Die Flächen-, die Linienintegrale und -momente

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler,M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 27. Oktober 2013 – Letzte Revision: 15. September 2020

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Die allgemeinen Flächen-, die Linienintegrale und -momente

1.1 Die Flächenintegrale und -momente

Sind definiert über: [001]

$$A^{(n)} = \int_A x^i \cdot y^j \cdot dA$$

mit:

$$n = i + j$$

Der Summand n stellt den Grad des Flächenintegrales dar.

Flächenintegrale oder auch Flächenmomente n- ten Grades stellen Berechnungs- und Darstellungsmöglichkeiten grundlegender physikalische Eigenschaften bereit.

Grad	i	j	Dimension	Bezeichnung	Bezeichner[1]
0.	0	0	2. z.B. [mm^2]	Querschnittsfläche	A
1.	0	1	3. z.B. [mm^3]	Statisches Flächenmoment um X	S_x
1.	1	0	3. z.B. [mm^3]	Statisches Flächenmoment um Y	S_y
2.	1	1	4. z.B. [mm^4]	Flächenträgheitsmoment biaxial *)	I_{xy}
2.	1	1	4. z.B. [mm^4]	Flächenträgheitsmoment polar	I_p
2.	0	2	4. z.B. [mm^4]	Flächenträgheitsmoment um X	I_x
2.	2	0	4. z.B. [mm^4]	Flächenträgheitsmoment um Y	I_y

Übersicht über die ersten Flächenintegrale

*) auch als Deviationsmoment bekannt

1) unter anderen

1.2 Die Linienintegrale

Linienintegrale sind Flächenintegrale bei der eine (geeignete) Dimension infinitesimal klein ist. Daher ist die Enddimension um eine Dimension kleiner als die der Flächenintegrale.

Grad	i	j	Dimension	Bezeichnung	Bezeichner[2]
0.	0	0	1. z.B. [mm^1]	Querschnittslänge	L
1.	0	1	2. z.B. [mm^2]	Statisches Linienintegral um X	L_x
1.	1	0	2. z.B. [mm^2]	Statisches Linienintegral um Y	L_y

Übersicht über die ersten Linienintegrale

Ihre allgemeine Berechnungsgrundlage lautet:

$$L^{(n)} = \int\limits_L x^i \cdot y^j \cdot dL$$

mit:

$$n = i + j$$

Der Summand n stellt den Grad des Linienintegrals dar.

2) unter anderen

2 Das Flächenmoment 0. Ordnung

2.1 Das Flächenmoment 0. Ordnung $A^{(0)} \rightarrow i = 0; j = 0$

Aus der allgemeinen Darstellung der Flächenintegrale gilt:

$$A = \int_A x^0 \cdot y^0 \cdot dA = \int_A dA$$

$\Rightarrow$

$$A = c \cdot \int_a^b dx = c \cdot x|_a^b$$

$\Rightarrow$

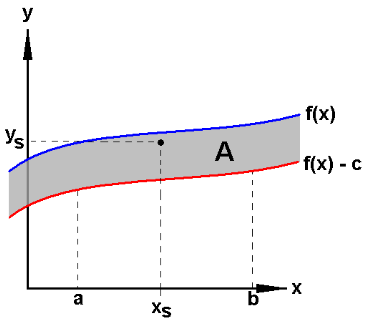
$$A = c \cdot (b - a) = c \cdot \Delta x$$

$\Rightarrow$

$$dA = c \cdot dx$$

2.2 Das Flächenmoment als eine Abhängige von c

Eine Berechnung kann auch über einen, später noch zu benutzenden Ansatz erfolgen mit vorliegendem Modell.



