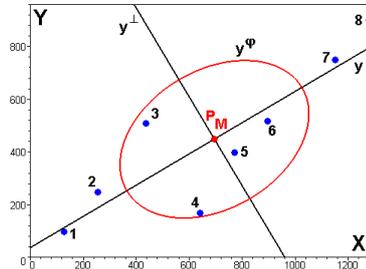


# Elliptische Regression von Datenpunkten



## Elliptical regression of data points

Dipl.- Ing. Björnsterne Zindler, M.Sc.

[www.Zenithpoint.de](http://www.Zenithpoint.de)

Erstellt: 17. Oktober 2013 – Letzte Revision: 16. März 2025

### Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Elliptische Regression im Allgemeinen</b>	<b>3</b>
1.1	Lineare Regression der Hauptachse $y$	4
1.2	Lineare Regression der Nebenachse $y^\perp$	5
1.3	Schnittpunkt zwischen Haupt- und Nebenachse $P_M$	7
1.4	Ermittlung der elliptischen Regressionsfunktion $y^E$	8
1.5	Ermittlung der Regressionsparameter $f$ und $e$	10
1.5.1	Hauptachsenparameter $f$	10
1.5.2	Nebenachsenparameter $e$	11
1.6	Nachweise der erfolgreichen Minimierung von $F$	12
1.6.1	Nachweis, dass die Nebenachse die Fehlerfunktion $F$ minimiert	12
1.6.2	Nachweis, dass die Ellipse die Fehlerfunktion $F$ minimiert	13
<b>2</b>	<b>Elliptische Regression im Besonderen</b>	<b>15</b>
2.1	Erweiterung auf eine gekippte Ellipse $y^\varphi$	15
2.2	Korrelationskoeffizient $\rho_{XY}$	16
2.3	Exzentrizitäten $\epsilon$	17
2.3.1	Lineare Exzentrizität $\epsilon_L$	17
2.3.2	Numerische Exzentrizität $\epsilon_N$	18
<b>3</b>	<b>Anhang</b>	<b>19</b>
3.1	Beispiel I	19
3.1.1	Daten	19
3.1.2	Ergebnisse, numerisch	20
3.1.3	Ergebnisse, grafisch	21
3.2	Beispiel II	22
3.2.1	Daten	22
3.2.2	Ergebnisse, numerisch	23
3.2.3	Ergebnisse, grafisch	24

## Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

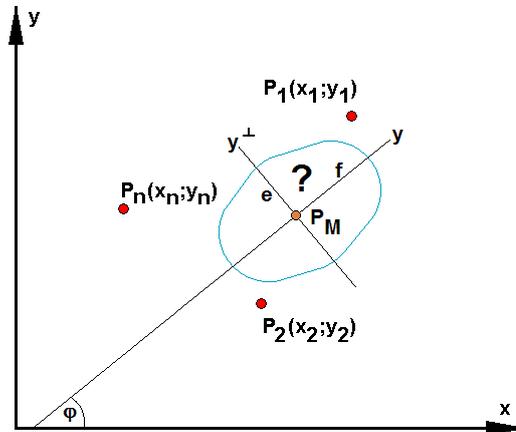
[Dip] Dipl.-Ing Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten über die Hauptkomponentenanalyse. [www.Zenithpoint.de](http://www.Zenithpoint.de).

[Rol] Roland Weingärtner, Leon Schiller, Alexander Kinstler, Richard Neumann, Frank Brunner, Eldad Bahat Treidel, Enrico Brusaterra, Matthias Marx, Sven Besendörfer. Impact of Dislocation Networks on Leakage Currents of GaN-on-GaN pn-Diodes: A Statistical Approach Comparing X-Ray Topography with Electrical Characteristics.

---

# 1 Elliptische Regression im Allgemeinen

Es soll eine Elliptische Regression mit Datenpunkten  $P_i$  durchgeführt werden. Ziel ist es, eine elliptische Funktion zu finden, die eine noch zu ermittelnde Fehlerfunktion  $F$  minimiert. Die „Methode der kleinsten Quadrate“ ist Grundmethode dieser Regression. [001]ff.



Das Modell der Elliptischen Regression.

Grundsätzlich ist erkennbar, dass folgende Parameter zu berechnen sind:

- Die lineare Funktion der Hauptachse  $y = f(x)$
- Die lineare Funktion der Nebenachse  $y^\perp = f(x)$
- Der Mittelpunkt  $P_M$  mit dessen Abszissenlage  $x_M$
- Der Mittelpunkt  $P_M$  mit dessen Ordinatenlage  $y_M$
- Die Hauptachsenlänge  $f$
- Die Nebenachsenlänge  $e$
- Der Kippwinkel  $\varphi$  der Ellipse

Weiterhin ist zu zeigen oder möglich zu berechnen:

- Eine Ellipse erfüllt die Bedingung von  $F$
- Die Exzentrizität(en)  $\varepsilon$  der Ellipse
- Der lineare Korrelationskoeffizient  $\rho$  zwischen  $x_i$  und  $y_i$

Ein nachfolgendes Beispiel rundet das Skript ab.

