Zentrieren und Rückkippen einer Ellipse, gewonnen aus der Regression nach der Methode der kleinsten Quadrate

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 8. Juli 2017 – Letzte Revision: 12. Juli 2017

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[Dipa] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten. www.Zenithpoint.de.

[Dipb] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten über die Hauptkomponentenanalyse. www.Zenithpoint.de.

[Dipc] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Ermittlung der abszissen und ordinatenparallelen Ellipse über die Singularwertzerlegung. www.Zenithpoint.de.

---

1 Einleitung zum Thema

Einleitung

Ziel dieses Arbeitsblattes ist es, die Elliptische Regression über die Methode der kleinsten Quadrate (MKQ) in der Ebene zu vervollständigen. In [Dipa] war am Ende eine unzentrierte und gekippte Ellipse als Ergebnis ermittelt. Diese soll zentriert und zurückgekippt werden. Die Eigenschaften der Varianzen als ein Indikator wird aufgezeigt.

Für die weitere Nutzung der in [Dipa] gewonnenen Berechnungsgrundlagen, werden diese auf die Varianz- bzw. Kovarianzdarstellung umgestellt. So gilt für die Anstiege und Inhomogenitäten der Haupt und Nebenachse:

$$a = \frac{\{x\} \cdot \{y\} - n \cdot \{x \cdot y\}}{\{x\}^2 - n \cdot \{x^2\}} \qquad b = \frac{\{x \cdot y\} \cdot \{x\} - \{y\} \cdot \{x^2\}}{\{x\}^2 - n \cdot \{x^2\}}$$

$$c = \frac{n \cdot \{x^2\} - \{x\}^2}{\{x\} \cdot \{y\} - n \cdot \{x \cdot y\}} \qquad d = \frac{\{y\} - c \cdot \{x\}}{n}$$

Folgende Zusammenhänge sind bekannt:

$$\{x\} = n \cdot \overline{x} = x_M \qquad \{y\} = n \cdot \overline{y} = y_M$$

$$\{x \cdot y\} = C \qquad \{x^2\} = V_{XX}$$

Damit ergibt sich letztendlich für a, b, c und d:

$$a = \frac{n \cdot x_M \cdot y_M - C}{n \cdot x_M^2 - V_{XX}} \qquad b = \frac{C \cdot x_M - y_M \cdot V_{XX}}{n \cdot x_M^2 - V_{XX}}$$

$$c = \frac{V_{XX} - n \cdot x_M^2}{n \cdot x_M \cdot y_M - C} \qquad d = y_M - c \cdot x_M$$

Für die zentrierte, jedoch noch gekippte Ellipse gilt dann mit $x_M = y_M = 0$:

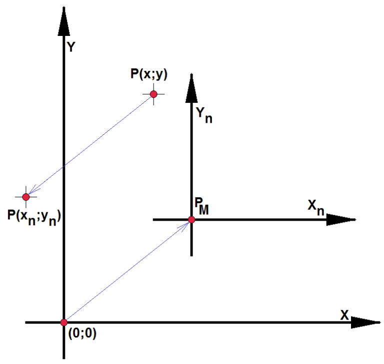
$$a^{x_M = y_M = 0} = \frac{C}{V_{XX}} \qquad b^{x_M = y_M = 0} = 0$$

$$c^{x_M = y_M = 0} = -\frac{V_{XX}}{C} \qquad d^{x_M = y_M = 0} = 0$$

2 Durchführung der Drehung und Zentrierung

2.1 Verschiebung des Systems in den Ellipsenmittelpunkt $P_M\left(x_M, y_M\right)$

Der erste Schritt ist es, die Ellipse zu zentrieren. Dazu wird das Koordinatensystem in den Mittelpunkt der Ellipse verschoben, Bekannt sind der Mittelpunkt der Ellipse mit $P_M\left(x_M, y_M\right)$ Verschiebung



