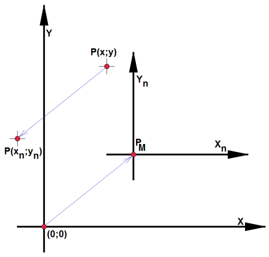
Zentrieren und Rückkippen einer Ellipse, gewonnen aus der Regression nach der Methode der kleinsten Quadrate



Centering and tilting back an ellipse

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 8. Juli 2017 – Letzte Revision: 2. April 2025

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[Dipa] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten - Prinzip MKQ. www.Zenithpoint.de.

[Dipb] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten über die Hauptkomponentenanalyse. www.Zenithpoint.de.

[Dipc] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Ermittlung der abszissen und ordinatenparallelen Ellipse über die Singulärwertzerlegung. www.Zenithpoint.de.

[Rol] Roland Weingärtner, Leon Schiller, Alexander Kinstler, Richard Neumann, Frank Brunner, Eldad Bahat Treidel, Enrico Brusaterra, Matthias Marx, Sven Besendörfer. Impact of Dislocation Networks on Leakage Currents of GaN-on-GaN pn-Diodes: A Statistical Approach Comparing X-Ray Topography with Electrical Characteristics.

1 Einleitung zum Thema

Ziel dieses Arbeitsblattes ist es, die Elliptische Regression über die Methode der kleinsten Quadrate (MKQ) in der Ebene zu vervollständigen. In [Dipa] war am Ende eine unzentrierte und gekippte Ellipse als Ergebnis ermittelt. Diese soll zentriert und zurückgekippt werden. Die Eigenschaften der Varianzen als ein Indikator wird aufgezeigt. Einleitung

Für die weitere Nutzung der in [Dipa] gewonnenen Berechnungsgrundlagen, werden diese auf die Varianz- bzw. Kovarianzdarstellung umgestellt. So gilt für die Anstiege und Inhomogenitäten der Haupt und Nebenachse:

$$a = \frac{\{x\} \cdot \{y\} - n \cdot \{x \cdot y\}}{\{x\}^2 - n \cdot \{x^2\}} \qquad b = \frac{\{x \cdot y\} \cdot \{x\} - \{y\} \cdot \{x^2\}}{\{x\}^2 - n \cdot \{x^2\}}$$

$$c = \frac{n \cdot \{x^2\} - \{x\}^2}{\{x\} \cdot \{y\} - n \cdot \{x \cdot y\}} \qquad d = \frac{\{y\} - c \cdot \{x\}}{n}$$

Folgende Zusammenhänge sind bekannt:

$$\{x\} = n \cdot \overline{x} = x_M \qquad \{y\} = n \cdot \overline{y} = y_M$$

$$\{x \cdot y\} = C \qquad \{x^2\} = V_{XX}$$

Damit ergibt sich letztendlich für a, b, c und d:

$$a = \frac{n \cdot x_M \cdot y_M - C}{n \cdot x_M^2 - V_{XX}} \qquad b = \frac{C \cdot x_M - y_M \cdot V_{XX}}{n \cdot x_M^2 - V_{XX}}$$

$$c = \frac{V_{XX} - n \cdot x_M^2}{n \cdot x_M \cdot y_M - C} \qquad d = y_M - c \cdot x_M$$

Für die zentrierte, jedoch noch gekippte Ellipse gilt dann mit $x_M = y_M = 0$:

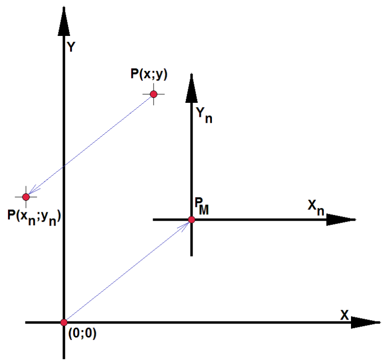
$$a^{x_M = y_M = 0} = +\frac{C}{V_{XX}} \qquad b^{x_M = y_M = 0} = 0$$

$$c^{x_M = y_M = 0} = -\frac{V_{XX}}{C} \qquad d^{x_M = y_M = 0} = 0$$

2 Durchführung der Drehung und Zentrierung

2.1 Verschiebung des Systems in den Ellipsenmittelpunkt $P_M\left(x_M, y_M\right)$

Der erste Schritt ist es, die Ellipse zu zentrieren. Dazu wird das Koordinatensystem in den Mittelpunkt der Ellipse verschoben, Bekannt sind der Mittelpunkt der Ellipse mit $P_M\left(x_M, y_M\right)$ Verschiebung