### 1.1 Lineare Regression der Hauptachse $y$

Die lineare Regression der Hauptachse erfolgt über die Regeln der Linearen Regression (siehe dort zur Ermittlung der Koeffizienten  $a$  und  $b$  und den hier genutzten Syntax)<sup>1</sup>. Ergebnis ist eine lineare Funktion.

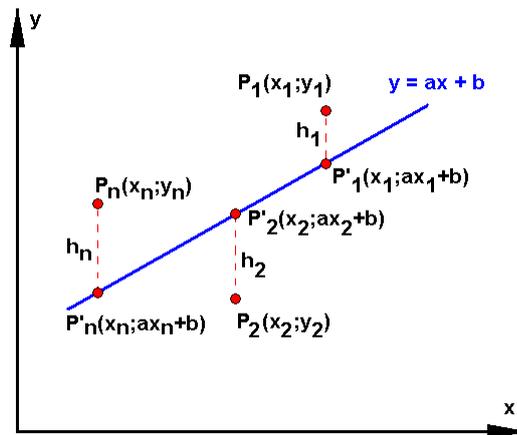
Hauptachse  $y$

$$y = a \cdot x + b$$

Mit  $a$  dem Anstieg und  $b$  der Inhomogenität der Funktion.

$$a = \frac{\{x\} \cdot \{y\} - n \cdot \{xy\}}{\{x\}^2 - n \cdot \{x^2\}} \quad b = \frac{\{xy\} \cdot \{x\} - \{y\} \cdot \{x^2\}}{\{x\}^2 - n \cdot \{x^2\}}$$

←



Die Lineare Regression über die Methode der kleinsten Quadrate.

---

<sup>1</sup>[www.Zenithpoint.de](http://www.Zenithpoint.de) „Polynomregression von Datenpunkten“

## 1.2 Lineare Regression der Nebenachse $y^\perp$

Bekannt sind  $a$  und  $b$  aus der Linearen Regression. Gesucht ist die orthogonale Funktion  $y^\perp$ , die Nebenachse.

$$y^\perp = c \cdot x + d$$

Nebenachse  $y^\perp$

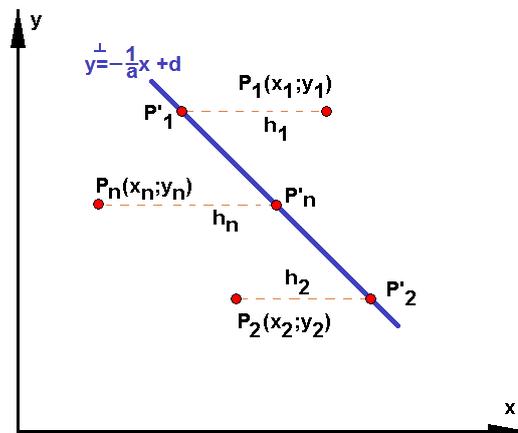
Aus der Forderung der Orthogonalität ist  $c$  vorgegeben.

$$c = -\frac{1}{a}$$

⇒

$$c = \frac{n \cdot \{x^2\} - \{x\}^2}{\{x\} \cdot \{y\} - n \cdot \{x \cdot y\}}$$

Die Inhomogenität  $d$  muss regressiert werden.



Das genutzte Modell für die Ermittlung der Nebenachse.

Aus den gegebenen Datenpunkten  $P$  sind die Punkte  $P^\perp$  auf dem Funktionsgraphen  $y^\perp$  gegeben.

$$P_1^\perp \left( \frac{1}{c}y_1 - \frac{d}{c}; y_1 \right)$$

$$P_2^\perp \left( \frac{1}{c}y_2 - \frac{d}{c}; y_2 \right)$$

⋮

$$P_n^\perp \left( \frac{1}{c}y_n - \frac{d}{c}; y_n \right)$$

Der Abstand  $h$  zwischen  $P$  und  $P^\perp$  parallel zur Abszisse ist definiert durch:

$$h_1^\perp = x_1 - \frac{1}{c}y_1 + \frac{d}{c}$$

$$h_2^\perp = x_2 - \frac{1}{c}y_2 + \frac{d}{c}$$

⋮

$$h_n^\perp = x_n - \frac{1}{c}y_n + \frac{d}{c}$$

Die Fehlerfunktion  $F$  wird gebraucht um dessen Minimum zu ermitteln.

$$F = \sum_{i=1}^n h_i^{\perp 2}$$

⇒

$$F = \begin{cases} + (x_1 - \frac{1}{c}y_1 + \frac{d}{c})^2 \\ + (x_2 - \frac{1}{c}y_2 + \frac{d}{c})^2 \\ \vdots \\ + (x_n - \frac{1}{c}y_n + \frac{d}{c})^2 \end{cases}$$