und

$$x_M = \bar{X} = \frac{\{X_i\}}{n} \qquad y_M = \bar{Y} = \frac{\{Y_i\}}{n}$$

aus der Verschiebung ergeben sich neue Datenpunktangaben $P_i\left(x_i; y_i\right)$ mit:

$$x_n = x - x_M \qquad y_n = y - y_M$$

Beispiel aus [Dipb]:

i	x_i	y_i	x_n	y_n
1	128	100	-567	-349
2	256	250	-439	-199
3	440	510	-255	+61
4	640	160	-55	-289
5	768	400	+73	-49
6	896	520	+201	+71
7	1152	750	+457	+301
8	1280	900	+585	+451
$\sum$	5560	3590	0	≈ 0

Mit:

$$x_M = \frac{5560}{8} = 695 \qquad y_M = \frac{3590}{8} = 449$$

Und aus [Dipb]:

$$V_{XX} = \left(x_i - x_M\right)^2 \qquad C = \left(x_i - x_M\right) \cdot \left(y_i - y_M\right) \qquad V_{YY} = \left(y_i - y_M\right)^2$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 1.179.064 \qquad C = 697.670 \qquad V_{YY} = 550.088$$

$\Rightarrow$

$$a = \frac{C}{V_{XX}} = \frac{697670}{1179064} = 0,5917$$

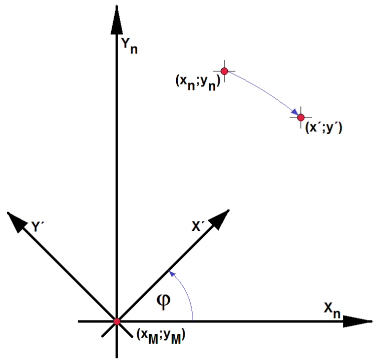
Sowie aus [Dipa]:

$$a = 0,5928$$

2.2 Drehung des Systems auf die Abszisse $Y^{(b=0)}$

Drehung

Die nun zentrierte jedoch noch gekippte Ellipse wird nun abszissenparallel gestellt. Dazu wird der bekannte Kippwinkel φ der Ellipse genutzt. Die Vorzeichen werden so gesetzt, dass eine Drehung gegen den Uhrzeigersinn ein positives φ erfordert.



$\Rightarrow$

$$x' = x_n \cdot \cos\varphi + y_n \cdot \sin\varphi \qquad y' = y_n \cdot \cos\varphi - x_n \cdot \sin\varphi$$

Auch für den Winkel φ gibt es aus der HKA eine Berechnungsgrundlage.

$$\varphi = \arctan a = \arctan \frac{C}{V_{XX}}$$

$\Rightarrow$

$$x' = \frac{x_n + y_n \cdot a}{\sqrt{1+a^2}} \qquad y' = \frac{y_n - x_n \cdot a}{\sqrt{1+a^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x' = \frac{V_{XX} \cdot x_n + y_n \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}} \qquad y' = \frac{V_{XX} \cdot y_n - x_n \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}}$$

Damit ist die Ellipse zentriert und ungekippt. Das genutzte Beispiel wird weiter entwickelt.

i	x_n	y_n	x'	y'
1	-567	-349	-666	-11
2	-439	-199	-479	+53
3	-255	+61	-188	+183
4	-55	-289	-195	-221
5	+73	-49	+38	-79
6	+201	+71	+209	-41
7	+457	+301	+547	+26
8	+585	+451	+733	+90
$\sum$	0	≈ 0	≈ 0	≈ 0

2.3 Zusammenfassen von Verschiebung und Drehung

Die Berechnungsgrundlagen für die Verschiebung und Drehung können zusammen gefasst werden. Daraus ergeben sich die folgenden Gesamtgleichungen:

$$x_n = x - x_M \quad y_n = y - y_M \quad \text{mit} \quad x' = \frac{V_{XX} \cdot x_n + y_n \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}} \quad y' = \frac{V_{XX} \cdot y_n - x_n \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}}$$