Das benutzte Modell, eine Fläche innerhalb zweier isomorpher Funktionen.

$$A = \int_A f(x) \cdot dx - \int_A (f(x) - c) \cdot dx = \int_A c \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$A = c \cdot \int_a^b dx = c \cdot x|_a^b$$

$\Rightarrow$

$$A = c \cdot (b - a) = c \cdot \Delta x$$

$\Rightarrow$

$$dA = c \cdot dx$$

3 Das Flächenmoment 1. Ordnung

3.1 Das Flächenmoment 1. Ordnung $A^{(1)} \rightarrow i = 0; j = 1$

$$S_x = \int\limits_A y \cdot dA = c_x \cdot \int\limits_{\Delta x} y \cdot f(x) \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$S_x = c_x \cdot \int\limits_a^b y \cdot f(x) \cdot dx$$

Für den allgemeinen Fall ist $c_x = 1$ für vorliegendes Modell gilt $c_x = \frac{1}{2}$ [3]

[3] Der Grund, warum hier ein $\frac{1}{2}$ erscheint, folgt.

3.2 Das Flächenmoment 1. Ordnung $A^{(1)} \to i = 1; j = 0$

$$S_y = \int_A x \cdot dA = c_y \cdot \int_{dx} x \cdot f(x) \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$S_y = c_y \cdot \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx$$

Für den allgemeinen Fall ist $c_y = 1$ für vorliegendes Modell gilt $c_y = 1$

3.3 Flächenintegrale in Bezug auf den Schwerpunkt von A

$$y_S = \frac{S_x}{A}$$

Sowie:

$$x_S = \frac{S_y}{A}$$

4 Übergang zu den Linienintegralen

4.1 Übergang allgemein

Von einer Fläche wird eine Dimension, hier die von c infinitesimal verkleinert.

$$A = \lim_{h \to c} (c - h) \cdot \Delta x$$

4.2 Linienintegrale der Form $L^{(0)} \rightarrow i = 0; j = 0$

Eine Fläche wird nun zur Linie wenn $A \rightarrow L$.

$$A = \int_a^b c \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$L = \lim_{h \to c} (c - h) \cdot \int_a^b dx$$

$\Rightarrow$ [4]

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx$$

[4]Die Erläuterung dieses Schrittes folgt

4.3 Linienintegrale der Form $L^{(1)} \rightarrow i = 0; j = 1$

$$L_x = \int_L y \cdot dL = \int_{\Delta x} y \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$L_x = \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx$$

4.4 Linienintegrale der Form $L^{(1)} \rightarrow i = 1; j = 0$

$$L_y = \int\limits_L x \cdot dL = \int\limits_{\Delta x} x \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$L_y = \int\limits_a^b x \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx$$

4.5 Linienintegrale in Bezug auf den Schwerpunkt von L

$$y_S = \frac{S_x}{L}$$

Sowie:

$$x_S = \frac{S_y}{L}$$

5 Erläuterungen zu den Ausdrücken $\lim$ und c_x, c_y

5.1 Herleitung von dL

Aus dem Flächenmoment 0. Ordnung ist bekannt.

$$dA = c \cdot dx$$

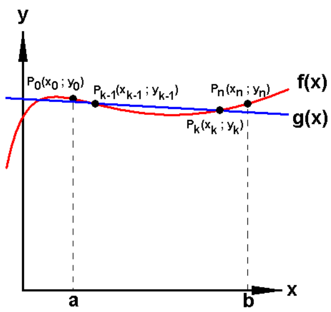
$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}A = c$$

Aus dem Übergang $A \to L$ ergab sich:

$$\frac{d}{dx}L = \lim_{h \to c}(c - h) = ?$$

Dabei steht $\overline{1}$ für die letzte verbliebene Dimension einer Fläche und damit deren Länge. Um die Länge einer Funktion berechnen zu können, wird folgendes Modell genutzt.