⇒

$$F = \begin{cases} +x_1^2 - 2\frac{1}{c}x_1y_1 + 2\frac{d}{c}x_1 - 2\frac{d}{c^2}y_1 + \frac{1}{c^2}y_1^2 + \frac{d^2}{c^2} \\ +x_2^2 - 2\frac{1}{c}x_2y_2 + 2\frac{d}{c}x_2 - 2\frac{d}{c^2}y_2 + \frac{1}{c^2}y_2^2 + \frac{d^2}{c^2} \\ \vdots \\ +x_n^2 - 2\frac{1}{c}x_ny_n + 2\frac{d}{c}x_n - 2\frac{d}{c^2}y_n + \frac{1}{c^2}y_n^2 + \frac{d^2}{c^2} \end{cases}$$

Die Fehlerfunktion kann zusammengefasst werden.

$$F(d) = \{x^2\} - 2\frac{1}{c}\{x \cdot y\} + 2\frac{d}{c}\{x\} - 2\frac{d}{c^2}\{y\} + \frac{1}{c^2}\{y\} + n \cdot \frac{d^2}{c^2}$$

Die 1. Ableitung wird ermittelt und Null gesetzt.

$$F(d)' = 0 - 0 + 2\frac{1}{c}\{x\} - 2\frac{1}{c^2}\{y\} + 0 + 2 \cdot n \cdot \frac{d}{c^2} = 0$$

⇒

$$c \cdot \{x\} - \{y\} + n \cdot d = 0$$

Damit ist der Koeffizient  $d$  ermittelt.

$$d = \frac{\{y\} - c \cdot \{x\}}{n}$$

⇒

$$d = \frac{\{y\}}{n} - c \cdot \frac{\{x\}}{n} = y_M - c \cdot x_M = \mu_Y - c \cdot \mu_X$$

### 1.3 Schnittpunkt zwischen Haupt- und Nebenachse $P_M$

Der Mittelpunkt der zukünftigen zweidimensionalen Verteilung ist der Schnittpunkt der Funktionen  $y$  und  $y^\perp$ .

Mittelpunkt  $P_M$

$$a \cdot x_M + b = c \cdot x_M + d = -\frac{1}{a} \cdot x_M + d$$

$\Rightarrow$

$$x_M = a \cdot \frac{d - b}{a^2 + 1}$$

Für  $y_M$ :

$$y_M = -\frac{1}{a} \cdot x_M + d$$

$\Rightarrow$

$$y_M = \frac{b + d \cdot a^2}{a^2 + 1}$$

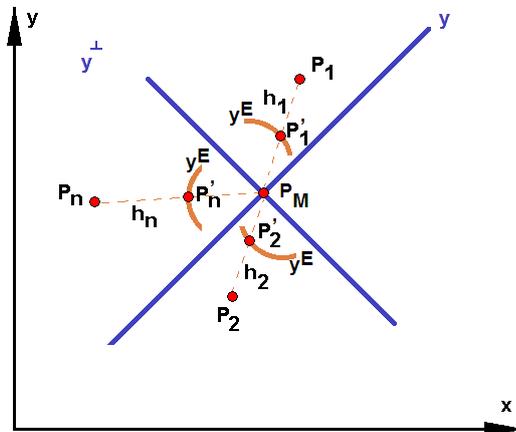
Das sind dann die Mittelwerte der Verteilung.

$$x_M = \mu_X = a \cdot \frac{d - b}{a^2 + 1} \quad y_M = \mu_Y = \frac{b + d \cdot a^2}{a^2 + 1}$$

### 1.4 Ermittlung der elliptischen Regressionsfunktion $y^E$

Es wurde ein Punkt  $P_M(x_M; y_M)$  gefunden als Schnittpunkt zweier orthogonaler Regressionsgeraden in der Ebene. Sieht man  $P_M$  als den zentralen Utopiapoint für eine Vielzahl möglicher Utopiapunkte an, insbesondere für alle regressierten Punkte  $P_1$  bis  $P_n$ , dann kann eine Funktion  $y^E$  um  $P_M$  definiert werden, in der alle Utopiapunkte innerhalb  $y^E$  liegen und alle Nadirpunkte außerhalb.

Regression  $y^E$



Modell zur Ermittlung der Regressionsfunktion.

Es wird eine Gerade definiert  $\overline{P_i P_M}$ . Der Funktionsgraf  $y^E$  muss diese Gerade schneiden. Dann ist der Abstand zwischen Schnittpunkt und  $P_i$  gegeben.

$$\begin{aligned}
 h_1 &= \sqrt{(x_1 - x^E)^2 + (y_1 - y^E)^2} \\
 h_2 &= \sqrt{(x_2 - x^E)^2 + (y_2 - y^E)^2} \\
 &\vdots \\
 h_n &= \sqrt{(x_n - x^E)^2 + (y_n - y^E)^2}
 \end{aligned}$$

Die Fehlerfunktion  $F$  wird ermittelt und umgestellt (Der Index  $E$  wird folgend nicht weiter mitgeführt der Einfachheit halber).

$$F = \sum_{i=1}^n h_i^2$$

⇒

$$F = \begin{cases} + (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 \\ + (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 \\ \vdots \\ + (x_n - x)^2 + (y_n - y)^2 \end{cases}$$