und

$$x_M = \bar{X} = \frac{\{X_i\}}{n} \qquad y_M = \bar{Y} = \frac{\{Y_i\}}{n}$$

aus der Verschiebung ergeben sich neue Datenpunktangaben $P_i\left(x_i; y_i\right)$ mit:

$$x_n = x - x_M \qquad y_n = y - y_M$$

Beispiel aus [Dipb]:

i	x_i	y_i	x_n	y_n
1	128	100	-567	-349
2	256	250	-439	-199
3	440	510	-255	+61
4	640	160	-55	-289
5	768	400	+73	-49
6	896	520	+201	+71
7	1152	750	+457	+301
8	1280	900	+585	+451
$\sum$	5560	3590	0	≈ 0

Mit:

$$x_M = \frac{5560}{8} = 695 \qquad y_M = \frac{3590}{8} = 449$$

Und aus [Dipb]:

$$V_{XX} = \left(x_i - x_M\right)^2 \qquad C = \left(x_i - x_M\right) \cdot \left(y_i - y_M\right) \qquad V_{YY} = \left(y_i - y_M\right)^2$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 1.179.064 \qquad C = 697.670 \qquad V_{YY} = 550.088$$

$\Rightarrow$

$$a = \frac{C}{V_{XX}} = \frac{697670}{1179064} = 0,5917$$

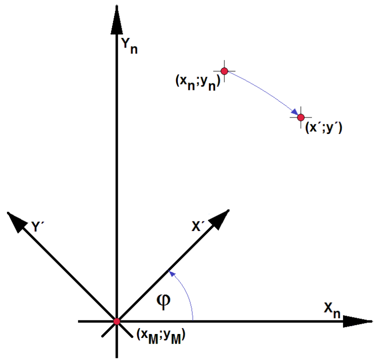
Sowie aus [Dipa]:

$$a = 0,5928$$

2.2 Drehung des Systems auf die Abszisse $Y^{(b=0)}$

Drehung

Die nun zentrierte jedoch noch gekippte Ellipse wird nun abszissenparallel gestellt. Dazu wird der bekannte Kippwinkel φ der Ellipse genutzt. Die Vorzeichen werden so gesetzt, dass eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn ein positives φ erfordert.



$\Rightarrow$

$$x' = x_n \cdot \cos\varphi + y_n \cdot \sin\varphi \qquad y' = y_n \cdot \cos\varphi - x_n \cdot \sin\varphi$$

Auch für den Winkel φ gibt es aus der HKA eine Berechnungsgrundlage.

$$\varphi = \arctan a = \arctan \frac{C}{V_{XX}}$$

$\Rightarrow$

$$x' = \frac{x_n + y_n \cdot a}{\sqrt{1+a^2}} \qquad y' = \frac{y_n - x_n \cdot a}{\sqrt{1+a^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x' = \frac{V_{XX} \cdot x_n + y_n \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}} \qquad y' = \frac{V_{XX} \cdot y_n - x_n \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}}$$

Damit ist die Ellipse zentriert und ungekippt. Das genutzte Beispiel wird weiter entwickelt.

i	x_n	y_n	x'	y'
1	-567	-349	-666	-11
2	-439	-199	-479	+53
3	-255	+61	-188	+183
4	-55	-289	-195	-221
5	+73	-49	+38	-79
6	+201	+71	+209	-41
7	+457	+301	+547	+26
8	+585	+451	+733	+90
$\sum$	0	≈ 0	≈ 0	≈ 0

2.3 Zusammenfassen von Verschiebung und Drehung

Die Berechnungsgrundlagen für die Verschiebung und Drehung können zusammen gefasst werden. Daraus ergeben sich die folgenden Gesamtgleichungen:

$$x_n = x - x_M \qquad y_n = y - y_M$$

Mit:

$$x' = \frac{V_{XX} \cdot x_n + y_n \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}} \qquad y' = \frac{V_{XX} \cdot y_n - x_n \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x' = \frac{V_{XX} \cdot (x - x_M) + (y - y_M) \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}} \qquad y' = \frac{V_{XX} \cdot (y - y_M) - (x - x_M) \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}}$$

2.4 Neuermittlung von Haupt- und Nebenachse $Y^{(\varphi=0°)}, Y^{(\varphi=90°)}$

Achsen

Die allgemeine Berechnungsgrundlage der Haupt- und Nebenachse der Ellipse ist aus [Dipa] gegeben mit:

$$Y^{(\varphi,1)} = a \cdot X + b \qquad Y^{(\varphi,2)} = c \cdot X + d$$

Damit sind die neuen Achsen sämtlichst definiert.