$\Rightarrow$

$$x' = \frac{V_{XX} \cdot (x - x_M) + (y - y_M) \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}} \qquad y' = \frac{V_{XX} \cdot (y - y_M) - (x - x_M) \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}}$$

2.4 Neuermittlung von Haupt- und Nebenachse $Y^{(\varphi=0°)}, Y^{(\varphi=90°)}$

Achsen

Die allgemeine Berechnungsgrundlage der Haupt- und Nebenachse der Ellipse ist aus [Dipa] gegeben mit:

$$Y^{(\varphi,1)} = a \cdot X + b \qquad Y^{(\varphi,2)} = c \cdot X + d$$

Damit sind die neuen Achsen sämtlichst definiert.

$$Y^{(\varphi=0°)} = a^{(\varphi=0°)} \cdot X + b^{(\varphi=0°)} \qquad Y^{(\varphi=90°)} = c^{(\varphi=90°)} \cdot X + d^{(\varphi=90°)}$$

$\Rightarrow$

$$Y^{(\varphi=0°)} = \frac{C}{V_{XX}} \cdot X \qquad Y^{(\varphi=90°)} = -\frac{V_{XX}}{C} \cdot X$$

Ideal müsste die Achse $Y^{(\varphi=90°)}$ senkrecht auf $Y^{(\varphi=0°)}$ stehen. Daraus folgt, dass $C \to 0$ gilt mit $V_{XX} \neq 0$. Der Winkel zwischen den Achsen ist demnach ein Indikator der linearen Regression nach der Methode der kleinsten Quadrate.

$$\tan\varphi = -\frac{V_{XX}}{C}$$

3 Eigenschaft und Rolle von $\tan\varphi$

Die allgemeine Berechnungsgrundlage der Haupt- und Nebenachse der zentrierten und ungekippten Ellipse ist gegeben mit:

$$Y^{(\varphi=0^\circ)} = \frac{C}{V_{XX}} \cdot X \qquad\qquad Y^{(\varphi=90^\circ)} = -\frac{V_{XX}}{C} \cdot X$$

Der Indikator ist definiert mit:

$$\tan\varphi = -\frac{V_{XX}}{C}$$

Da die Summe ständig positiver Zahlen ein $V_{XX} > 0$ impliziert, für C das jedoch nicht gilt, daher auch den Wert 0 annehmen kann, sind zwei globale Fälle unterscheidbar.

- $\tan\varphi = \pm\infty$ Die Haupt- und die Nebenachse sind orthogonal zueinander. Die Varianzen sind auflösbar / unterscheidbar.
- $\tan\varphi = 0$ Die Haupt- und die Nebenachse sind identisch. Es liegt eine Kreisregression vor. Die Varianzen sind nicht auflösbar / unterscheidbar.

4 Ermitteln der neuen Ellipsenfunktion $Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)}$

Ellipse

Aus den gewonnen Werten x' und y' kann die Ellipsenfunktion ermittelt werden. Die allgemeine Berechnungsgrundlage aus [Dipa] ist gegeben mit:

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = y_M + \frac{B}{A} \cdot (x - x_M) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_M)^2}$$

Der Kippwinkel φ der neugewonnenen Ellipse ist Null, da diese ungekippt nun vorliegt. Gleichzeitig fällt x_M und y_M weg, da die Zentrierung abgeschlossen ist.

$$Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)} = \frac{B}{A} \cdot x \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - x^2}$$

Für ein $\varphi = 0$ ist der Anstieg einer Achse $a = 0$. Für die Koeffizienten A und B ist dann bekannt:

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} \qquad B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2}$$

$\Rightarrow$

$$A^{(\varphi=0)} = f^2 \qquad B^{(\varphi=0)} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)} = \pm \frac{e}{f} \cdot \sqrt{f^2 - x^2}$$