⇒

$$F = \begin{cases} + x_1^2 - 2x_1 \cdot x + x^2 + y_1^2 - 2y_1 \cdot y + y^2 \\ + x_2^2 - 2x_2 \cdot x + x^2 + y_2^2 - 2y_2 \cdot y + y^2 \\ \vdots \\ + x_n^2 - 2x_n \cdot x + x^2 + y_n^2 - 2y_n \cdot y + y^2 \end{cases}$$

⇒

$$F(x; f(x) = y) = \{x^2\} - 2x \cdot \{x\} + n \cdot x^2 + \{y^2\} - 2y \cdot \{y\} + n \cdot y^2$$

Um das Minimum von  $F$  zu finden, wird differenziert und Null gesetzt.

$$F' = 0 - 2 \cdot \{x\} + 2n \cdot x + 0 - 2y' \cdot \{y\} + 2n \cdot y \cdot y' = 0$$

⇒

$$y' \cdot \left( y - \frac{\{y\}}{n} \right) = \frac{\{x\}}{n} - x$$

⇒

$$y' \cdot (y - \mu_Y) = \mu_X - x$$

⇒

$$y' = \frac{\mu_X - x}{y - \mu_Y} = \frac{x_M - x}{y - y_M}$$

Die Differentialgleichung 1. Ordnung stellt unsere gesuchte Funktion dar. Eine allgemeine Lösung der DGL wird hier nicht dargestellt. Über etwas Erfahrung ist zu erkennen, dass die Ellipsengleichung eine partikuläre Lösung der DGL darstellt. So ist gegeben für eine (noch) nicht gedrehte aber schon verschobene Ellipse:

$$\frac{(y - y_M)^2}{e^2} + \frac{(x - x_M)^2}{f^2} = 1$$

⇒

$$y = \pm \frac{e}{f} \cdot \sqrt{f^2 - (x - x_M)^2} + y_M$$

⇒

$$y' = \frac{e}{f} \cdot \frac{x_M - x}{\sqrt{f^2 - (x_M - x)^2}}$$

In  $y'$  kann  $y$  eingesetzt werden.

$$y - y_M = \pm \frac{e}{f} \cdot \sqrt{f^2 - (x - x_M)^2}$$

Somit ergibt sich dann für  $y'$ .

$$y' = \frac{x_M - x}{y - y_M}$$

⇒

$$y^E = \pm \frac{e}{f} \cdot \sqrt{f^2 - (x - x_M)^2} + y_M$$

## 1.5 Ermittlung der Regressionsparameter $f$ und $e$

### 1.5.1 Hauptachsenparameter $f$

Parameter  $f$ Die Ermittlung von  $f$  erfolgt über das Nullsetzen der ersten Ableitung von  $F$ .

$$F(e) = \{x^2\} - 2x \cdot \{x\} + n \cdot x^2 + \{y^2\} - 2y \cdot \{y\} + n \cdot y^2$$

 $\Rightarrow$ 

$$F(e)' = 0 = \begin{cases} +n \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{f^2 - (x - x_M)^2} \cdot (e \cdot \sqrt{f^2 - (x - x_M)^2} + y_M \cdot f)}{f^2} \\ -2 \cdot \frac{\sqrt{f^2 - (x - x_M)^2}}{f} \cdot \{y\} \end{cases}$$

 $\Rightarrow$ 

$$e \cdot \sqrt{f^2 - (x - x_M)^2} + y_M \cdot f - \frac{\{y\}}{n} \cdot f = 0$$

 $\Rightarrow$ 

$$f^2 = (x - x_M)^2$$

 $\Rightarrow$ 

$$\sigma_X^2 = \frac{\{f^2\}}{n} = \frac{\{(x - x_M)^2\}}{n}$$

1.5.2 Nebenachsenparameter  $e$ 

Die Ermittlung eines nichttrivialen Wertes von  $e$  erfolgt über die Evolute. Dabei wird der Mittelpunkt der Abrollfunktion festgehalten in  $P_M(x_M; y_M)$ .

Parameter  $e$ 

$$F(x) = \{x^2\} - 2x \cdot \{x\} + n \cdot x^2 + \{y^2\} - 2y \cdot \{y\} + n \cdot y^2$$

⇒

$$F' = -2 \cdot \{x\} + 2n \cdot x - 2y' \cdot \{y\} + 2n \cdot y \cdot y' = 0$$

⇒

$$F'' = 0 + 2n - 2y'' \cdot \{y\} + 2n \cdot (y \cdot y'' + y' \cdot y') = 0$$

⇒

$$1 + y \cdot y'' - y'' \cdot \frac{\{y\}}{n} + y'^2 = 0$$

⇒

$$1 + y'' \cdot (y - y_M) + y'^2 = 0$$

Wenn  $f = x - x_M$  dann ist  $y - y_M$  das gesuchte  $e$  und es wird substituiert.

$$1 + y'' \cdot e + y'^2 = 0$$

⇒

$$e = -\frac{1 + y'^2}{y''}$$

Ist die Vermutung von  $e = y - y_M$  richtig, dann muss obiger Ausdruck wahr sein. Dieser Nachweis kann leicht über die Funktionsgleichung der Evolute einer Funktion erbracht werden.