Modell zur Ermittlung des Bogendifferentials

Gesucht ist die Bogenlänge der Funktion $f(x)$ in den Grenzen $[a; b]$. Dazu wird eine Zerlegungsfolge linearer Funktionen als Sehnenpolygon in angegebenen Grenzen aufgespannt. Eine Sehne, dargestellt durch $g(x)$ zwischen den Punkten P_{k-1} und P_k wird betrachtet. Die Länge der Sehne ist berechenbar durch:

$$\Delta L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta L = \sqrt{\Delta x^2 \cdot \left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 \cdot \left[1 + \frac{(y_k - y_{k-1})^2}{(x_k - x_{k-1})^2}\right]}$$

$\Rightarrow$

$$\Delta L = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x = \sqrt{1 + \left(\frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right)^2} \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Der Quotient $\Delta y / \Delta x$ wird weiter betrachtet. Der Übergang $\Delta y / \Delta x \to dy/dx$ als Differentialquotient gewährleistet den Übergang vom Sehnenpolygon zur Bogenlänge von $f(x)$.

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}y\right)^2} \cdot dx = \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2} \cdot dx = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx$$

$\Rightarrow$

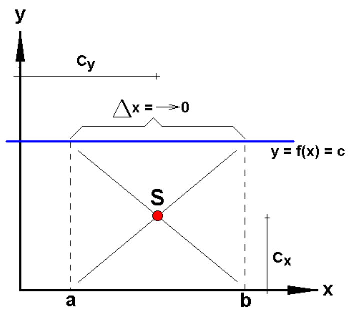
$$dL = \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx \to \quad \frac{d}{dx}L = \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

$\Rightarrow$

$$L = \int \sqrt{1 + f'(x)^2} \cdot dx$$

5.2 Herleitung der Ausdrücke c_x und c_y

Die Herleitung von c_x und c_y ist eine Fallunterscheidung und muss für jede Anwendung überdacht werden. Dazu wird folgendes Modell genutzt.



Grafische Darstellung des Modells
zur Berechnung von c_x und c_y.

Es wird eine Fläche beschrieben zwischen der Funktion $f(x)$ und der Abszisse eines kartesischen Koordinatensystems in den Grenzen a und b. Wobei $\Delta x = b - a$ infinitesimal klein sei und c endlich groß. Die Lage des Schwerpunktes S in Bezug zum Koordinatenursprung $(0;0)$ ergibt für c_x und c_y folgende Beziehungen zu den statischen Flächenmomenten 1. Ordnung.

Der Abstand des Schwerpunktes S zur x- Achse beträgt x_S. Hier:

$$x_S = \frac{c}{2}$$

$\Rightarrow$

$$c_x = \frac{1}{2}$$

Der Abstand des Funktionsgraphen $f(x)$ zur y- Achse beträgt y_S. Daher:

$$y_S = \frac{a+b}{2}$$

Für den Fall, dass $\Delta x = b - a \to 0$ gilt gleichzeitig $a \cong b$ und so:

$$y_S = \frac{2}{2} \cdot a = \frac{2}{2} \cdot b$$

$\Rightarrow$

$$c_y = 1$$

6 Beispiele

6.1 Rechte Konstante

6.1.1 Allgemeiner Fall

- Funktionenaufruf $f(x)$

$$f(x) = k \quad \rightarrow \quad f^2(x) = k^2$$

$\Rightarrow$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad f'^2(x) = 0$$

- Die Bogenlänge L

$$L = \int\limits_0^a \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$L = \int\limits_0^a dx$$

$\Rightarrow$

$$L = a$$

- Die Fläche A

$$A = \int\limits_0^a f(x) \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$A = k \cdot \int\limits_0^a dx$$

$\Rightarrow$

$$A = k \cdot a$$

- Das Statische Flächenmoment S_x

$$S_x = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_0^a y \cdot f(x) \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$S_x = \frac{1}{2} \cdot k^2 \cdot \int\limits_0^a dx$$

$\Rightarrow$

$$S_x = \frac{k^2}{2} \cdot a$$

- Das Statische Flächenmoment S_y

$$S_y = \int\limits_0^a x \cdot f(x) \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$S_y = k \cdot \int\limits_0^a x \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$S_y = \frac{k}{2} \cdot a^2$$

- Der Schwerpunktsabstand x_S

$$x_S = \frac{S_y}{A} = \frac{k}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{1}{k \cdot a}$$