Die Haupt- und die Nebenachse ist definiert.

$$e^2 = \frac{V_{YY}}{n} \qquad f^2 = \frac{V_{XX}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)} = \pm \sqrt{\frac{V_{YY}}{V_{XX}}} \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{n} - x^2}$$

Für vorliegendes Beispiel ergibt sich somit ein $Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)}$ von:

i	x'	y'	x'^2	y'^2	$x' \cdot y'$
1	-666	-11	443.556	121	+7.326
2	-479	+53	229.441	2.809	-25.387
3	-188	+183	35.344	33.489	-34.404
4	-195	-221	38.025	48.841	+43.095
5	+38	-79	1.444	6.241	-3.002
6	+209	-41	43.681	1.681	-8.569
7	+547	+26	299.209	676	+14.222
8	+733	-90	537.289	8.100	+65.970
$\sum$	≈ 0	0	1.627.989	101.958	+59.251

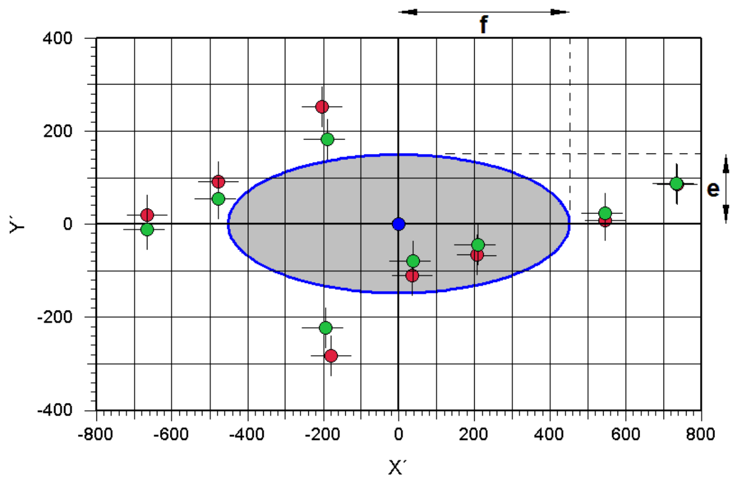
$$V_{XX} = 1.627.989 \qquad V_{YY} = 101.958$$

$$C = C_{XY} = C_{YX} = 59.251$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=x_M=y_M=0)} = \pm \sqrt{\frac{101958}{1627989}} \cdot \sqrt{\frac{1627989}{8} - x^2} = \pm \sqrt{12744,75 - 0,0626 \cdot x^2}$$

Die grafische Darstellung dazu folgend, wobei ROT ermittelte Datenpunkte aus der Hauptkomponentenanalyse (HKA) und GRÜN die nach der Methode der kleinsten Quadrate (MKQ) darstellt.



Mit:

$$e = \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} = 112,9 \qquad f = \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} = 451,1$$

Und:

$$\varphi = -\arctan\frac{V_{XX}}{C} = -87,9^\circ \equiv -0,488 \cdot \pi$$

Aus Interesse soll die gedrehte Kovarianz ermittelt werden. Aus [Dipc] folgt:

$$C^{(\varphi)} = \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \left(\frac{V_{YY}}{n} - \frac{V_{XX}}{n}\right)$$

$\Rightarrow$

$$C^{(\varphi=0)} = 0$$

Die für die Ellipsendrehung verantwortliche gedrehte Kovarianz $C^{(\varphi=0)}$ ist gleich Null.

5 Zusammenfassung

Zusammenfassung

Das Verschieben und Drehen eines Datensatzes im Zusammenhang mit der Elliptischen Regression nach HKA erfolgt durch folgende Berechnungsgrundlage.

$$x' = \frac{V_{XX} \cdot (x - x_M) + (y - y_M) \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}} \qquad y' = \frac{V_{XX} \cdot (y - y_M) - (x - x_M) \cdot C}{\sqrt{V_{XX}^2 + C^2}}$$

Wobei $P_i\,(x_i; y_i)$ den alte Datenpunkt und $P_i\,(x_i'; y_i')$ den neuen darstellt. Es werden dazu lediglich die Mittelwerte x_M und y_M benötigt.