Bei der parametrischen Evolutenfunktion gilt, für den Wert  $x_M$ :

$$x_M = x - \frac{1 + y'^2}{y''} \cdot y'$$

⇒

$$\frac{x_M - x}{y'} = -\frac{1 + y'^2}{y''}$$

Der rechte Term ersetzt den rechten Term von  $e$ .

$$\frac{x_M - x}{y'} = e$$

⇒

$$e = \frac{x_M - x}{\frac{x_M - x}{y - y_M}} = y - y_M$$

⇒

$$\sigma_Y^2 = \frac{\{e^2\}}{n} = \frac{\{(y - y_M)^2\}}{n}$$

## 1.6 Nachweise der erfolgreichen Minimierung von $F$

### 1.6.1 Nachweis, dass die Nebenachse die Fehlerfunktion $F$ minimiert

Bedingung I

Der Nachweis, dass  $F$  für ermitteltes  $d$  ein Minimum ist.

$$F'(d) = 0 - 0 + 2 \cdot n \cdot \frac{1}{c^2} > 0$$

Da gilt,  $F'(d)$  ist immer größer Null, ist die Fehlerfunktion im Minimum für  $d$  und  $y^\perp$  ermittelt.

**1.6.2 Nachweis, dass die Ellipse die Fehlerfunktion  $F$  minimiert**

Im vorhergehenden Abschnitt ist die zweite Ableitung der Fehlerfunktion ermittelt worden. Über diese kann der Nachweis geführt werden, dass eine Ellipse mit ihren Parametern  $e$  und  $f$  die Fehlerfunktion minimiert. Es muss nachgewiesen werden, dass gilt:

Bedingung II

$$F'' = n - y'' \cdot \{y\} + n \cdot (y \cdot y'' + y' \cdot y') > 0$$

⇒

$$1 + y'' \cdot (y - y_M) + y'^2 > 0$$

Die Ellipsengleichung ist bekannt und dessen Ableitungen. (Im folgenden wird nur der positive Funktionsterm betrachtet. Für den negativen Teil gilt der Nachweis analog.) Das Quadrat der ersten Ableitung wird ermittelt.

$$y - y_M = \frac{e}{f} \cdot \sqrt{f^2 - (x - x_M)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{y - y_M} \cdot \frac{f}{e} = \frac{1}{\sqrt{f^2 - (x - x_M)^2}}$$

⇒

$$y' = -\frac{e}{f} \cdot \frac{x - x_M}{\sqrt{f^2 - (x - x_M)^2}} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{x_M - x}{y - y_M}$$

⇒

$$y'^2 = \frac{(x_M - x)^2}{(y - y_M)^2}$$

Die zweite Ableitung wird berechnet.

$$y'' = -\frac{e \cdot f}{\sqrt{(f^2 - (x - x_M)^2)^3}}$$

⇒

$$y'' = -\frac{(x - x_M)^4}{(y - y_M)^5}$$

Die Berechneten Werte werden in die Bedingungsgleichung eingesetzt.

$$1 + y'' \cdot (y - y_M) + y'^2 > 0$$

⇒

$$1 - \frac{(x - x_M)^4}{(y - y_M)^5} \cdot (y - y_M) + \frac{(x_M - x)^2}{(y - y_M)^2} > 0$$

⇒

$$(y - y_M)^4 - (x - x_M)^4 + (y - y_M)^2 \cdot (x_M - x)^2 > 0$$

⇒

$$(y - y_M)^4 + (y - y_M)^2 \cdot (x_M - x)^2 > (x - x_M)^4$$

⇒

$$f^4 + f^2 \cdot e^2 > e^4$$

Da per Definition die Hauptachse  $f$  größer ist als die Nebenachse  $e$  also gilt:

$$f > e$$

So gilt das auch für die vierte Potenz der Hauptachsen.

$$f^4 > e^4$$

Insbesondere ist diese Aussage richtig, wenn zu  $f^4$  noch positive Werte  $f^2 \cdot e^2$  dazu summiert werden. Daher ist obige Relation richtig und die Ellipse ist eine Funktion, welche die Fehlerfunktion  $F$  minimiert.

Auch für den Sonderfall der Ellipse  $f = e$  was dem Kreis entspricht, ist die Fehlerfunktion  $F$  im Minimum.

$$f^4 + f^2 \cdot f^2 > f^4$$

⇒

$$2 \cdot f^4 > f^4$$



## 2 Elliptische Regression im Besonderen

### 2.1 Erweiterung auf eine gekippte Ellipse $y^\varphi$

Der Kippwinkel  $\varphi$  errechnet sich aus dem Anstieg der Hauptachsenfunktion  $y$ .