$$Y^{(\varphi=0°)} = a^{(\varphi=0°)} \cdot X + b^{(\varphi=0°)} \qquad Y^{(\varphi=90°)} = c^{(\varphi=90°)} \cdot X + d^{(\varphi=90°)}$$

$\Rightarrow$

$$Y^{(\varphi=0°)} = +\frac{C}{V_{XX}} \cdot X \qquad Y^{(\varphi=90°)} = -\frac{V_{XX}}{C} \cdot X$$

Ideal müsste die Achse $Y^{(\varphi=90°)}$ senkrecht auf $Y^{(\varphi=0°)}$ stehen. Daraus folgt, dass $C \to 0$ gilt mit $V_{XX} \neq 0$. Der Winkel zwischen den Achsen ist demnach ein Indikator der linearen Regression nach der Methode der kleinsten Quadrate.

$$\tan\varphi = -\frac{V_{XX}}{C}$$

2.5 Ermitteln der neuen Ellipsenfunktion $Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)}$

Aus den gewonnen Werten x' und y' kann die Ellipsenfunktion ermittelt werden. Die allgemeine Berechnungsgrundlage aus [Dipa] ist gegeben mit: Ellipse

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = y_M + \frac{B}{A} \cdot (x - x_M) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_M)^2}$$

Der Kippwinkel φ der neugewonnenen Ellipse ist Null, da diese ungekippt nun vorliegt. Gleichzeitig fällt x_M und y_M weg, da die Zentrierung abgeschlossen ist.

$$Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)} = \frac{B}{A} \cdot x \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - x^2}$$

Für ein $\varphi = 0$ ist der Anstieg einer Achse $a = 0$. Für die Koeffizienten A und B ist dann bekannt:

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} \qquad B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2}$$

$\Rightarrow$

$$A^{(\varphi=0)} = f^2 \qquad B^{(\varphi=0)} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)} = \pm \frac{e}{f} \cdot \sqrt{f^2 - x^2}$$

Die Haupt- und die Nebenachse ist definiert.

$$e^2 = \frac{V_{YY}}{n} \qquad f^2 = \frac{V_{XX}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)} = \pm \sqrt{\frac{V_{YY}}{V_{XX}}} \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{n} - x^2}$$

Für vorliegendes Beispiel ergibt sich somit ein $Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)}$ von:

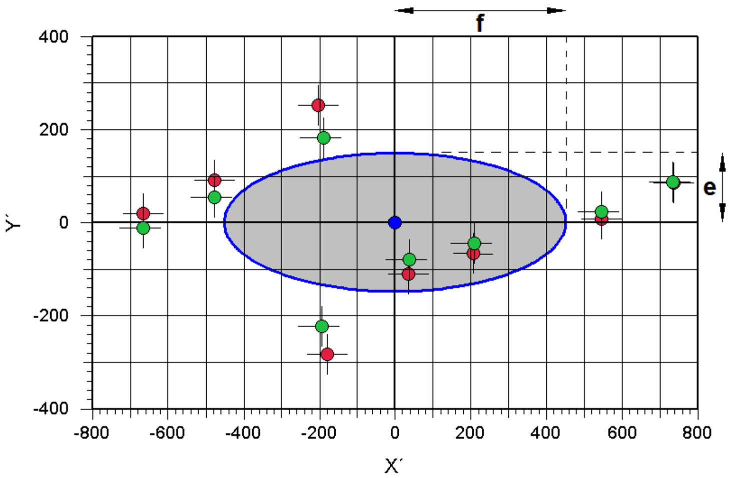
i	x'	y'	x'^2	y'^2	$x' \cdot y'$
1	-666	-11	443.556	121	+7.326
2	-479	+53	229.441	2.809	-25.387
3	-188	+183	35.344	33.489	-34.404
4	-195	-221	38.025	48.841	+43.095
5	+38	-79	1.444	6.241	-3.002
6	+209	-41	43.681	1.681	-8.569
7	+547	+26	299.209	676	+14.222
8	+733	-90	537.289	8.100	+65.970
$\sum$	≈ 0	0	1.627.989	101.958	+59.251

$$V_{XX} = 1.627.989 \qquad V_{YY} = 101.958$$
$$C = C_{XY} = C_{YX} = 59.251$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)} = \pm \sqrt{\frac{101958}{1627989}} \cdot \sqrt{\frac{1627989}{8} - x^2} = \pm \sqrt{12744,75 - 0,0626 \cdot x^2}$$

Die grafische Darstellung dazu folgend, wobei ROT ermittelte Datenpunkte aus der Hauptkomponentenanalyse (HKA) und GRÜN die nach der Methode der kleinsten Quadrate (MKQ) darstellt.



