

Knicken nach Euler-Tetmajer.

–

Das λ -Verfahren.

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 28. Januar 2020 – Letzte Revision: 27. Januar 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Knicken nach Euler-Tetmajer - Vorbetrachtungen	3
1.1 Fallunterscheidungen	3
1.2 Knickartgrenzen	4
2 Knicken nach Euler-Tetmajer - Beispiel	5
2.1 Bemessung	5
2.2 Nachweise	6
3 Anhang	7
3.1 Anhang a: Materialeigenschaften	7
3.2 Anhang b: Sicherheiten	8
3.3 Anhang c: Tetmajer-Koeffizienten a und b	9
3.4 Anhang d: Tetmajer-Koeffizienten k_1 und k_2	10
3.5 Anhang e: Historische Tetmajer-Koeffizienten	11

Literatur

[Dip] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Das Omega-Verfahren.

[IS03] Einführung in die Technische Mechanik István Szabó. Knicken, 8. neu bearbeitete Auflage 1975 Nachdruck 2003. ISBN 3-540-44248-0.

[Kab] Karlheinz Kabus. Mechanik und Festigkeitslehre.

1 Knicken nach Euler-Tetmajer - Vorbetrachtungen

Die vorliegende Ausarbeitung beschäftigt sich mit Tetmajer aus akademischer Sicht. Daher weichen die im folgenden Text angegebenen Koeffizienten von denen in den üblichen Bautabellen ab.

Vorbetrachtungen

Hinweis

Siehe dazu auch unter Anhang c.

1.1 Fallunterscheidungen

Nachweis ist in drei Fällen vorliegend, dabei ist die Schlankheit λ fallunterscheidend.

[IS03][Kab]

- $\lambda_P < \lambda < \infty$ - **Elastisches Knicken nach Euler**

Die maximal zulässige Knickspannung:

$$\sigma_{max} = \pi^2 \cdot \frac{E}{\lambda^2}$$

Vorhandene Knickspannung:

$$\sigma_{vorh} = \frac{F}{A}$$

Nachweis:

$$\sigma_{vorh} \cdot S_{K,E} \leq \sigma_{max}$$

Mit dem Knicksicherheitsfaktor $S_{K,E}$.

- $\lambda_F < \lambda \leq \lambda_P$ - **Plastisches Knicken nach Tetmajer**

Die maximal zulässige Knickspannung:

$$\sigma_{max} = a - b \cdot \lambda$$

Wobei a und b werkstoffspezifische Werte darstellen.

Vorhandene Knickspannung:

$$\sigma_{vorh} = \frac{F}{A}$$

Nachweis:

$$\sigma_{vorh} \cdot S_{K,T} \leq \sigma_{max}$$

Mit dem Knicksicherheitsfaktor $S_{K,T}$.

- $0 < \lambda \leq \lambda_F$ - **Quetschen**

Die maximal zulässige Druckspannung:

$$\sigma_{F,max} = \frac{\sigma_F}{S_F} \quad \text{oder} \quad \sigma_{B,max} = \frac{\sigma_B}{S_B}$$

Mit dem Sicherheitsfaktor S_F für Fließen oder S_B für Druckfestigkeit.

Vorhandene Druckspannung:

$$\sigma_{vorh} = \frac{F}{A}$$

Nachweis:

$$\sigma_{vorh} \cdot S_F \leq \sigma_{F,max} \quad \text{oder} \quad \sigma_{vorh} \cdot S_B \leq \sigma_{B,max}$$

Grenzen

1.2 Knickartgrenzen

Die Grenzwerte und Koeffizienten sind nicht festgeschrieben, sie können je nach Quelle abweichend sein.

- Die Knickartgrenze λ_P ist berechenbar durch:

$$\lambda_P = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_P}} \approx \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{0,8 \cdot \sigma_F}}$$

Mit:

Baustahl	σ_P [Nmm ⁻²]	σ_F [Nmm ⁻²]	λ_P
ST37	190	240	104
ST52	290	360	85

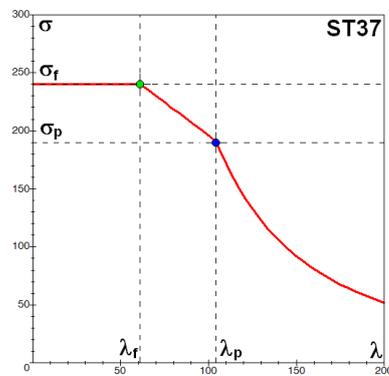
- Die Knickartgrenze λ_F ist berechenbar durch:

$$\lambda_F = \frac{a - \sigma_F}{b}$$

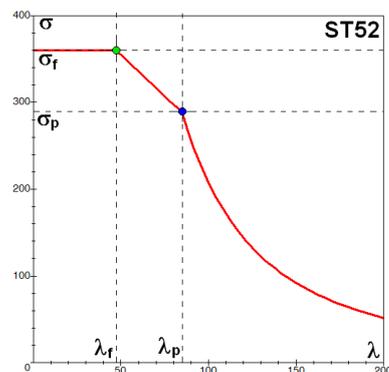
Mit:¹

Baustahl	a [Nmm ⁻²]	b [Nmm ⁻²]	σ_F [Nmm ⁻²]	λ_F
ST37	310	1,14	240	61
ST52	450	1,90	360	47