Kippwinkel  $\varphi$

$$\varphi = \arctan a$$

⇒

$$\varphi = \arctan \frac{\{x\} \cdot \{y\} - n \cdot \{xy\}}{\{x\}^2 - n \cdot \{x^2\}}$$

Dann erweitert sich die regressierte Ellipsenfunktion zu:

$$\frac{(x - x_M)^2}{f^2} + \frac{(y - y_M)^2}{e^2} = 1$$

⇒

$$\frac{((x - x_M) \cdot \cos \varphi + (y - y_M) \cdot \sin \varphi)^2}{f^2} + \frac{((y - y_M) \cdot \cos \varphi - (x - x_M) \cdot \sin \varphi)^2}{e^2} = 1$$

⇒

$$y^\varphi = y_M + \frac{B}{A} \cdot (x - x_M) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_M)^2}$$

Mit:

$$A = e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi$$

$$B = (f^2 - e^2) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi$$

Wobei:

$$\sin^2 \varphi = \sin^2 \arctan a = \frac{a^2}{1 + a^2}$$

$$\cos^2 \varphi = \cos^2 \arctan a = \frac{1}{1 + a^2}$$

$$\cos \varphi \cdot \sin \varphi = \cos \arctan a \cdot \sin \arctan a = \frac{a}{1 + a^2}$$

⇒

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2}$$

$$B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2}$$

⇒

$$\frac{B}{A} = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2}$$

## 2.2 Korrelationskoeffizient $\rho_{XY}$

Koeffizient  $\rho$ 

Betrachtet man die ermittelte Ellipse als Höhenlinie einer zweidimensionalen Normalverteilung, dann lässt sich der Korrelationskoeffizient  $\rho_{XY}$  ermitteln. So gilt für die Hauptachse:

$$y = a \cdot x + b$$

 $\Rightarrow$ 

$$y = a \cdot (x - x_M) + y_M$$

 $\Rightarrow$ 

$$y - y_M = a \cdot (x - x_M)$$

Transformiert für die zweidimensionale Normalverteilung:

$$y - \mu_Y = \rho_{XY} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot (x - \mu_X)$$

Damit ist  $\rho_{XY}$  ermittelt.

$$\rho_{XY} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = a$$

 $\Rightarrow$ 

$$\rho_{XY} = a \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$$

 $\Rightarrow$ 

$$\rho_{XY} = a \cdot \sqrt{\frac{\{f^2\}}{\{e^2\}}} = a \cdot \sqrt{\frac{\{(y - y_M)^2\}}{\{(x - x_M)^2\}}}$$

## 2.3 Exzentrizitäten $\epsilon$

### 2.3.1 Lineare Exzentrizität $\epsilon_L$

Laut allgemeiner Definition:

$$\epsilon_L^2 = |\{e^2\} - \{f^2\}|$$

Exzentrizität  $\epsilon$

$\Rightarrow$

$$\epsilon_L = \sqrt{|\{e^2\} - \{f^2\}|}$$

### 2.3.2 Numerische Exzentrizität $\epsilon_N$

Laut allgemeiner Definition:

$$\epsilon_N^2 = \frac{\epsilon_L^2}{MAX(\{e^2\}; \{f^2\})}$$

$\Rightarrow$

$$\epsilon_N^2 = \frac{|\{e^2\} - \{f^2\}|}{MAX(\{e^2\}; \{f^2\})}$$

$\Rightarrow$

$$\epsilon_N = \sqrt{\frac{|\{e^2\} - \{f^2\}|}{MAX(\{e^2\}; \{f^2\})}}$$

### 3 Anhang

Beispiel I

#### 3.1 Beispiel I

##### 3.1.1 Daten

$x_i$	$y_i$	$i$	$x_i \cdot x_i$	$x_i \cdot y_i$	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$
128	100	1	16 384	12 800	321 489	121 627
256	250	2	65 536	64 000	192 721	39 502
440	510	3	193 600	224 400	65 025	3 752
640	160	4	409 600	102 400	3 025	83 376
768	400	5	589 824	307 200	5 329	2 377
896	520	6	802 816	465 920	40 401	5 077
1 152	750	7	1 327 104	864 000	208 849	90 752
1 280	900	8	1 638 400	1 152 000	342 225	203 627
5 560	3 590	8	5 043 264	3 192 720	1 179 064	550 090

## 3.1.2 Ergebnisse, numerisch

Aus den obigen Zahlen folgt:

$$a = \frac{\{x \cdot y\} \cdot n - \{x\} \cdot \{y\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{3192720 \cdot 8 - 5560 \cdot 3590}{5043264 \cdot 8 - 5560^2} = \frac{5581360}{9432512} = 0,5928$$

⇒

$$b = \frac{\{x \cdot x\} \cdot \{y\} - \{x \cdot y\} \cdot \{x\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{5043264 \cdot 3590 - 3192720 \cdot 5560}{5043264 \cdot 8 - 5560^2} = \frac{353794560}{9432512} = 37,5079$$

⇒

$$c = -\frac{1}{a} = -\frac{9432512}{5591360} = -1,6869$$

⇒

$$d = \frac{\{y\}}{n} - c \cdot \frac{\{x\}}{n} = \frac{3590}{8} + 1,6869 \cdot \frac{5560}{8} = 1621,1455$$

⇒

$$x_M = \mu_X = \frac{5560}{8} = 695 \quad y_M = \mu_Y = \frac{3590}{8} = 448,75$$