Mit:

$$e = \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} = 112,9 \qquad\qquad f = \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} = 451,1$$

Und:

$$\varphi = -\arctan\frac{V_{XX}}{C} = -87,9^\circ \equiv -0,488 \cdot \pi$$

Aus Interesse soll die gedrehte Kovarianz ermittelt werden. Aus [Dipc] folgt:

$$C^{(\varphi)} = \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \left(\frac{V_{YY}}{n} - \frac{V_{XX}}{n}\right)$$

$\Rightarrow$

$$C^{(\varphi=0)} = 0$$

Die für die Ellipsendrehung verantwortliche gedrehte Kovarianz $C^{(\varphi=0)}$ ist gleich Null.

3 Anhang

3.1 Eigenschaft und Rolle von $\tan\varphi$

Die allgemeine Berechnungsgrundlage der Haupt- und Nebenachse der zentrierten und ungekippten Ellipse ist gegeben mit:

$$Y^{(\varphi=0^\circ)} = \frac{C}{V_{XX}} \cdot X \qquad\qquad Y^{(\varphi=90^\circ)} = -\frac{V_{XX}}{C} \cdot X$$

Der Indikator ist definiert mit:

$$\tan\varphi = -\frac{V_{XX}}{C}$$

Da die Summe ständig positiver Zahlen ein $V_{XX} > 0$ impliziert, für C das jedoch nicht gilt, daher auch den Wert 0 annehmen kann, sind zwei globale Fälle unterscheidbar.

- $\tan\varphi = \pm\infty$

Die Haupt- und die Nebenachse sind orthogonal zueinander. Die Varianzen sind auflösbar / unterscheidbar.

- $\tan\varphi = 0$

Die Haupt- und die Nebenachse sind identisch. Es liegt eine Kreisregression vor. Die Varianzen sind nicht auflösbar / unterscheidbar.

3.2 Zusammenfassung der Berechnungsgrundlagen

Zusammenfassung

Das Verschieben und Drehen eines Datensatzes im Zusammenhang mit der Elliptischen Regression erfolgt durch folgende Berechnungsgrundlage.

$$x' = \frac{V_{XX} \cdot (x - x_M) + (y - y_M) \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}} \qquad y' = \frac{V_{XX} \cdot (y - y_M) - (x - x_M) \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}}$$

Wobei $P_i\,(x_i; y_i)$ den alten Datenpunkt und $P_i\,(x_i'; y_i')$ den neuen darstellt.

Die nun zentrierte und ungekippte Ellipse besitzt die Form:

$$Y_{1;2}^{\prime\,(\varphi'=x'_M=y'_M=0)} = \pm\sqrt{\frac{V'_{YY}}{V'_{XX}}} \cdot \sqrt{\frac{V'_{XX}}{n} - x^2}$$

Mit den Varianzen V'_{XX} und V'_{YY}.

Die Haupt- und Nebenachse besitzen einen Winkel φ'. Dieser ist definiert durch:

$$\tan\varphi' = -\frac{V'_{XX}}{C'}$$

Idealerweise mit dem Wert 90°. Bedeutet, dass die Kovarianz C' des Datensatzes $P_i'\,(x_i'; y_i')$ gegen Null geht. Ist das der Fall, konnten die Varianzen des Originaldatensatzes $P_i\,(x_i; y_i)$ vollständig aufgelöst werden.