$\Rightarrow$

$$x_S = \frac{a}{2}$$

- Der Schwerpunktsabstand y_S

$$y_S = \frac{S_x}{A} = \frac{k^2}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2 \cdot a}$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{k^2}{4}$$

- Das Statische Linienmoment L_x

$$L_x = \int_0^a y \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$L_x = k \cdot \int_0^a dx$$

$\Rightarrow$

$$L_x = k \cdot a$$

- Das Statische Linienmoment L_y

$$L_y = \int_0^a x \cdot \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$L_y = \int_0^a x \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$L_y = \frac{a^2}{2}$$

- Der Linienschwerpunktsabstand $x_{S;L}$

$$x_{S;L} = \frac{L_y}{L} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{a}$$

$\Rightarrow$

$$x_{S;L} = \frac{a}{2}$$

- Der Linienschwerpunktsabstand $y_{S;L}$

$$y_{S;L} = \frac{L_x}{L} = k \cdot a \cdot \frac{1}{a}$$

$\Rightarrow$

$$x_{S;L} = k$$

6.1.2 Sonderfall

Für dieses Beispiel wird kein Sonderfall untersucht.

6.2 Rechter Parabelast

6.2.1 Allgemeiner Fall

- Funktionenaufruf $f(x)$

$$f(x) = x^2 \quad \rightarrow \quad f(x)^2 = x^4$$

$\Rightarrow$

$$f'(x) = 2 \cdot x \quad \rightarrow \quad f'(x)^2 = 4 \cdot x^2$$

- Die Bogenlänge L

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + 4 \cdot x^2} \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$L = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot a^2} + \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arcsin} h(2 \cdot a)$$

- Die Fläche A

$$A = \int_0^a f(x) \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$A = \int_0^a x^2 \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{a^3}{3}$$

$\Rightarrow$

$$A \approx 0,334 \cdot a^3$$

- Das Statische Flächenmoment S_x

$$S_x = \frac{1}{2} \cdot \int_0^a y \cdot f(x) \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$S_x = \frac{1}{2} \cdot \int_0^a x^2 \cdot x^2 \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$S_x = \frac{a^5}{10}$$

$\Rightarrow$

$$S_x = 0,1 \cdot a^5$$

- Das Statische Flächenmoment S_y

$$S_y = \int_0^a x \cdot f(x) \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$S_y = \int_0^a x \cdot x^2 \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$S_y = \frac{a^4}{4}$$

$\Rightarrow$

$$S_y = 0,25 \cdot a^4$$

- Der Schwerpunktsabstand x_S

$$x_S = \frac{S_y}{A} = \frac{a^4}{4} \cdot \frac{3}{a^3}$$

$\Rightarrow$

$$x_S = \frac{3}{4} \cdot a$$

- Der Schwerpunktsabstand y_S

$$y_S = \frac{S_x}{A} = \frac{a^5}{10} \cdot \frac{3}{a^3}$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{3}{10} \cdot a^2$$

$\Rightarrow$

$$y_S = 0,3 \cdot a^2$$

- Das Statische Linienmoment L_x

$$L_x = \int_0^a y \cdot \sqrt{1 + f'^2\left(x\right)} \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$L_x = \int_0^a x^2 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot x^2} \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$L_x = \frac{a}{16} \cdot \sqrt{\left(1 + 4 \cdot a^2\right)^3} - \frac{a}{32}\sqrt{1 + 4 \cdot a^2} - \frac{1}{64} \cdot \operatorname{arcsin} h\left(2 \cdot a\right)$$

- Das Statische Linienmoment L_y

$$L_y = \int_0^a x \cdot \sqrt{1 + f'^2\left(x\right)} \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$L_y = \int_0^a x \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot x^2} \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$L_y = \frac{1}{12} \cdot \left(\sqrt{\left(1 + 4 \cdot a^2\right)^3} - 1\right)$$