Die nun zentrierte und ungekippte Ellipse besitzt die Form:

$$Y_{1;2}^{(\varphi = x_M = y_M = 0)} = \pm\sqrt{\frac{V_{YY}}{V_{XX}}} \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{n} - x^2}$$

Mit den Varianzen V_{XX} und V_{YY}. Die Haupt- und Nebenachse besitzen einen Winkel $var\phi$ zueinander. Dieser ist definiert durch:

$$\tan\varphi = -\frac{V_{XX}}{C}$$

Idealerweise ist dieser 90°. Bedeutet, dass die Kovarianz C des Datensatzes $P_i\,(x_i'; y_i')$ gegen Null geht. Ist das der Fall, konnten die Varianzen des Originaldatensatzes $P_i\,(x_i; y_i)$ vollständig aufgelöst werden.

6 Beispiele

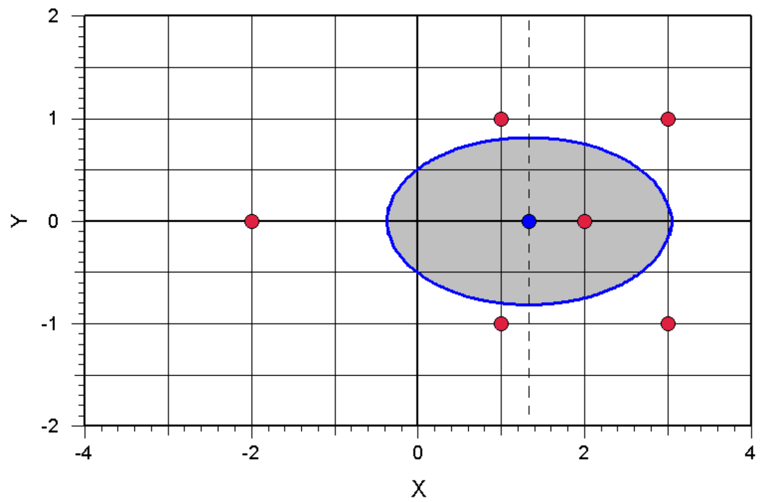
6.1 Beispiel I – vollständige Auflösung

Gegeben ist folgender Datensatz

Beispiel I

i	x_i	y_i	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$	$(x_i - x_M) \cdot (y_i - y_M)$
1	+3	-1	2,778	1	-1,667
2	-2	0	11,112	0	0,000
3	+1	+1	0,112	1	-0,334
4	+1	-1	0,112	1	+0,334
5	+2	0	0,445	0	0,000
6	+3	+1	2,778	1	+1,667
$\sum$	+8	0	17,337	4	0,000

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 17,337 \qquad C = 0 \qquad V_{YY} = 4$$

$\Rightarrow$

$$f = \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} = 1,700 \qquad e = \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} = 0,816$$

Mit:

$$y_H = 0 \qquad x_N = 1,334$$

Bei:

$$x_M = \frac{8}{6} = 1,334 \qquad y_M = \frac{0}{6} = 0$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = 2,890 \qquad B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = y_M + \frac{B}{A} \cdot (x - x_M) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_M)^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \pm 0,480 \cdot \sqrt{2,890 - (x - 1,334)^2}$$

