Das Mittelwertproblem

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 24. Dezember 2009 – Letzte Revision: 13. September 2020

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

---

1 Mittelwertproblem

Der wahre Mittelwert ist immer unbekannt. Der Mittelwert großer Stichproben nähert sich dem wahren Mittelwert nur an. Der Mittelwert kleinerer Teile dieser Stichproben sind selbst nur ein Teilmittelwert und Repräsentant des Mittelwertes großer Stichproben. Problem ist die Aussagekraft von Abweichungen in Bezug des Mittelwertes und Teilmittelwertes. Kann es dadurch sein, dass die Aussage *zu klein*, *zu warm* oder *zu wenig* in Bezug Mittelwert sich umkehrt auf *zu groß*, *zu kalt* oder *zu viel* in Bezug auf den Teilmittelwert? Kann folgende Bedingung erfüllt sein? [001]ff.

$$\triangle\overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{4}} > n \cdot |\triangle\overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}00}| \qquad \text{mit} \qquad n > 1 \qquad n \in R$$

1.1 Voraussetzungen

Gegeben sei eine Zufallsfolge von 100 Messungen. Der Mittelwert beträgt:

$$\overline{x}_{100} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i$$

Daraus werden 96 Messungen extrahiert und dessen Mittelwert gebildet:

$$\overline{x}_{96} = \frac{1}{96} \sum_{i=1}^{96} x_i$$

Die restlichen 4 Messungen ergeben einen gesonderten Mittelwert:

$$\overline{x}_{4} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} x_i$$

Die Abweichung des 100. Wertes vom eigenen Mittelwert ist gefragt:

$$\triangle\overline{x}_{100} = x_{100} - \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i$$

Für eine Annahme, dass gilt:

$$x_{100} < \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i$$

Ergibt sich so für $\Delta\overline{x}_{100}$:

$$\triangle\overline{x}_{100} < 0$$

Die Abweichung des 100. Wertes vom 4- Messungs- Mittelwert ist gesucht:

$$\triangle\overline{x}_{4} = x_{100} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} x_i$$

Für eine Annahme, dass gilt:

$$x_{100} > \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{4} x_i$$

Ergibt sich so für $\Delta\overline{x}_{4}$:

$$\triangle\overline{x}_{4} > 0$$

1.2 Behauptung

Für die Beschreibung des Mittelwert- Problems soll überprüft werden, ob gelten könnte:

$$\triangle\overline{x}_4 > n \cdot |\triangle\overline{x}_{100}|$$

Wobei für die Konstante n gelten soll:

$$n > 1 \qquad\qquad n \in R$$

1.3 Beweis

Für:

$$\triangle \overline{x}_4 > n \cdot |\triangle \overline{x}_{100}|$$

Es wird eingesetzt:

$$x_{100} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i > n \cdot \left| x_{100} - \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i \right|$$

⇒

$$x_{100} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i > n \cdot \left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i - x_{100} \right)$$

Es wird weiter umgeformt:

$$x_{100} - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} x_i > \frac{n}{100}\sum_{i=1}^{100} x_i - n \cdot x_{100}$$

⇒

$$100 \cdot (1+n) \cdot x_{100} > n \sum_{i=1}^{100} x_i + 25 \sum_{i=1}^{4} x_i$$

⇒

$$100 \cdot (1+n) \cdot x_{100} > 100 \cdot n \cdot \overline{x}_{100} + 100 \cdot \overline{x}_4$$

Vereinfacht:

$$(1+n) \cdot x_{100} > n \cdot \overline{x}_{100} + \overline{x}_4$$

⇒

$$n > \frac{\overline{x}_4 - x_{100}}{x_{100} - \overline{x}_{100}}$$

Die Konstante n kann aus der Behauptung substituiert werden:

$$n > 1$$

⇒

$$0 > \frac{\overline{x}_4 - x_{100}}{x_{100} - \overline{x}_{100}} - 1$$

⇒

$$x_{100} > \frac{\overline{x}_4 + \overline{x}_{100}}{2}$$

2 Beispiel

2.1 Beispiel 1

Die Wetterdaten speziell der Temperatur für den Monat November der letzten 100 Jahre ergaben einen Monatsdurchschnitt von:

$$\overline{x}_{100} = 5,0°C$$

Die letzten vier Messungen ergaben folgende Einzelwerte:

$$\begin{array}{ll} x_{97} = 4,0°C & x_{98} = 4,1°C \\ x_{99} = 3,9°C & x_{100} = 4,8°C \end{array}$$

Das ergibt einen Vierjahres- Mittelwert von:

$$\overline{x}_4 = 4,2°C$$

Man kann je nach benutztem Durchschnitt zwei folgende richtige Aussagen aufstellen:

1. Dieses Jahr (x_{100}) war mit $+0,6K$ der Monat November zu warm. ($\overline{x}_4$)
2. Dieses Jahr (x_{100}) war mit $-0,2K$ der Monat November zu kalt. ($\overline{x}_{100}$)

Diese Aussage sieht deshalb auf der Zu-warm-Seite dramatisch aus, weil gilt:

$$x_{100} > \frac{\overline{x}_4 + \overline{x}_{100}}{2}$$

$\Rightarrow$

$$4,8°C > 4,6°C$$

Der dazugehörige n-Wert:

$$n > \frac{\overline{x}_4 - x_{100}}{x_{100} - \overline{x}_{100}}$$

$\Rightarrow$

$$n > 3$$

Die Erwärmung fällt demnach $n = 3x$ dramatischer aus als die Abkühlung. Welche der beiden Aussagen ist aber nun aussagekräftiger? Das erklärt nur die Kenntnis der restlichen x_1 bis x_{96}.

