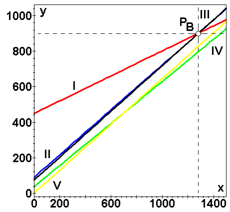
Reduzierte Lineare Regression



Fehlen von Anstieg oder Inhomogenität
Hinzufügen eines definierten Punktes

Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 10. Juni 2017 – Letzte Revision: 8. November 2024

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[Dipa] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten über die Hauptkomponentenanalyse.

[Dipb] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. (Polynom)Regression von Datenpunkten.

---

1 Lineare Regression ohne Anstieg

Ziel ist die Herleitung der Durchführung einer Linearen Regression **ohne Anstieg** a. So gilt allgemein für eine lineare Funktion:

$$y = a \cdot x + b$$

$\Rightarrow$

$$y = b$$

1.1 Nach der Methode der kleinsten Quadrate - MKQ

Ziel ist es, die Fehlerfunktion F zu minimieren. Die Herleitung von F ist unter [Dipa] nachzulesen.

$$F(x,a,b) = \left\{y^2\right\} - 2a \cdot \{xy\} - 2b \cdot \{y\} + 2ab \cdot \{x\} + a^2 \left\{x^2\right\} + n \cdot b^2$$

Diese vereinfacht sich für ein $a = 0$ beträchtlich.

$$F(x,b) = \left\{y^2\right\} - 2b \cdot \{y\} + n \cdot b^2$$

Ein Extrema wird gesucht um später ein Minimum nachweisen zu können.

$$\frac{d}{db} F(x,b) = -2 \cdot \{y\} + 2 \cdot n \cdot b = 0$$

$\Rightarrow$

$$b = \frac{\{y\}}{n}$$

Der Nachweis, dass ein Minimum gefunden wurde.

$$\frac{d^2}{db^2} F(x,b) = 2 \cdot n > 0$$

Das Minimum wurde gefunden und die Regression ist beendet.

$$y = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$$

1.2 Nach der Methode der Hauptkomponentenanalyse - HKA

Aus der HKA ist eine Darstellung der linearen Funktion der Hauptachse bekannt.

$$y = \underbrace{\frac{V_{YY} - \lambda}{C}}_{a} \cdot x + \underbrace{\bar{y} - \frac{V_{YY} - \lambda}{C} \cdot \bar{x}}_{b}$$

Die Herleitung und Bedeutung ist nachzulesen unter [Dipb].

Es soll $a = 0$ gesetzt werden.

$$\frac{V_{YY} - \lambda}{C} = 0$$

$\Rightarrow$

$$y = \bar{y} = \frac{\{y\}}{n}$$

Damit ist b bekannt und die Regression beendet.

$$y = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i$$

2 Lineare Regression ohne Inhomogenität

Ziel ist die Herleitung der Durchführung einer Linearen Regression **ohne Inhomogenität** b. So gilt allgemein für eine lineare Funktion:

$$y = a \cdot x + b$$

$\Rightarrow$

$$y = a \cdot x$$

2.1 Nach der Methode der kleinsten Quadrate - MKQ

Ziel ist es, die Fehlerfunktion F zu minimieren. Die Herleitung von F ist unter [Dipa] nachzulesen.

$$F(x,a,b) = \left\{y^2\right\} - 2a \cdot \{xy\} - 2b \cdot \{y\} + 2ab \cdot \{x\} + a^2 \left\{x^2\right\} + n \cdot b^2$$

Diese vereinfacht sich für ein $b = 0$ beträchtlich.

$$F(x,a) = \left\{y^2\right\} - 2a \cdot \{xy\} + a^2 \left\{x^2\right\}$$

Ein Extrema wird gesucht um später ein Minimum nachweisen zu können.

$$\frac{d}{da} F(x,a) = -2 \cdot \{xy\} + 2a \cdot \left\{x^2\right\} = 0$$

$\Rightarrow$

$$a = \frac{\{x \cdot y\}}{\{x \cdot x\}}$$

Der Nachweis, dass ein Minimum gefunden wurde.

$$\frac{d^2}{da^2} F(x,a) = 2 \cdot \left\{x^2\right\} > 0$$

Das Minimum wurde gefunden und die Regression ist beendet.

$$y = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot x$$

2.2 Nach der Methode der Hauptkomponentenanalyse - HKA

Aus der HKA ist eine Darstellung der linearen Funktion der Hauptachse bekannt.

$$y = \underbrace{\frac{V_{YY} - \lambda}{C}}_{a} \cdot x + \underbrace{\bar{y} - \frac{V_{YY} - \lambda}{C} \cdot \bar{x}}_{b}$$

Die Herleitung und Bedeutung ist nachzulesen unter [Dipb].