4 Beispiele

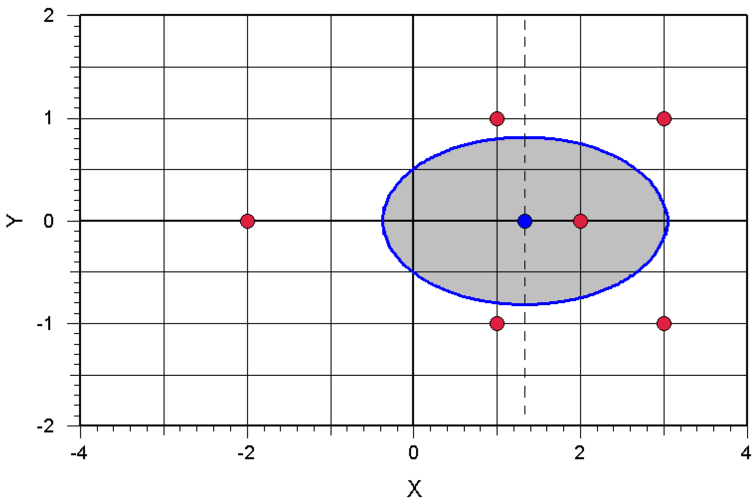
4.1 Beispiel I – vollständige Auflösung

Gegeben ist folgender Datensatz

Beispiel I

i	x_i	y_i	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$	$(x_i - x_M) \cdot (y_i - y_M)$
1	+3	-1	2,778	1	-1,667
2	-2	0	11,112	0	0,000
3	+1	+1	0,112	1	-0,334
4	+1	-1	0,112	1	+0,334
5	+2	0	0,445	0	0,000
6	+3	+1	2,778	1	+1,667
$\sum$	+8	0	17,337	4	0,000

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 17,337 \qquad C = 0 \qquad V_{YY} = 4$$

$\Rightarrow$

$$f = \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} = 1,700 \qquad e = \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} = 0,816$$

Mit:

$$y_H = 0 \qquad x_N = 1,334$$

Bei:

$$x_M = \frac{8}{6} = 1,334 \qquad y_M = \frac{0}{6} = 0$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = 2,890 \qquad B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = y_M + \frac{B}{A} \cdot (x - x_M) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_M)^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \pm 0,480 \cdot \sqrt{2,890 - (x - 1,334)^2}$$

Sowie:

$$\tan \varphi = -\frac{V_{XX}}{C} = -\infty$$

⇒

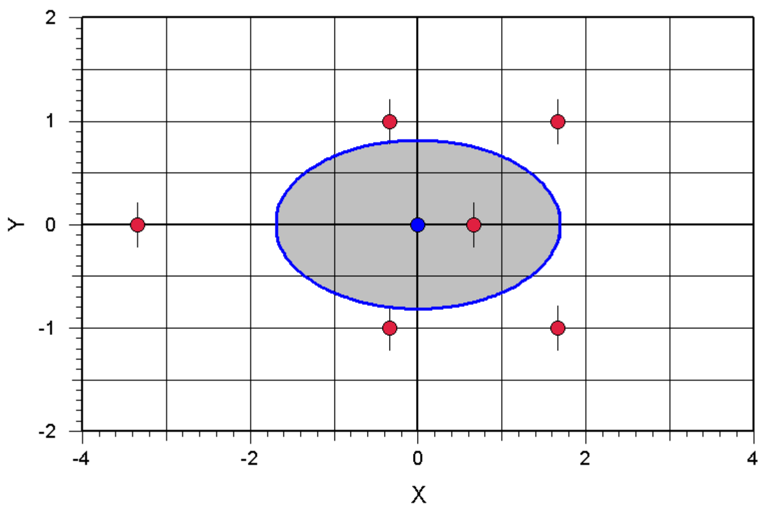
$$\varphi = 90°$$

Damit können die Varianzen vollständig aufgelöst werden.

Die Ermittlung der Werte x' und y'.

i	x_i	y_i	x'_i	y'_i	$(x'_i - x'_M)^2$	$(y'_i - y'_M)^2$	$(x'_i - x'_M) \cdot (y'_i - y'_M)$
1	+3	-1	+1,667	-1	2,779	1	-1,667
2	-2	0	-3,334	0	11,116	0	0,000
3	+1	+1	-0,334	+1	0,112	1	-0,334
4	+1	-1	-0,334	-1	0,112	1	+0,334
5	+2	0	+0,667	0	0,445	0	0,000
6	+3	+1	+1,667	+1	2,779	1	+1,667
$\sum$	+8	0	0	0	17,334	4	0

⇒



⇒

$$V_{XX} = 17,334 \qquad C = 0 \qquad V_{YY} = 4$$

⇒

$$f = \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} = 1,700 \qquad e = \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} = 0,816$$

⇒

$$Y_{1;2}^{(\varphi = x_M = y_M = 0)} = \pm\sqrt{\frac{V_{YY}}{V_{XX}}} \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{n} - x^2}$$

⇒

$$Y_{1;2}^{(\varphi = x_M = y_M = 0)} = \pm 0,480 \cdot \sqrt{2,890 - x^2}$$

Sowie:

$$\tan\varphi = -\frac{V_{XX}}{C} = -\infty \qquad \rightarrow \qquad \varphi = 90°$$