Oder:

$$\mu_X = a \cdot \frac{d - b}{a^2 + 1} = 0,5928 \cdot \frac{1621,1455 - 37,5079}{0,5928^2 + 1} = 694,666$$

⇒

$$\mu_Y = \frac{b + d \cdot a^2}{1 + a^2} = \frac{37,5079 + 1621,1455 \cdot 0,5928^2}{1 + 0,5928^2} = 449,306$$

Sowie:

$$\sigma_X^2 = \frac{\{f^2\}}{n} = \frac{\{(x - x_M)^2\}}{n} = \frac{1179064}{8} = 147383$$

⇒

$$\sigma_X \equiv f = 383,9$$

Und:

$$\sigma_Y^2 = \frac{\{e^2\}}{n} = \frac{\{(y - y_M)^2\}}{n} = \frac{550090}{8} = 68761,25$$

⇒

$$\sigma_Y \equiv e = 262,22$$

Weiterhin:

$$\varphi = \arctan a = \arctan 0,5928 = 30,66^\circ \equiv 0,535$$

$$\rho_{XY} = a \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} = 0,5928 \cdot \frac{383,9}{262,22} = 0,868$$

$$\varepsilon_L = \sqrt{|e^2 - f^2|} = \sqrt{|68761,25 - 147383|} = 280,4$$

$$\varepsilon_N = \sqrt{\frac{|e^2 - f^2|}{\text{MAX}(e^2; f^2)}} = \frac{280,4}{\sqrt{\text{MAX}(68761,25; 147383)}} = \frac{280,4}{\sqrt{147383}} = 0,73$$

Letztendlich:

$$A = \frac{262,22^2 \cdot 0,5928^2 + 383,9^2}{1 + 0,5928^2} = 126935,44$$

$$B = 0,5928 \cdot \frac{383,9^2 - 262,22^2}{1 + 0,5928^2} = 34486,8$$

⇒

$$\frac{e \cdot f}{A} = \frac{262,22 \cdot 383,9}{126935,44} = 0,7931$$

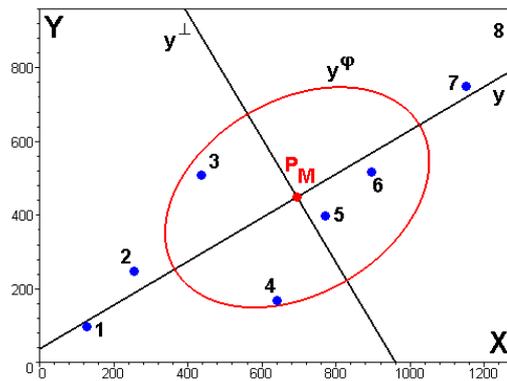
$$\frac{B}{A} = \frac{34486,8}{126935,44} = 0,2717$$

⇒

$$y^\varphi = 448,75 + 0,2717 \cdot (x - 695) \pm 0,7931 \cdot \sqrt{126935,44 - (x - 695)^2}$$

### 3.1.3 Ergebnisse, grafisch

Die grafische Darstellung dazu zeigt, dass vier Punkte innerhalb und 4 außerhalb der Ellipse liegen.



Das Ergebnis der Elliptischen Regression am Beispiel.

Tabellarisch nochmals zusammen gefasst, die Lage der Punkte in Bezug des Funktionsgraphen.

$x_i$	$y_i$	$i$	Lage
128	100	1	X
256	250	2	X
440	510	3	O
640	160	4	O
768	400	5	O
896	520	6	O
1152	750	7	X
1280	900	8	X

Beispiel II

[Rol]

**3.2 Beispiel II****3.2.1 Daten**

$i$	$x_i$	$y_i$
1	+0,192 2	-6,340 0
2	+0,014 9	-7,213 8
3	-0,208 7	-6,511 2
4	-0,001 9	-6,610 3
5	+0,031 8	-6,565 2
6	-0,008 3	-6,662 1
7	-0,320 6	-6,644 1
8	-0,592 7	-7,436 8
8	-0,893 3	-53,983 5

$x_i \cdot x_i$	$x_i \cdot y_i$	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$
+0,036 941	-1,218 548	+0,092 333	+0,166 413
+0,000 222	-0,107 486	+0,016 018	+0,217 027
+0,043 556	+1,358 889	+0,009 416	+0,056 045
+0,000 004	+0,012 560	+0,012 048	+0,018 944
+0,001 011	-0,208 773	+0,020 582	+0,033 393
+0,000 069	+0,055 295	+0,010 684	+0,007 368
+0,102 784	+2,130 098	+0,043 655	+0,010 782
+0,351 293	+4,407 791	+0,231 397	+0,474 531
+0,535 880	+6,429 826	+0,436 133	+0,984 503

### 3.2.2 Ergebnisse, numerisch

Aus den obigen Zahlen folgt:

$$a = \frac{\{x \cdot y\} \cdot n - \{x\} \cdot \{y\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{6,429826 \cdot 8 - 0,8933 \cdot 53,9835}{0,535880 \cdot 8 - 0,8933^2} = \frac{3,215147}{3,489055} = 0,922$$