Sowie:

$$\tan\varphi = -\frac{V_{XX}}{C} = -\infty$$

⇒

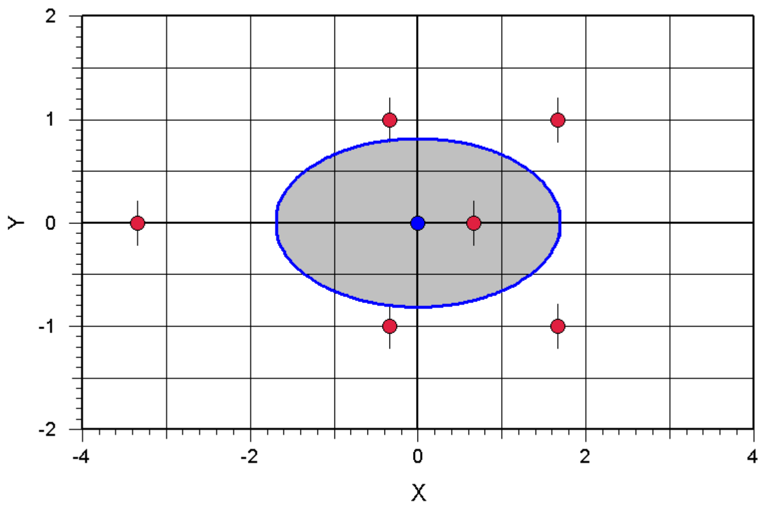
$$\varphi = 90°$$

Damit können die Varianzen vollständig aufgelöst werden.

Die Ermittlung der Werte x' und y'.

i	x_i	y_i	x'_i	y'_i	$(x'_i - x'_M)^2$	$(y'_i - y'_M)^2$	$(x'_i - x'_M) \cdot (y'_i - y'_M)$
1	+3	-1	+1,667	-1	2,779	1	-1,667
2	-2	0	-3,334	0	11,116	0	0,000
3	+1	+1	-0,334	+1	0,112	1	-0,334
4	+1	-1	-0,334	-1	0,112	1	+0,334
5	+2	0	+0,667	0	0,445	0	0,000
6	+3	+1	+1,667	+1	2,779	1	+1,667
$\sum$	+8	0	0	0	17,334	4	0

⇒



⇒

$$V_{XX} = 17,334 \qquad C = 0 \qquad V_{YY} = 4$$

⇒

$$f = \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} = 1,700 \qquad e = \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} = 0,816$$

⇒

$$Y_{1;2}^{(\varphi = x_M = y_M = 0)} = \pm \sqrt{\frac{V_{YY}}{V_{XX}}} \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{n} - x^2}$$

⇒

$$Y_{1;2}^{(\varphi = x_M = y_M = 0)} = \pm 0,480 \cdot \sqrt{2,890 - x^2}$$

Sowie:

$$\tan\varphi = -\frac{V_{XX}}{C} = -\infty \qquad \rightarrow \qquad \varphi = 90°$$

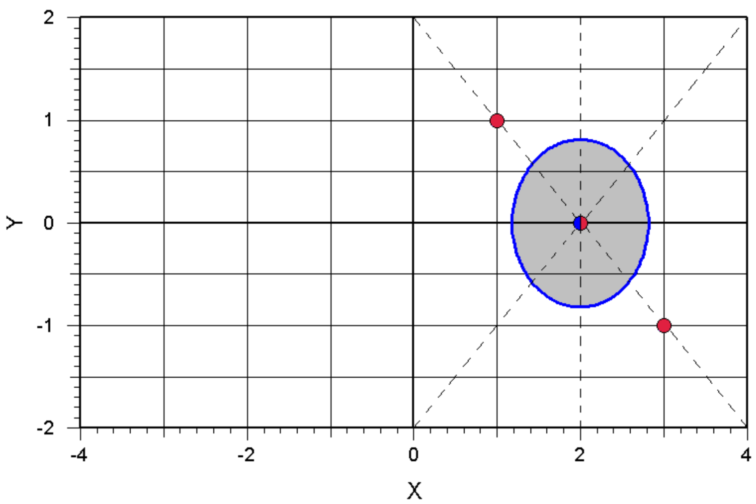
6.2 Beispiel II – unvollständige Auflösung

