$$\lambda^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{h^2}{s} \cdot \frac{1}{1-\mu}$$

Daher: Für den Plattenstreifen (und den anderen Balkentypen) wird eine verallgemeinerte Breite von $b = 1$ angenommen.

Grund ist die Nutzung der Plattensteifigkeit K vom KB.

$$K = \frac{E}{12} \cdot \frac{h^3}{1-\mu^2}$$

Dort ist von vornherein $b = 1$ angenommen. Diese Annahme zieht sich durch alle Berechnungsgrundlagen.

7.2 Nachweis $r_m \gg h$ **Anhang II**

Es ist zu zeigen, dass gilt:

$$r_m \gg h$$

Für r_m ist eine Berechnungsgrundlage bekannt.

$$r_m = 8 \cdot \frac{E \cdot I}{q \cdot L^2}$$

\Rightarrow

$$8 \cdot \frac{E \cdot I}{q \cdot L^2} \gg h$$

Der Nachweis erfolgt dann am konkreten Beispiel.

Vorliegend für die Schalentheorie ist der Nachweis erfüllt.

$$8 \cdot \frac{210000 \cdot 11,73 \cdot 10^6}{5000 \cdot 10^{-3} \cdot 5000^2} = 157651 \gg 112$$

L^AT_EX 2_ε