⇒

$$b = \frac{\{x \cdot x\} \cdot \{y\} - \{x\} \cdot \{y\} \cdot \{x\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{-0,535880 \cdot 53,9835 + 6,429826 \cdot 0,8933}{0,535880 \cdot 8 - 0,8933^2} = \frac{-23,184914}{3,489055} = -6,645$$

⇒

$$c = -\frac{1}{a} = -\frac{3,489055}{3,215147} = -1,085$$

⇒

$$d = \frac{\{y\}}{n} - c \cdot \frac{\{x\}}{n} = \frac{53,9835}{8} - 1,085 \cdot \frac{0,8933}{8} = -6,869$$

⇒

$$x_M = \mu_X = \frac{-0,8933}{8} = -0,112 \quad y_M = \mu_Y = \frac{-53,9835}{8} = -6,748$$

Oder:

$$\mu_X = a \cdot \frac{d - b}{a^2 + 1} = -0,922 \cdot \frac{6,869 - 6,645}{0,922^2 + 1} = -0,112$$

⇒

$$\mu_Y = \frac{b + d \cdot a^2}{1 + a^2} = \frac{6,645 + 6,869 \cdot 0,922^2}{1 + 0,922^2} = -6,748$$

Sowie:

$$\sigma_X^2 = \frac{\{f^2\}}{n} = \frac{\{(x - x_M)^2\}}{n} = \frac{0,436133}{8} = 0,054517$$

⇒

$$\sigma_X \equiv f = 0,234$$

Und:

$$\sigma_Y^2 = \frac{\{e^2\}}{n} = \frac{\{(y - y_M)^2\}}{n} = \frac{0,984503}{8} = 0,123063$$

⇒

$$\sigma_Y \equiv e = 0,351$$

Weiterhin:

$$\varphi = \arctan a = \arctan 0,922 = 42,68^\circ \equiv 0,745$$

$$\rho_{XY} = a \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} = 0,922 \cdot \frac{0,234}{0,351} = 0,922 \cdot \frac{2}{3} = 0,615$$

$$\varepsilon_L = \sqrt{|e^2 - f^2|} = \sqrt{|0,123063 - 0,054517|} = 0,262$$

$$\varepsilon_N = \sqrt{\frac{|e^2 - f^2|}{\text{MAX}(e^2; f^2)}} = \frac{0,262}{\sqrt{\text{MAX}(0,123063; 0,054517)}} = \frac{0,262}{\sqrt{0,123063}} = 0,747$$

Letztendlich:

$$A = \frac{0,123063 \cdot 0,922^2 + 0,054517}{1 + 0,922^2} = 0,086$$

$$B = 0,922 \cdot \frac{0,054517 - 0,123063}{1 + 0,922^2} = -0,034$$

⇒

$$\frac{e \cdot f}{A} = \frac{0,351 \cdot 0,234}{0,086} = 0,955$$

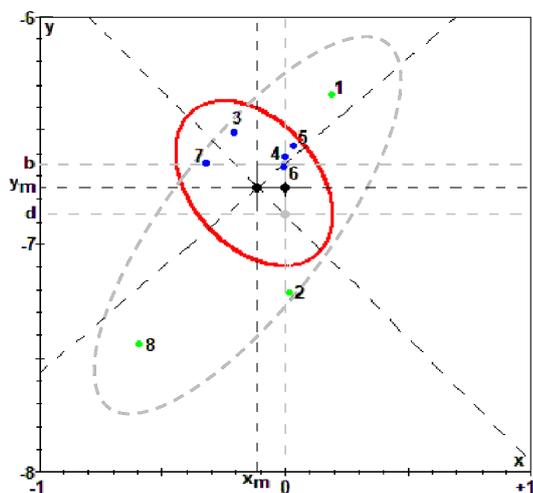
$$\frac{B}{A} = -\frac{0,034}{0,086} = -0,395$$

⇒

$$y^\varphi = -6,748 - 0,395 \cdot (x + 0,112) \pm 0,955 \cdot \sqrt{0,086 - (x + 0,112)^2}$$

### 3.2.3 Ergebnisse, grafisch

Die grafische Darstellung dazu zeigt, dass fünf Punkte innerhalb und drei außerhalb der Ellipse liegen.



Das Ergebnis der Elliptischen Regression am Beispiel.  
Graue Ellipse, angegeben in [Rol], diese ergibt sich aus  
der Regression über die Hauptkomponentenanalyse, siehe unter [Dip].

Tabellarisch nochmals zusammen gefasst, die Lage der Punkte in Bezug des Funktionsgraphen.

$x_i$	$y_i$	$i$	Lage
+0,192 2	-6,340 0	1	X
+0,014 9	-7,213 8	2	X
-0,208 7	-6,511 2	3	O
-0,001 9	-6,610 3	4	O
+0,031 8	-6,565 2	5	O
-0,008 3	-6,662 1	6	O
-0,320 6	-6,644 1	7	O
-0,592 7	-7,436 8	8	X