- Die grafische Darstellung für ST37:



- Die grafische Darstellung für ST52:

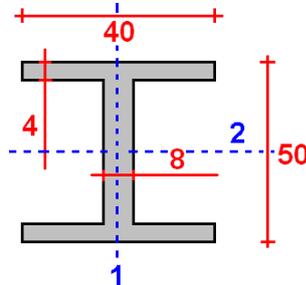


¹Tetmajer-Koeffizienten ohne Sicherheiten angegeben.

2 Knicken nach Euler-Tetmajer - Beispiel

2.1 Bemessung

Gegeben ist ein Profil folgender Form, eine Stablänge 500mm, ein Knickfall 2 nach Euler und eine einwirkende Kraft von 120kN. Die Trägheitsmomente sind berechenbar über:



Bemessung

$$I_1 = 2 \cdot \frac{40^3 \cdot 4}{12} + \frac{8^3 \cdot (50 - 2 \cdot 4)}{12} = 44.459 \text{mm}^4 = I_{\min}$$

Und:

$$I_2 = 2 \cdot \frac{40 \cdot 4^3 + 40 \cdot 4 \cdot \left(\frac{50}{2} - \frac{4}{2}\right)}{12} + \frac{8 \cdot (50 - 2 \cdot 4)^3}{12} = 50.432 \text{mm}^4 = I_{\max}$$

Der dazugehörige Trägheitsradius beträgt:

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{44.459}{2 \cdot 40 \cdot 4 + (50 - 2 \cdot 4) \cdot 8}} = 8,23 \text{mm}$$

Für den angenommenen Knickfall 2 nach Euler (gelenkig, gelenkig) ergibt sich eine Knicklänge s_k aus der gewählten Stablänge $l = 500 \text{mm}$ von:

$$s_k = \frac{l}{1} = \frac{500}{1} = 500 \text{mm}$$

Die Schlankheit λ kann berechnet werden:

$$\lambda = \frac{s_k}{i_{\min}} = \frac{500}{8,23} = 60,75$$

Der Nachweis erfolgt über plastisches Knicken nach Tetmajer und (oder) reine Druckbelastung (Quetschen).

Bei einer Profilbeanspruchung mit $F = 120 \text{kN}$ kommt es in diesem zu einer vorhandenen Spannung σ_{vorh} von:

$$\sigma_{vorh} = \frac{F}{A} = \frac{120.000}{2 \cdot 40 \cdot 4 + (50 - 2 \cdot 4) \cdot 8} = 183 \text{Nmm}^{-2}$$

Die maximal zulässige Knickspannung ist errechenbar.

$$\sigma_{max} = a - b \cdot \lambda = 310 - 1,14 \cdot 60,75 = 240,7 \text{Nmm}^{-2}$$

Für das Quetschen sind ebenfalls die Maximalspannungen vorgegeben.

$$\sigma_{F,max} = 240 \text{Nmm}^{-2} \quad \sigma_{B,max} = 360 \text{Nmm}^{-2}$$

Die Sicherheit soll mit $S = 1,5$ als ausreichend angesehen werden.

Nachweise

2.2 Nachweise

- **Plastisches Knicken nach Tetmajer**

$$\sigma_{vorh} \cdot S_{K,T} \leq \sigma_{max}$$

⇒

$$183 \cdot 1,5 = 274,5 \text{Nmm}^{-2} > 240,7 \text{Nmm}^{-2}$$

Nicht erfüllt!

Das Profil ist zu 14% überlastet.

- **Quetschen**

$$\sigma_{vorh} \cdot S_F \leq \sigma_{F,max}$$

$$\sigma_{vorh} \cdot S_B \leq \sigma_{B,max}$$

⇒

$$183 \cdot 1,5 = 274,5 \text{Nmm}^{-2} > 240 \text{Nmm}^{-2}$$

$$183 \cdot 1,5^2 = 411,8 \text{Nmm}^{-2} > 360 \text{Nmm}^{-2}$$

Nicht erfüllt!

Das Profil ist in beiden Nachweisen zu 14% überlastet.