2.2 Beispiel 2

Die Wetterdaten speziell der Temperatur für den Monat November der letzten 100 Jahre ergaben einen Monatsdurchschnitt von:

$$\overline{x}_{100} = 5,0°C$$

Die letzten fünf Messungen ergaben folgende Einzelwerte:

$$\begin{array}{lll} x_{96} = 5,2°C & x_{97} = 4,0°C & \\ x_{98} = 4,1°C & x_{99} = 3,9°C & x_{100} = 4,8°C \end{array}$$

Das ergibt einen Vierjahres- Mittelwert von (ohne x_{100}):

$$\overline{x}_4 = 4,3°C$$

Man kann je nach benutztem Durchschnitt zwei folgende richtige Aussagen aufstellen:

1. Dieses Jahr (x_{100}) war mit $+0,5K$ der Monat November zu warm. ($\overline{x}_4$)
2. Dieses Jahr (x_{100}) war mit $-0,2K$ der Monat November zu kalt. ($\overline{x}_{100}$)

Diese Aussage sieht deshalb auf der Zu-warm-Seite (immer noch) dramatisch aus, weil gilt:

$$x_{100} > \frac{\overline{x}_4 + \overline{x}_{100}}{2}$$

$\Rightarrow$

$$4,8°C > 4,65°C$$

Der dazugehörige n-Wert:

$$n > \frac{\overline{x}_4 - x_{100}}{x_{100} - \overline{x}_{100}}$$

$\Rightarrow$

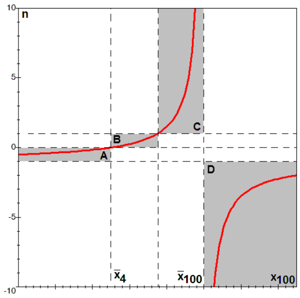
$$n > 2,5$$

Die Erwärmung fällt demnach (immer noch) $n = 2,5x$ dramatischer aus als die Abkühlung obwohl ein Kälteloch die letzten vier Jahre mit anschließender 100-Jahre-Mittelwert-Angleichung beobachtbar ist.

3 Zusammenfassung und Erweiterung auf $n \in R$

3.1 Für $\overline{x}_4 < \overline{x}_{100}$

Die obigen Erkenntnisse bildlich dargestellt.



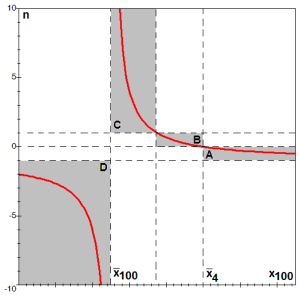
Darstellung der verschiedenen n-Wertbereiche
in Abhängigkeit von Mittel- und Teilmittelwert
für $\overline{x}_4 < \overline{x}_{100}$.

Wobei für die einzelnen Bereiche A bis D letztendlich gilt:

	D	A	B	C
Mittelwert	x_{100} zu warm	x_{100} zu kalt	x_{100} zu kalt	x_{100} zu kalt
Teilmittelwert	x_{100} zu warm	x_{100} zu kalt	x_{100} zu warm	x_{100} zu warm
Wert n	$n < -1$	$-1 < n < 0$	$0 < n < +1$	$n > +1$
Übereinstimmung	$(+)$	$(+)$	$(-)$	$(-)$

3.2 Für $\overline{x}_4 > \overline{x}_{100}$

Die obigen Erkenntnisse bildlich dargestellt.



Darstellung der verschiedenen n-Wertbereiche
in Abhängigkeit von Mittel- und Teilmittelwert
für $\overline{x}_4 > \overline{x}_{100}$.

Wobei für die einzelnen Bereiche A bis D letztendlich gilt:

	D	A	B	C
Mittelwert	x_{100} zu kalt	x_{100} zu warm	x_{100} zu warm	x_{100} zu warm
Teilmittelwert	x_{100} zu kalt	x_{100} zu warm	x_{100} zu kalt	x_{100} zu kalt
Wert n	$n < -1$	$-1 < n < 0$	$0 < n < +1$	$n > +1$
Übereinstimmung	$(+)$	$(+)$	$(-)$	$(-)$

Resümee: Bei unkommentierter Nutzung eines Teilmittelwerts können Temperaturwerte schnell zu falschen Aussagen entarten. Zu jedem Mittelwert gehört unbedingt die Angabe und Nutzung der (Standard)Abweichung.

$\LaTeX\,2_\varepsilon$