

Knicken nach Theorie II. Ordnung - Verschiebliche Einspannung -

Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 17. Dezember 2012 – Letzte Revision: 12. April 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Abschätzung	4
3	Herleitung	5
3.1	Arbeitsformel	5
3.2	Randbedingungen	6
3.3	Verzweigungskraft	7
3.4	Auslenkung	8
3.5	Fallunterscheidungen	9

Literatur

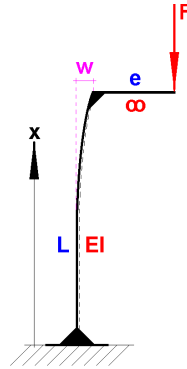
[Dip12] Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc. Die Verformungstheorie I., II. und III. Ordnung.
www.Zenithpoint.de, November 2012.

1 Einleitung

Die Verzweigungs- bzw. die Knickkraft eines Eulerstabes mit verschieblicher Einspannung soll hergeleitet werden. In der Literatur wurde der Lösungsweg bereits zahlreich aufgezeigt und bräuchte daher eigentlich nicht mehr beschrieben werden. Im kleinen Unterschied soll das Modell aus [Dip12] hier genutzt werden.

Einleitung

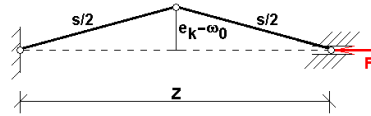
Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass die hier beschriebenen Berechnungsgrundlagen einem Spezialfall unterworfen sind und daher nicht als allgemeingültig angesehen werden können.



2 Abschätzung

Abschätzung

Zuerst erfolgt eine Abschätzung für e_K der Auslenkung für Knicken anhand eines stark vereinfachten Modells.



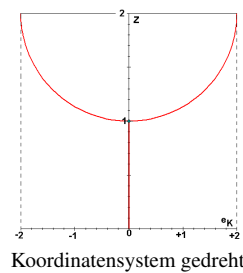
Gegeben ist eine veränderliche Länge Z infolge eines zweigeteiligen Stabes mit der (Bogen)Länge s . Eine Berechnungsgrundlage für e_K ist gesucht. s ist berechenbar durch:

$$s = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{Z}{2}\right)^2 + (e_K - w_0)^2} = \sqrt{Z^2 + 4 \cdot (e_K - w_0)^2}$$

Die Imperfektion w_0 muss anfänglich abgezogen werden von e_K . Sie ist jedoch Voraussetzung für ein Knicken des Stabes. Es wird nach e_K umgestellt.

$$e_K = w_0 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 - Z^2}$$

⇒



Ein Taylorisieren bringt Vergleichbarkeit.

$$e_K = (w_0 - 1) + \sum_{i=1}^{+\infty} (c_{2i} \cdot Z^{2i})$$

Die Koeffizienten c_{2i} bestimmen das Verhalten des Knickversagens.

3 Herleitung

3.1 Arbeitsformel

An einem verformten Stab kann eine Gleichgewichtsbedingung hergestellt werden aus Biegemoment M und einer angreifenden Druckkraft F .

Arbeitsformel

$$M(x) = F \cdot w(x)$$

Für das Biegemoment wird aus [Dip12] die Grundlage Theorie I. Ordnung genutzt – Absatz 3.2.

$${}_I M(x) = -E \cdot I \cdot {}_I w''(x)$$

Durch das Einsetzen in die Arbeitsformel erhält man eine lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung und somit die Möglichkeit nach Theorie 2. Ordnung rechnen zu können.

$$-E \cdot I \cdot {}_I w''(x) = F \cdot {}_I w(x)$$

⇒

$${}_I I w''(x) + \frac{F}{E \cdot I} \cdot {}_I I w(x) = 0$$

Die Biegelinie ${}_I I w(x)$ und die 2. Ableitung der Biegelinie ${}_I I w''(x)$ sind bekannt aus [Dip12] - Absatz 4.2

$${}_I I w(x) = \chi \cdot \varepsilon \cdot \left(\sin \frac{x}{\varepsilon} - \frac{x}{\chi \cdot \varepsilon} - \tan \left(\frac{e}{\chi \cdot \varepsilon} \right) \cdot \left(\cos \frac{x}{\varepsilon} - 1 \right) \right)$$

Mit:

$$\chi = \sqrt{\frac{e}{e + w_0}} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{E \cdot I}{F}}$$

Im Gegensatz zum Modell aus [Dip12] ist die Außermittigkeit der Kraft F sehr klein, so dass der $\tan(\bullet)$ als rund Null angesehen werden kann. So vereinfacht sich ${}_I I w(x)$ erstmalig.

$${}_I I w(x) = \chi \cdot \varepsilon \cdot \sin \frac{x}{\varepsilon} - x$$

Die 2. Ableitung dazu.