Es soll $b = 0$ gesetzt werden.

$$\bar{y} - \frac{V_{YY} - \lambda}{C} \cdot \bar{x} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{YY} - \lambda}{C} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$$

Damit ist a bekannt und die Regression beendet.

$$y = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \cdot x$$

3 Lineare Regression mit definierten Punkt

Es soll eine Lineare Regression durchgeführt werden, wobei ein Punkt $P_B\left(x_B, y_B\right)$ unbedingt auf der Regressionsgeraden liegen soll. Grundlage für die Funktion sei die Punkt- Richtungs- Form.

$$\frac{y - y_B}{x - x_B} = a'$$

$\Rightarrow$

$$y = \underbrace{a'}_{a} \cdot x + \underbrace{y_B - a' \cdot x_B}_{b}$$

Damit sind zwei Definitionen der gesuchten Regressionsgeraden möglich.

3.1 Ermittlung der Inhomogenität aus Anstieg

Der Anstieg a wird berechnet aus den Daten der Urliste mittels einer Linearen Regression ohne Inhomogenität b. Diese wird berechnet durch:

$$b = y_B - a \cdot x_B$$

$\Rightarrow$

$$y = a \cdot x + b$$

3.2 Ermittlung des Anstiegs aus Inhomogenität

Die Inhomogenität b wird berechnet aus den Daten der Urliste mittels einer Linearen Regression ohne Anstieg a. Diese wird berechnet durch:

$$a = \frac{y_B - b}{x_B}$$

$\Rightarrow$

$$y = a \cdot x + b$$

4 Beispiel einer reduzierten Linearen Regression

Gegeben sind Datenpunkte aus einer Messung (aus [Dipb] und [Dipa]).

i	$\mathbf{X}_i$	$\mathbf{Y}_i$	$\mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_i$	$\mathbf{X}_i \cdot \mathbf{Y}_i$
1	128	100	16 384	12 800
2	256	250	65 536	64 000
3	440	210	193 600	224 400
4	640	160	409 600	102 400
5	768	400	589 824	307 200
6	896	520	802 816	465 920
7	1 152	750	1 327 104	864 000
8	1 280	900	1 638 400	1 152 000
$\sum$	**5 560**	**3 590**	**5 043 264**	**3 192 720**

Laut Festlegung soll der im 1. Quadranten äußerste Punkt unbedingt auf der Regressionsgeraden liegen.

$$P_B = P_8\,(1280; 900)$$

• **Für den Anstieg** $a' = 0$

Es wird zuerst $a' = 0$ gesetzt. Dadurch ist die Inhomogenität b bekannt und a berechenbar.

$$b = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i = \frac{3590}{8} = 448,75 \qquad \rightarrow \qquad a = \frac{y_B - b}{x_B} = \frac{900 - 448,75}{1280} = 0,3525$$

$\Rightarrow$

$$y_{a'=0} = y_I = 0,3525 \cdot x + 448,75$$

• **Für die Inhomogenität** $b' = 0$ **und MKQ**

Es wird zuerst $b' = 0$ gesetzt. Dadurch ist der Anstieg a bekannt und b berechenbar.

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i \cdot y_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{3192720}{5043264} = 0,6331 \rightarrow b = y_B - a \cdot x_B = 900 - 0,6331 \cdot 1280 = 89,632$$

$\Rightarrow$

$$y_{MKQ,b'=0} = y_{II} = 0,6331 \cdot x + 89,632$$

• **Für die Inhomogenität** $b' = 0$ **und HKA**

Es wird zuerst $b' = 0$ gesetzt. Dadurch ist der Anstieg a bekannt und b berechenbar.

$$a = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} = \frac{3590}{5560} = 0,6457 \qquad \rightarrow \qquad b = y_B - a \cdot x_B = 900 - 0,6457 \cdot 1280 = 73,504$$

$\Rightarrow$

$$y_{HKA,b'=0} = y_{III} = 0,6457 \cdot x + 73,504$$

• Die Regressionsergebnisse der vollständigen Methoden

Aus [Dipb] und [Dipa] sind die Regressionsfunktionen aus den vollständigen Methoden bekannt.

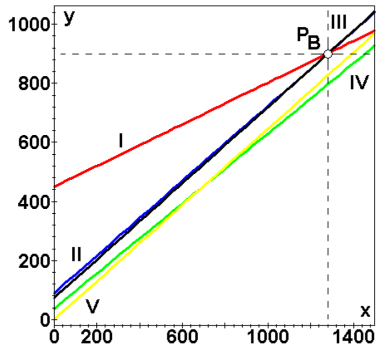
$$y_{MKQ} = y_{IV} = 0,5928 \cdot x + 37,5079$$

Sowie:

$$y_{HKA} = y_V = 0,6457 \cdot x$$

• Grafische Darstellung

Die gefundenen Funktionen grafisch dargestellt.



Dabei stellen folgende Farben die Funktionen y_I, y_{II}, y_{III}, y_{IV}, y_V dar.

LaTeX 2_ε