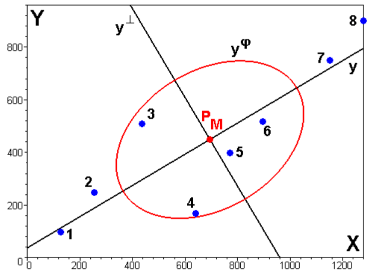
Elliptische Regression



von Datenpunkten

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 17. Oktober 2013 – Letzte Revision: 7. Januar 2024

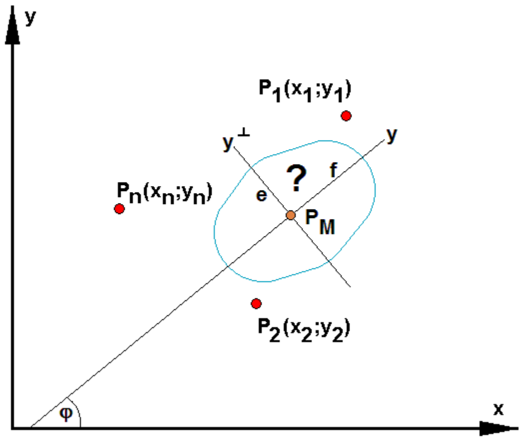
Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

1 Die Elliptische Regression im Allgemeinen

Es soll eine Elliptische Regression mit Datenpunkten P_i durchgeführt werden. Ziel ist es, eine elliptische Funktion zu finden, die eine noch zu ermittelnde Fehlerfunktion F minimiert. Die „Methode der kleinsten Quadrate" ist Grundmethode dieser Regression. [001]ff.



Das Modell der Elliptischen Regression.

Grundsätzlich ist erkennbar, dass folgende Parameter zu berechnen sind:

- Die lineare Funktion der Hauptachse $y = f(x)$
- Die lineare Funktion der Nebenachse $y^\perp = f(x)$
- Der Mittelpunkt P_M mit dessen Abszissenlage x_M
- Der Mittelpunkt P_M mit dessen Ordinatenlage y_M
- Die Hauptachsenlänge f
- Die Nebenachsenlänge e
- Der Kippwinkel φ der Ellipse

Weiterhin ist zu zeigen oder möglich zu berechnen:

- Eine Ellipse erfüllt die Bedingung von F
- Die Exzentrizität(en) ε der Ellipse
- Der lineare Korrelationskoeffizient ρ zwischen x_i und y_i

Ein nachfolgendes Beispiel rundet das Skript ab.

1.1 Die Lineare Regression der Hauptachse y

Hauptachse y

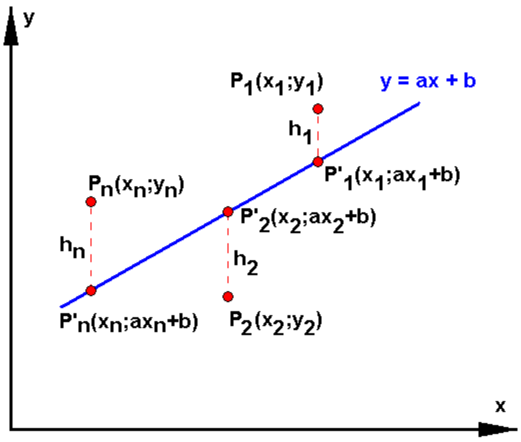
Die lineare Regression der Hauptachse erfolgt über die Regeln der Linearen Regression (siehe dort zur Ermittlung der Koeffizienten a und b und den hier genutzten Syntax)[1]. Ergebnis ist eine lineare Funktion.

$$y = a \cdot x + b$$

Mit a dem Anstieg und b der Inhomogenität der Funktion.

$$a = \frac{\{x\} \cdot \{y\} - n \cdot \{xy\}}{\{x\}^2 - n \cdot \{x^2\}} \qquad b = \frac{\{xy\} \cdot \{x\} - \{y\} \cdot \{x^2\}}{\{x\}^2 - n \cdot \{x^2\}}$$

$\Leftarrow$



Die Lineare Regression über die Methode der kleinsten Quadrate.

[1] www.Zenithpoint.de „Polynomregression von Datenpunkten"

1.2 Die Lineare Regression der Nebenachse $y^{\perp}$

Bekannt sind a und b aus der Linearen Regression. Gesucht ist die orthogonale Funktion $y^{\perp}$, die Nebenachse. Nebenachse $y^{\perp}$

$$y^{\perp} = c \cdot x + d$$

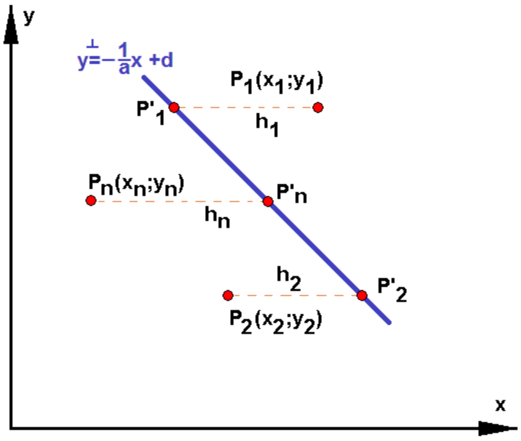
Aus der Forderung der Orthogonalität ist c vorgegeben.