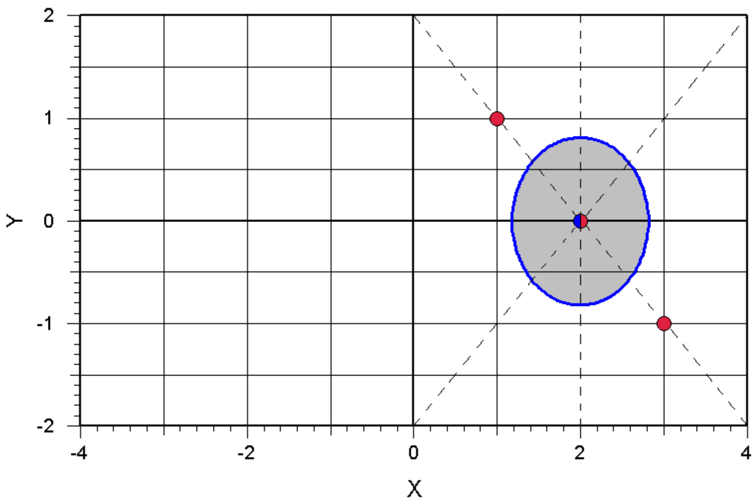
4.2 Beispiel II – unvollständige Auflösung

Gegeben ist folgender Datensatz

Beispiel II

i	x_i	y_i	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$	$(x_i - x_M) \cdot (y_i - y_M)$
1	3	-1	1	1	-1
2	2	0	0	0	0
3	1	+1	1	1	-1
4	1	+1	1	1	-1
5	2	0	0	0	0
6	3	-1	1	1	-1
$\sum$	12	0	4	4	-4

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 4 \qquad C = -4 \qquad V_{YY} = 4$$

Es liegt eine Kreisregression vor.

$$f = \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} = 0,816 \qquad e = \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} = 0,816$$

Mit Linearer Regression – MKQ:

$$y_{H;MKQ} = -x + 2 \qquad y_{N;MKQ} = x - 2$$

Mit Linearer Regression – HKA:

$$y_{H;HKA} = 0 \qquad x_{N;HKA} = 2$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{e^2 + f^2}{2} = 0,667 \qquad B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = \frac{e^2 - f^2}{2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = y_M + \frac{B}{A} \cdot (x - x_M) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_M)^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \pm\sqrt{0,667 - (x-2)^2}$$

Bei:

$$x_M = \frac{12}{6} = 2 \qquad y_M = \frac{0}{6} = 0$$

Sowie:

$$\tan\varphi = -\frac{V_{XX}}{C} = 1$$

$\Rightarrow$

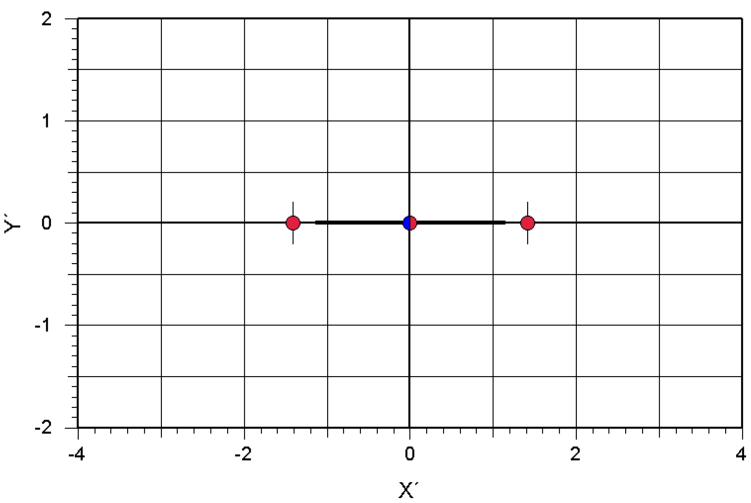
$$\varphi = 45°$$

Damit können die Varianzen nicht aufgelöst werden.