3 Anhang

Anhang a

3.1 Anhang a: Materialeigenschaften

Charakteristische Größe [Nmm ⁻²]	ST37 \cong S235	ST52 \cong S335
Proportionalitätsgrenze Dehngrenze σ_P, R_P	190	290
Streckgrenze Fließgrenze $\sigma_F, R_e, f_{y,k}$	240	360
Zugfestigkeit $\sigma_B, R_m, f_{u,k}$	360	510

Bandbreiten nach Materialdicke [Nmm ⁻²]	ST37 \cong S235	ST52 \cong S335
Streckgrenze Fließgrenze $\sigma_F, R_e, f_{y,k}$	215 ... 240	315 ... 360
Zugfestigkeit $\sigma_B, R_m, f_{u,k}$	340 ... 470	490 ... 630

Anhang b

3.2 Anhang b: Sicherheiten

	Stahlbau	Maschinenbau
Euler	3,0	5 bis 10
Tetmajer	1,5	3 bis 7,5

3.3 Anhang c: Tetmajer-Koeffizienten a und b

Anhang c

Wieso gibt es unterschiedliche Tetmajer-Koeffizienten für ein und dasselbe Material in der Literatur?

- Weil verschiedene Darstellungsformen der Tetmajer-Geraden gibt, siehe Anhang d.
- Weil manche mit und manche ohne Sicherheiten angegeben sind.
- Weil die Koeffizienten aufwändig experimentell ermittelt wurden und daher Mittelwerte darstellen.
- Weil der Ingenieur die Grenzen zwischen den einzelnen Versagensfällen zu genau nimmt.
- Weil die Tetmajer-Gerade keine Gerade ist.
- ...

Für verschiedenste Materialien angewandt, ist die Tetmajer-Gerade streng genommen eine Parabel der Form

$$\sigma = a + b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2$$

mit $c \approx 0 \rightarrow c \stackrel{!}{=} 0$ für die gebräuchlichen Baustähle². Mit der Kenntnis von $P_F(\lambda_F, \sigma_F)$ und $P_P(\lambda_P, \sigma_P)$ sind jedoch die Koeffizienten a und b vollständig definiert. Daher braucht es dort keiner aufwändiger Experimente zum Ermitteln der Koeffizienten. Methodisch besser war es, die Werte λ_F und λ_P experimentell zu ermitteln und diese als Mittelwert zu nutzen. Das Ergebnis wird dann gern gottgegeben, als *solum possibilitate*³ angesehen. Der Baustahl selbst, wie bei jedem Naturprodukt, sieht das nicht so streng. Für ST37 genügt es durchaus, den plastischen Knickbereich (Tetmajer-Gerade) mit $60 < \lambda < 115$ nach [Dip] für ST37 anzugeben, ohne eine Nichtverletzung der Allgemeingültigkeit nachweisen zu müssen. Die Änderung des Intervalls hat aber durchaus größere Auswirkung auf die Regression von a und b . Werden dann noch Sicherheiten mit einberechnet, sind unterschiedliche Angaben der Koeffizienten vorprogrammiert. Eine Plausibilitätskontrolle ist immer angebracht, wie zum Beispiel, dass an den Punkten P_F und P_P keine Sprünge (Unstetigkeiten) im Graf auftreten. Ein kritischer Blick ist zu jeder Zeit angebracht.

Weiterführend siehe unter [Dip]. Dort ist die Entwicklung einer Berechnungsmöglichkeit der Tetmajer-Parabel ausführlich dargestellt.

²Nach den hier festgelegten Konventionen gilt nach [Dip]:

$c_{ST37} = -0,0136$

$c_{ST52} = -0,0289$

³lat., die einzige Möglichkeit, auch Ultima Ratio

3.4 Anhang d: Tetmajer-Koeffizienten k_1 und k_2

Die ursprüngliche Darstellung der Tetmajer-Parabel beinhaltete die Koeffizienten k_1 und k_2 .

$$\sigma = a + b \cdot \lambda + c \cdot \lambda^2$$

⇒

$$\sigma = a \cdot \left(1 + \frac{b}{a} \cdot \lambda + \frac{c}{a} \cdot \lambda^2 \right)$$

⇒

$$\sigma = \sigma_F \cdot (1 + k_1 \cdot \lambda + k_2 \cdot \lambda^2)$$

⇒

Werkstoff	λ_{MIN}	σ_F [Nmm ⁻²]	k_1	k_2
Weicher Stahl	105	310	0,00368	0,00000
Mittelharter Stahl	89	335	0,00185	0,00000
Nickelstahl	86	470	0,00490	0,00000
Grauguss	80	776	0,01546	0,00007
Kiefernholz	100	293	0,00662	0,00000

3.5 Anhang e: Historische Tetmajer-Koeffizienten

Anhang e

Material	a [kg · cm ⁻²]	b [kg · cm ⁻²]	Gültigkeitsbereich
Gusseisen	7760	120	$0 \leq \lambda \leq 80$
St 37	2400	0	$0 \leq \lambda \leq 60$
St 37	2890	8,175	$60 < \lambda \leq 100$
St 48	3120	0	$0 \leq \lambda \leq 60$
St 48	4690	26,175	$60 < \lambda \leq 100$
St 52	3600	0	$0 \leq \lambda \leq 60$
St 52	5890	38,175	$60 < \lambda \leq 100$
Niedriglegierter Stahl	4700	23,05	$0 \leq \lambda \leq 86$
Nadelholz	300	2,00	$0 \leq \lambda \leq 100$

L^AT_EX 2_ε