- Der Linienschwerpunktsabstand $x_{S;L}$

$$x_{S;L} = \frac{L_y}{L}$$

$\Rightarrow$

$$x_{S;L} = \frac{1}{6 \cdot a} \cdot \frac{\alpha \cdot \left(1 + 4 \cdot a^2\right) - 2 \cdot a}{\alpha + \beta}$$

Mit:

$$\alpha = 2 \cdot a \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot a^2} \qquad \beta = \operatorname{arcsin} h\left(2 \cdot a\right)$$

- Der Linienschwerpunktsabstand $y_{S;L}$

$$y_{S;L} = \frac{L_x}{L}$$

$\Rightarrow$

$$x_{S;L} = \frac{1}{16} \cdot \frac{\alpha \cdot \left(1 + 8 \cdot a^2\right) - \beta}{\alpha + \beta}$$

Mit:

$$\alpha = 2 \cdot a \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot a^2} \qquad \beta = \operatorname{arcsin} h\,(2 \cdot a)$$

6.2.2 Sonderfall $a = 1$

$$L = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} + \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arcsin} h\,(2) \approx 1,479$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{1}{3} \approx 0,334$$

$\Rightarrow$

$$S_x = \frac{1}{10} = 0,1$$

$\Rightarrow$

$$S_y = \frac{1}{4} = 0,25$$

$\Rightarrow$

$$x_S = \frac{3}{4} = 0,75$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{3}{10} = 0,3$$

$\Rightarrow$

$$L_x = \frac{1}{16} \cdot \sqrt{5^3} - \frac{1}{32}\sqrt{5} - \frac{1}{64} \cdot \operatorname{arcsin} h\,(2) \approx 0,606$$

$\Rightarrow$

$$L_y = \frac{1}{12} \cdot \left(\sqrt{5^3} - 1\right) \approx 0,848$$

$\Rightarrow$

$$\alpha = 2 \cdot \sqrt{5} \approx 4,472 \qquad \beta = \operatorname{arcsin} h\,(2) \approx 1,444$$

$\Rightarrow$

$$x_{S;L} = \frac{1}{6} \cdot \frac{\alpha \cdot 5 - 2}{\alpha + \beta} \approx 0,573$$

$\Rightarrow$

$$x_{S;L} = \frac{1}{16} \cdot \frac{\alpha \cdot 9 - \beta}{\alpha + \beta} \approx 0,410$$

6.3 Oberes Ellipsensegment

6.3.1 Allgemeiner Fall

- Funktionenaufruf $f(x)$ Mittelpunkt im Koordinatenursprung.

$$\frac{y^2}{e^2} + \frac{x^2}{f^2} = 1$$

$\Rightarrow$

$$f(x) = \frac{e}{f} \cdot \sqrt{f^2 - x^2} \quad \rightarrow \quad f(x)^2 = \frac{e^2}{f^2} \cdot \left(f^2 - x^2\right)$$

$\Rightarrow$

$$f'(x) = -\frac{e}{f} \cdot \frac{x}{\sqrt{f^2 - x^2}} = -\frac{e^2}{f^2} \cdot \frac{x}{y} \quad \rightarrow \quad f'^2(x) = \frac{e^2}{f^2} \cdot \frac{x^2}{f^2 - x^2} = \frac{e^4}{f^4} \cdot \frac{x^2}{y^2}$$

- Die Bogenlänge L

$$L = \int\limits_{-f}^{+f} \sqrt{1 + f'^2(x)} \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$L = \int\limits_{-f}^{+f} \sqrt{1 + \frac{e^2}{f^2} \cdot \frac{x^2}{f^2 - x^2}} \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$L = \frac{\pi}{2} \cdot (e + f) \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \lambda^2 + \frac{1}{64} \cdot \lambda^4 + \frac{1}{256} \cdot \lambda^6 + \frac{25}{16384} \cdot \lambda^8 + \ldots\right)$$