Die Ermittlung der Werte x' und y'.

i	x_i	y_i	x'_i	y'_i	$(x'_i - x'_M)^2$	$(y'_i - y'_M)^2$	$(x'_i - x'_M) \cdot (y'_i - y'_M)$
1	3	-1	$+\sqrt{2}$	0	2	0	0
2	2	0	0	0	0	0	0
3	1	+1	$-\sqrt{2}$	0	2	0	0
4	1	+1	$-\sqrt{2}$	0	2	0	0
5	2	0	0	0	0	0	0
6	3	-1	$+\sqrt{2}$	0	2	0	0
$\sum$	12	0	0	0	8	0	0

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 8 \qquad C = 0 \qquad V_{YY} = 0$$

Es liegt eine Kreisregression vor.

$$f = \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} = 1,155 \qquad e = \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi = x_M = y_M = 0)} = \pm\sqrt{\frac{V_{YY}}{V_{XX}}} \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{n} - x^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi = x_M = y_M = 0)} = 0$$

Sowie:

$$\tan\varphi = -\frac{V_{XX}}{C} = -\infty \qquad \rightarrow \qquad \varphi = 90°$$

4.3 Beispiel III

[Rol]

Nach Messwerten in [Rol] sind in [Dipb] Datenpunkte zu einer Elliptischen Regression angegeben.

i	X_i	Y_i	$(X_i - X_M) \cdot (Y_i - Y_M)$
1	+0, 192 2	-6, 340 0	+0, 123 957
2	+0, 014 9	-7, 213 8	-0, 058 961
3	-0, 208 7	-6, 511 2	-0, 022 972
4	-0, 001 9	-6, 610 3	+0, 015 107
5	+0, 031 8	-6, 565 2	+0, 026 216
6	-0, 008 3	-6, 662 1	+0, 008 872
7	-0, 320 6	-6, 644 1	-0, 021 696
8	-0, 592 7	-7, 436 8	+0, 331 369
8	-0, 893 3	-53, 983 5	+0, 401 892

$X_i \cdot X_i$	$X_i \cdot Y_i$	$(X_i - X_M)^2$	$(Y_i - Y_M)^2$
+0, 036 941	-1, 218 548	+0, 092 333	+0, 166 413
+0, 000 222	-0, 107 486	+0, 016 018	+0, 217 027
+0, 043 556	+1, 358 889	+0, 009 416	+0, 056 045
+0, 000 004	+0, 012 560	+0, 012 048	+0, 018 944
+0, 001 011	-0, 208 773	+0, 020 582	+0, 033 393
+0, 000 069	+0, 055 295	+0, 010 684	+0, 007 368
+0, 102 784	+2, 130 098	+0, 043 655	+0, 010 782
+0, 351 293	+4, 407 791	+0, 231 397	+0, 474 531
+0, 535 880	+6, 429 826	+0, 436 133	+0, 984 503

Woraus sich folgende Werte ergeben:

$$X_m = \frac{\{X_i\}}{n} = \frac{-0,8933}{8} = -0,112 \qquad Y_m = \frac{\{Y_i\}}{n} = \frac{-53,9835}{8} = -6,748$$

Sowie:

$$V_{XX} = \frac{\left\{(X_i - X_m)^2\right\}}{n} = \frac{0,436133}{8} = 0,055$$

$$V_{YY} = \frac{\left\{(Y_i - Y_m)^2\right\}}{n} = \frac{0,984503}{8} = 0,123$$

$$C_{XY} = C_{YX} = C = \frac{\{(X_i - X_m) \cdot (Y_i - Y_m)\}}{n} = \frac{0,401892}{8} = 0,050$$

Damit sind die neuen Werte für X_i' und Y_i' und weitere berechenbar.

i	X_i	Y_i	X_i'	Y_i'
1	+0, 192 2	-6, 340 0	+0, 500	+0, 094
2	+0, 014 9	-7, 213 8	-0, 223	-0, 428
3	-0, 208 7	-6, 511 2	+0, 089	+0, 240
4	-0, 001 9	-6, 610 3	+0, 174	+0, 027
5	+0, 031 8	-6, 565 2	+0, 229	+0, 037
6	-0, 008 3	-6, 662 1	+0, 134	-0, 007
7	-0, 320 6	-6, 644 1	-0, 083	+0, 218
8	-0, 592 7	-7, 436 8	-0, 821	-0, 181
8	-0, 893 3	-53, 983 5	0	0

i	$X'_i \cdot X'_1$	$Y'_i \cdot Y'_i$	$X'_i \cdot Y'_i$
1	+0, 250	+0, 009	+0, 047
2	+0, 050	+0, 184	+0, 095
3	+0, 008	+0, 058	+0, 021
4	+0, 030	+0, 001	+0, 005
5	+0, 053	+0, 001	+0, 008
6	+0, 018	+0, 000	-0, 001
7	+0, 007	+0, 048	-0, 018
8	+0, 673	+0, 033	+0, 148
8	+1, 089	+0, 334	+0, 305