$$c = -\frac{1}{a}$$

$\Rightarrow$

$$c = \frac{n \cdot \{x^2\} - \{x\}^2}{\{x\} \cdot \{y\} - n \cdot \{x \cdot y\}}$$

Die Inhomogenität d muss regressiert werden.



Das genutzte Modell für die Ermittlung der Nebenachse.

Aus den gegebenen Datenpunkten P sind die Punkte $P^{\perp}$ auf dem Funktionsgrafen $y^{\perp}$ gegeben.

$$P_1^{\perp}\left(\frac{1}{c}y_1 - \frac{d}{c}; y_1\right)$$

$$P_2^{\perp}\left(\frac{1}{c}y_2 - \frac{d}{c}; y_2\right)$$

$$\vdots$$

$$P_n^{\perp}\left(\frac{1}{c}y_n - \frac{d}{c}; y_n\right)$$

Der Abstand h zwischen P und $P^{\perp}$ parallel zur Abszisse ist definiert durch:

$$h_1^{\perp} = x_1 - \frac{1}{c}y_1 + \frac{d}{c}$$

$$h_2^{\perp} = x_2 - \frac{1}{c}y_2 + \frac{d}{c}$$

$$\vdots$$

$$h_n^{\perp} = x_n - \frac{1}{c}y_n + \frac{d}{c}$$

Die Fehlerfunktion F wird gebraucht um dessen Minimum zu ermitteln.

$$F = \sum_{i=1}^{n} h_i^{\perp 2}$$

$\Rightarrow$

$$F = \begin{cases} +\left(x_1 - \frac{1}{c}y_1 + \frac{d}{c}\right)^2 \\ +\left(x_2 - \frac{1}{c}y_2 + \frac{d}{c}\right)^2 \\ \vdots \\ +\left(x_n - \frac{1}{c}y_n + \frac{d}{c}\right)^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$F = \begin{cases} +x_1^2 - 2\frac{1}{c}x_1y_1 + 2\frac{d}{c}x_1 - 2\frac{d}{c^2}y_1 + \frac{1}{c^2}y_1^2 + \frac{d^2}{c^2} \\ +x_2^2 - 2\frac{1}{c}x_2y_2 + 2\frac{d}{c}x_2 - 2\frac{d}{c^2}y_2 + \frac{1}{c^2}y_2^2 + \frac{d^2}{c^2} \\ \vdots \\ +x_n^2 - 2\frac{1}{c}x_ny_n + 2\frac{d}{c}x_n - 2\frac{d}{c^2}y_n + \frac{1}{c^2}y_n^2 + \frac{d^2}{c^2} \end{cases}$$

Die Fehlerfunktion kann zusammengefasst werden.

$$F(d) = \left\{x^2\right\} - 2\frac{1}{c}\left\{x \cdot y\right\} + 2\frac{d}{c}\left\{x\right\} - 2\frac{d}{c^2}\left\{y\right\} + \frac{1}{c^2}\left\{y\right\} + n \cdot \frac{d^2}{c^2}$$

Die 1. Ableitung wird ermittelt und Null gesetzt.

$$F(d)' = 0 - 0 + 2\frac{1}{c}\left\{x\right\} - 2\frac{1}{c^2}\left\{y\right\} + 0 + 2 \cdot n \cdot \frac{d}{c^2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$c \cdot \{x\} - \{y\} + n \cdot d = 0$$

Damit ist der Koeffizient d ermittelt.

$$d = \frac{\{y\} - c \cdot \{x\}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$d = \frac{\{y\}}{n} - c \cdot \frac{\{x\}}{n} = y_M - c \cdot x_M = \mu_Y - c \cdot \mu_X$$