Mit:

$$\lambda = \frac{f - e}{f + e}$$

- Die Fläche A

$$A = \int\limits_{-f}^{+f} f(x) \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{e}{f} \cdot \int\limits_{-f}^{+f} \sqrt{f^2 - x^2} \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{\pi}{2} \cdot e \cdot f$$

$\Rightarrow$

$$A \approx 0,667 \cdot e \cdot f$$

- Das Statische Flächenmoment S_x

$$S_x = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{-f}^{+f} y \cdot f(x) \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$S_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^2}{f^2} \cdot \int\limits_{-f}^{+f} \left(f^2 - x^2\right) \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$S_x = \frac{2}{3} \cdot e^2 \cdot f$$

$\Rightarrow$

$$S_x \approx 0,667 \cdot e^2 \cdot f$$

- Das Statische Flächenmoment S_y

$$S_y = \int\limits_{-f}^{+f} x \cdot f\left(x\right) \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$S_y = \frac{e}{f} \cdot \int\limits_{-f}^{+f} x \cdot \sqrt{f^2 - x^2} \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$S_y = 0$$

- Der Schwerpunktsabstand x_S

$$x_S = \frac{S_y}{A}$$

$\Rightarrow$

$$x_S = 0$$

- Der Schwerpunktsabstand y_S

$$y_S = \frac{S_x}{A}$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot e$$

$\Rightarrow$

$$y_S \approx 0,424 \cdot e$$

- Das Statische Linienmoment L_x

$$L_x = \int\limits_{-f}^{+f} y \cdot \sqrt{1 + f'^2\left(x\right)} \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$L_x = \frac{e}{f} \cdot \int\limits_{-f}^{+f} \sqrt{f^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{e^2}{f^2} \cdot \frac{x^2}{f^2 - x^2}} \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$L_x = e^2 + \frac{f^2}{2} \cdot \frac{e}{\sqrt{e^2 - f^2}} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{e^2 - f^2} + e}{e - \sqrt{e^2 - f^2}}\right)$$

$\Rightarrow$

$$L_x = e^2 + \frac{f^2}{2} \cdot \frac{e}{\varepsilon_L} \cdot \ln\left(\frac{\varepsilon_L + e}{e - \varepsilon_L}\right)$$

Mit ε_L der Linearen Exzentrizität

- Das Statische Linienmoment L_y

$$L_y = \int\limits_{-f}^{+f} x \cdot \sqrt{1 + f'^2\left(x\right)} \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$L_y = \int\limits_{-f}^{+f} x \cdot \sqrt{1 + \frac{e^2}{f^2} \cdot \frac{x^2}{f^2 - x^2}} \cdot dx$$

$\Rightarrow$

$$L_y = 0$$

- Der Linienschwerpunktsabstand $x_{S;L}$

$$x_{S;L} = \frac{L_y}{L}$$

$\Rightarrow$

$$x_{S;L} = 0$$

- Der Linienschwerpunktsabstand $y_{S;L}$

$$y_{S;L} = \frac{L_x}{L}$$

6.3.2 Sonderfall $r = e = f$

$$L = \pi \cdot r$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{\pi}{2} \cdot r^2$$

$\Rightarrow$

$$S_x = \frac{2}{3} \cdot r^3$$

$\Rightarrow$

$$S_y = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_S = 0$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{4}{3 \cdot \pi} \cdot r$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{e \to f} S_x = \lim_{e \to f} e^2 + \lim_{e \to f} \frac{f^2}{2} \cdot \frac{e}{\sqrt{e^2 - f^2}} \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{e^2 - f^2} + e}{e - \sqrt{e^2 - f^2}}\right)$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{e \to f} L_x = f^2 + f^2$$

$\Rightarrow$

$$L_x = 2 \cdot r^2$$

$\Rightarrow$

$$L_y = 0$$

$\Rightarrow$

$$x_S = 0$$

$\Rightarrow$

$$y_S = \frac{2}{\pi} \cdot r$$

$\LaTeX\,2_\varepsilon$