$${}_I I w''(x) = -\frac{\chi}{\varepsilon} \cdot \sin \frac{x}{\varepsilon}$$

Eingesetzt in die Arbeitsformel ergibt sich damit endgültig:

$$\frac{\chi}{\varepsilon} \cdot \sin \frac{x}{\varepsilon} - \frac{F}{E \cdot I} \cdot \left(\chi \cdot \varepsilon \cdot \sin \frac{x}{\varepsilon} - x \right) = 0$$

Wenn $F/(E \cdot I) = 1/\varepsilon^2$ angesetzt wird.

$$\frac{x}{\varepsilon} = 0$$

Das impliziert die Annahme, dass das F in ε ein anderes F ist, als in $F/E \cdot I$. Was auch der Fall ist und Grundlage der Ermittlung der Verzweigungskraft F_k .

$$\frac{E \cdot I}{F} = \varepsilon^2 \quad \frac{E \cdot I}{F_K} = \varepsilon_K^2$$

3.2 Randbedingungen

Randbedingungen

Aus der vereinfachten Arbeitsformel können die Randbedingungen definiert werden. So soll an der Fußspannung hier gelten:

$$IIw'(x) = 0$$

Das ist dann der Fall, wenn:

$$\chi = 1 = \sqrt{\frac{e}{e + w_0}} \rightarrow w_0 = 0 \rightarrow e \gg 0$$

$e \gg 0$ was aber der Vereinfachungsforderung für $\tan(\bullet)$ widerspricht.

Die zweite Randbedingung verlangt:

$$IIw''(L) = 0$$

Das ist dann erfüllt, wenn:

$$L = \pi \cdot \varepsilon$$

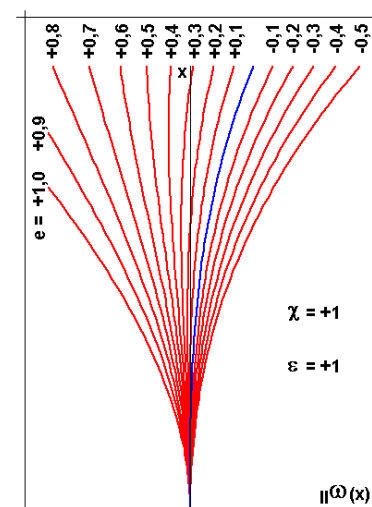
⇒

$$\frac{L}{\pi} = \varepsilon$$

Da das für den ausgelenkten Zustand gilt, ist:

$$\varepsilon_K = \frac{L}{\pi}$$

⇒



Die Biegelinie in Abhängigkeit von e mit
 $e = 0$ (Vereinfachte Berechnungsgrundlage)

Wobei für vorliegenden Fall e nur sehr kleine Werte annehmen soll.

3.3 Verzweigungskraft

Dazu wird die Arbeitsformel nach F umgestellt.

Verzweigungskraft

$$F = E \cdot I \cdot \frac{\chi}{\varepsilon} \cdot \frac{\sin \frac{x}{\varepsilon}}{\chi \cdot \varepsilon \cdot \sin \frac{x}{\varepsilon} - x}$$

Interessant ist die Verzweigungskraft, welche am Stabende, an der Stelle L angreift. Die Verzweigungskraft ist die Last, welche obigen Ausdruck Null werden lässt (Randbedingung der Differentialgleichung $IIW(L)$). Das ist erzwingbar, indem der Zähler des Ausdrucks Null gesetzt wird.¹

$$\sin \frac{L}{\varepsilon} = 0$$

⇒

$$\frac{L}{\varepsilon} = n \cdot \pi$$

Mit:

$$n \in N_0$$

Der Nenner, das ε wird resubstituiert.

$$\frac{L^2}{E \cdot I} \cdot F = n^2 \cdot \pi^2$$

⇒

$$F = \left(\frac{n \cdot \pi}{L} \right)^2 \cdot E \cdot I$$

Die erste, praktisch relevante Verzweigungskraft ergibt sich dann mit:

$$F_K = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \cdot E \cdot I$$

1

$$F(x) \propto \frac{\sin(x/\varepsilon)}{\chi \cdot \varepsilon \cdot \sin(x/\varepsilon) - x}$$

Mit:

$$F(0) = \frac{1}{\chi - \varepsilon} < 0 \leftarrow \text{Druckkraft}$$

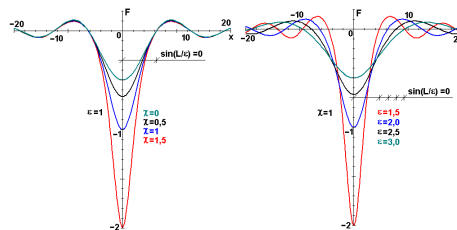
→

$$\chi - \varepsilon < 0$$

→

$$\chi < \varepsilon$$

→



←

$$\chi = \sqrt{\frac{e}{e + w_0}} \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{E \cdot I}{F}}$$