Gegeben ist folgender Datensatz

Beispiel II

i	x_i	y_i	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$	$(x_i - x_M) \cdot (y_i - y_M)$
1	3	-1	1	1	-1
2	2	0	0	0	0
3	1	+1	1	1	-1
4	1	+1	1	1	-1
5	2	0	0	0	0
6	3	-1	1	1	-1
$\sum$	12	0	4	4	-4

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 4 \qquad C = -4 \qquad V_{YY} = 4$$

Es liegt eine Kreisregression vor.

$$f = \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} = 0,816 \qquad e = \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} = 0,816$$

Mit Linearer Regression – MKQ:

$$y_{H;MKQ} = -x + 2 \qquad y_{N;MKQ} = x - 2$$

Mit Linearer Regression – HKA:

$$y_{H;HKA} = 0 \qquad x_{N;HKA} = 2$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} = \frac{e^2 + f^2}{2} = 0,667 \qquad B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2} = \frac{e^2 - f^2}{2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = y_M + \frac{B}{A} \cdot (x - x_M) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_M)^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \pm\sqrt{0,667 - (x - 2)^2}$$

Bei:

$$x_M = \frac{12}{6} = 2 \qquad y_M = \frac{0}{6} = 0$$

Sowie:

$$\tan\varphi = -\frac{V_{XX}}{C} = 1$$

$\Rightarrow$

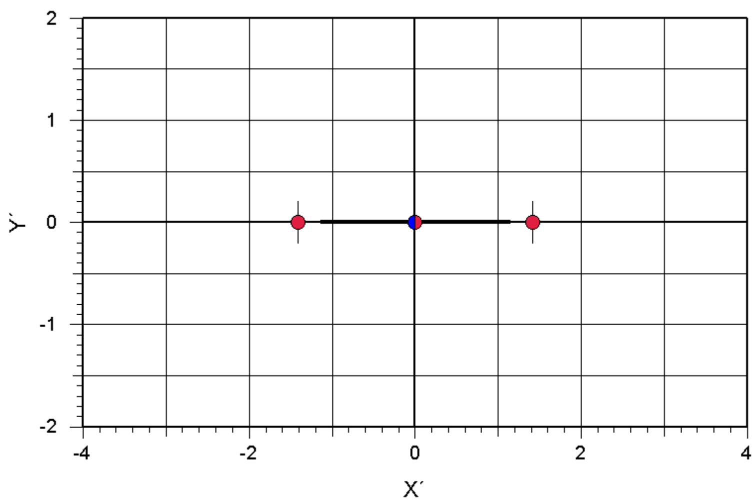
$$\varphi = 45°$$

Damit können die Varianzen nicht aufgelöst werden.

Die Ermittlung der Werte x' und y'.

i	x_i	y_i	x'_i	y'_i	$(x'_i - x'_M)^2$	$(y'_i - y'_M)^2$	$(x'_i - x'_M) \cdot (y'_i - y'_M)$
1	3	-1	$+\sqrt{2}$	0	2	0	0
2	2	0	0	0	0	0	0
3	1	+1	$-\sqrt{2}$	0	2	0	0
4	1	+1	$-\sqrt{2}$	0	2	0	0
5	2	0	0	0	0	0	0
6	3	-1	$+\sqrt{2}$	0	2	0	0
$\sum$	12	0	0	0	8	0	0

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 8 \qquad C = 0 \qquad V_{YY} = 0$$

Es liegt eine Kreisregression vor.

$$f = \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} = 1,155 \qquad e = \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi = x_M = y_M = 0)} = \pm\sqrt{\frac{V_{YY}}{V_{XX}}} \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{n} - x^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi = x_M = y_M = 0)} = 0$$

Sowie:

$$\tan\varphi = -\frac{V_{XX}}{C} = -\infty \qquad \rightarrow \qquad \varphi = 90°$$

$\LaTeX\,2_\varepsilon$