Fortfahrend die zentrierte und ungekippte Ellipse besitzt die Form:

$$V'_{XX} = \frac{\left\{{X'_i}^2\right\}}{n} = \frac{1,089}{8} = 0,136$$
$$V'_{YY} = \frac{\left\{{Y'_i}^2\right\}}{n} = \frac{0,334}{8} = 0,042$$
$$C'_{XY} = C'_{YX} = C' = \frac{\{X'_i \cdot Y'_i\}}{n} = \frac{0,305}{8} = 0,038$$

$\Rightarrow$

$$Y'_{1;2} = \pm 0,556 \cdot \sqrt{0,017 - x^2}$$

Die Winkel $\tan\varphi$ und $\tan\varphi'$ der unzentrierten und der zentrierten Ellipse im Vergleich.

$$\tan\varphi = -\frac{V_{XX}}{C} = -\frac{0,055}{0,050} = -1,100 \qquad \tan\varphi' = -\frac{V'_{XX}}{C'} = -\frac{0,136}{0,038} = -3,579$$

$\Rightarrow$

$$\varphi = -0,833 \equiv -47,726° \qquad \varphi' = -1,298 \equiv -74,389°$$

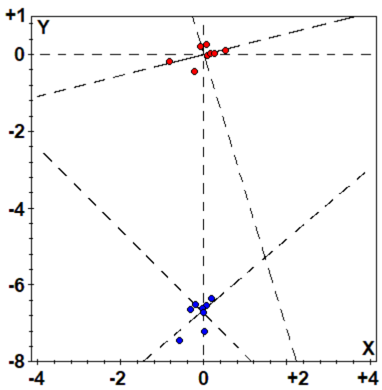
$\Rightarrow$

$$\varphi_\perp = -47,726° + 90° = +42,274° \qquad \varphi'_\perp = -74,389° + 90° = +15,611°$$

Die Korrelation ρ und ρ' dazu.

$$\rho_{XY} = \frac{C}{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}} = \frac{0,050}{\sqrt{0,055 \cdot 0,123}} = 0,608$$
$$\rho'_{XY} = \frac{C'}{\sqrt{V'_{XX} \cdot V'_{YY}}} = \frac{0,038}{\sqrt{0,136 \cdot 0,042}} = 0,503$$

Die grafische Darstellung der durchgeführten Drehung und Zentrierung der Datenpunkte. Wobei blau den originale Datensatz darstellt und rot den gedrehten und zentrierten.



Über [Dipa] ist die unzentrierte Ausgangsellipse bekannt.

$$Y = -6,748 + 0,395 \cdot (X + 0,112) \pm 0,955 \cdot \sqrt{0,086 - (X + 0,112)^2}$$

Die der zentrierten und gedrehten Datenpunkte ist ermittelbar.

$$e^2 = \left\{ Y_i'^2 \right\} = +0,334 \qquad f^2 = \left\{ X_i'^2 \right\} = +1,089$$

Mit

$$a = \tan \varphi'_\perp = 0,279 \qquad a^2 = 0,078$$

ergibt sich nach [Dipa] für die Formfaktoren A und B

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{0,334 \cdot 0,078 + 1,089}{1 + 0,078} = 1,034$$

$$B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = 0,279 \cdot \frac{1,089 - 0,334}{1 + 0,078} = 0,195$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e \cdot f}{A} = \frac{\sqrt{0,334 \cdot 1,089}}{1,034} = 0,583 \qquad \frac{B}{A} = \frac{0,195}{1,034} = 0,189$$

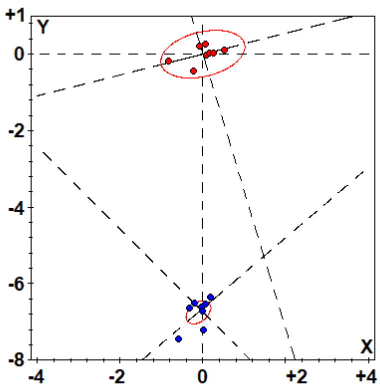
Die Funktionsgleichung Y' der gesuchten Ellipse ist somit definiert.

$$Y' = \frac{B}{A} \cdot X \pm \frac{e \cdot f}{A} \cdot \sqrt{A - X^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y' = 0,189 \cdot X \pm 0,583 \cdot \sqrt{1,034 - X^2}$$

Die grafische Darstellung folgend dazu.



LaTeX 2_ε