3.4 Auslenkung

Auslenkung

Um die Knickamplitude abschätzen zu können, wird die erste Knicklast in die nach F umgestellte Arbeitsformel eingesetzt und nach χ sortiert.

$$\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot E \cdot I = E \cdot I \cdot \frac{\chi}{\varepsilon} \cdot \frac{\sin \frac{x}{\varepsilon}}{\chi \cdot \varepsilon \cdot \sin \frac{x}{\varepsilon} - x}$$

⇒

$$\chi(x) = Z = \frac{\pi^2 \cdot \varepsilon \cdot x}{(\pi^2 \cdot \varepsilon^2 - L^2) \cdot \sin \frac{x}{\varepsilon}}$$

In χ sind die Imperfektion w_0 enthalten und die Außermittigkeit $\bar{e} \gg 0$ jetzt nach dem Ausknicken und somit nicht zu verwechseln mit $e \approx 0$ vor dem Ausknicken.

$$\sqrt{\frac{e_K - e}{e_K - e + w_0}} = \sqrt{\frac{\bar{e}}{\bar{e} + w_0}} = Z = \frac{\pi^2 \cdot \varepsilon \cdot x}{(\pi^2 \cdot \varepsilon^2 - L^2) \cdot \sin \frac{x}{\varepsilon}}$$

⇒

$$\bar{e} = w_0 \cdot \frac{Z^2}{1 - Z^2} = w_0 \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} Z^{2i}$$

Mit:²

$$-1 < Z < +1$$

⇒

$$\frac{L^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon} - 1 < \frac{x}{\sin \frac{x}{\varepsilon}} < 1 - \frac{L^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

⇒

$$\frac{E \cdot I}{F_K} \cdot \frac{1}{\varepsilon} - 1 < \frac{x}{\sin \frac{x}{\varepsilon}} < 1 - \frac{E \cdot I}{F_K} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

⇒

$$\frac{\varepsilon_K^2}{\varepsilon} - 1 < \frac{x}{\sin \frac{x}{\varepsilon}} < 1 - \frac{\varepsilon_K^2}{\varepsilon}$$

Mit $\varepsilon_K = L/\pi$. Da letztendlich $\bar{e} = e_K - e$ ergibt sich für die Auslenkung infolge Knicken e_K :

$$e_K = w_0 \cdot \frac{Z^2}{1 - Z^2} + e$$

2

$$Z(0) = \lim_{x \rightarrow 0} Z = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin \frac{x}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

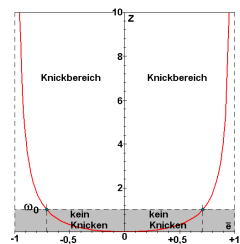
→

$$\bar{e}(0) = w_0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Z^2}{1 - Z^2} = w_0 \cdot \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}$$

→

$$Z_{min}^2 = \varepsilon_{min}^2 = \frac{1}{2} \quad \leftarrow \text{darunter kein Knicken}$$

⇒



Koordinatensystem gedreht

3.5 Fallunterscheidungen

Gesucht ist der Fall:

$$w_0 \cdot \frac{Z^2}{1 - Z^2} + e = w_0$$

→

$$Z = \pm \sqrt{e - w_0}$$

- **Fall 1**, 2 reelle Lösungen, stabil, praktisch nicht relevant:

$$e - w_0 > 0$$

→

$$e > w_0$$

- **Fall 2**, 1 reelle Lösungen, stabil, praktisch vorkommend:

$$e - w_0 = 0$$

→

$$e = w_0$$

- **Fall 3**, 0 reelle Lösungen, instabil, nicht nutzbar:

$$e - w_0 < 0$$

→

$$e < w_0$$

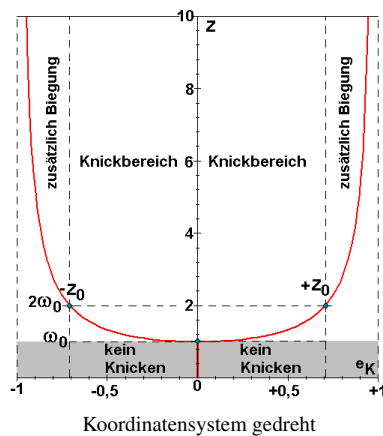
Unter Nutzung des 2. Falles ergibt sich dann für e_K :

$$e_K = w_0 \cdot \frac{Z^2}{1 - Z^2} + w_0$$

→

$$e_K = w_0 \cdot \frac{1}{1 - Z^2} = w_0 \cdot \left(1 + \sum_{i=1}^{+\infty} Z^{2i} \right)$$

⇒



Fallunter-
scheidungen

LaTeX 2 ϵ