1.3 Der Schnittpunkt zwischen Haupt- und Nebenachse P_M

Der Mittelpunkt der zukünftigen zweidimensionalen Verteilung ist der Schnittpunkt der Funktionen y und $y^{\perp}$. Mittelpunkt P_M

$$a \cdot x_M + b = c \cdot x_M + d = -\frac{1}{a} \cdot x_M + d$$

$\Rightarrow$

$$x_M = a \cdot \frac{d-b}{a^2+1}$$

Für y_M:

$$y_M = -\frac{1}{a} \cdot x_M + d$$

$\Rightarrow$

$$y_M = \frac{b + d \cdot a^2}{a^2+1}$$

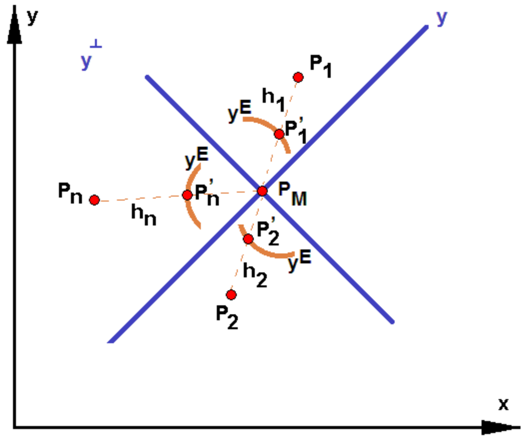
Das sind dann die Mittelwerte der Verteilung.

$$x_M = \mu_X = a \cdot \frac{d-b}{a^2+1} \qquad y_M = \mu_Y = \frac{b + d \cdot a^2}{a^2+1}$$

1.4 Die Ermittlung der elliptischen Regressionsfunktion y^E

Es wurde ein Punkt $P_M\left(x_M; y_M\right)$ gefunden als Schnittpunkt zweier orthogonaler Regressionsgeraden in der Ebene. Sieht man P_M als den zentralen Utopiapoint für eine Vielzahl möglicher Utopiapunkte an, insbesondere für alle regressierten Punkte P_1 bis P_n, dann kann eine Funktion y^E um P_M definiert werden, in der alle Utopiapunkte innerhalb y^E liegen und alle Nadirpunkte außerhalb.

Regression y^E



Modell zur Ermittlung der Regressionsfunktion.

Es wird eine Gerade definiert $\overline{P_iP_M}$. Der Funktionsgraf y^E muss diese Gerade schneiden. Dann ist der Abstand zwischen Schnittpunkt und P_i gegeben.

$$\begin{aligned}
h_1 &= \sqrt{\left(x_1 - x^E\right)^2 + \left(y_1 - y^E\right)^2} \\
h_2 &= \sqrt{\left(x_2 - x^E\right)^2 + \left(y_2 - y^E\right)^2} \\
&\vdots \\
h_n &= \sqrt{\left(x_n - x^E\right)^2 + \left(y_n - y^E\right)^2}
\end{aligned}$$

Die Fehlerfunktion F wird ermittelt und umgestellt (Der Index E wird folgend nicht weiter mitgeführt der Einfachheit halber).

$$F = \sum_{i=1}^{n} h_i^{\perp 2}$$

$\Rightarrow$

$$F = \begin{cases} +\left(x_1 - x\right)^2 + \left(y_1 - y\right)^2 \\ +\left(x_2 - x\right)^2 + \left(y_2 - y\right)^2 \\ \vdots \\ +\left(x_n - x\right)^2 + \left(y_n - y\right)^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$F = \begin{cases} +x_1^2 - 2x_1 \cdot x + x^2 + y_1^2 - 2y_1 \cdot y + y^2 \\ +x_2^2 - 2x_2 \cdot x + x^2 + y_2^2 - 2y_2 \cdot y + y^2 \\ \vdots \\ +x_n^2 - 2x_n \cdot x + x^2 + y_n^2 - 2y_n \cdot y + y^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$F\left(x; f\left(x\right) = y\right) = \left\{x^2\right\} - 2x \cdot \left\{x\right\} + n \cdot x^2 + \left\{y^2\right\} - 2y \cdot \left\{y\right\} + n \cdot y^2$$

Um das Minimum von F zu finden, wird differenziert und Null gesetzt.

$$F' = 0 - 2 \cdot \{x\} + 2n \cdot x + 0 - 2y' \cdot \{y\} + 2n \cdot y \cdot y' = 0$$

$\Rightarrow$

$$y' \cdot \left(y - \frac{\{y\}}{n}\right) = \frac{\{x\}}{n} - x$$

⇒

$$y' \cdot (y - \mu_Y) = \mu_X - x$$

⇒

$$y' = \frac{\mu_X - x}{y - \mu_Y} = \frac{x_M - x}{y - y_M}$$

Die Differentialgleichung 1. Ordnung stellt unsere gesuchte Funktion dar. Eine allgemeine Lösung der DGL wird hier nicht dargestellt. Über etwas Erfahrung ist zu erkennen, dass die Ellipsengleichung eine partikuläre Lösung der DGL darstellt. So ist gegeben für eine (noch) nicht gedrehte aber schon verschobene Ellipse:

$$\frac{(y - y_M)^2}{e^2} + \frac{(x - x_M)^2}{f^2} = 1$$

⇒

$$y = \pm\frac{e}{f} \cdot \sqrt{f^2 - (x - x_M)^2} + y_M$$

⇒

$$y' = \frac{e}{f} \cdot \frac{x_M - x}{\sqrt{f^2 - (x_M - x)^2}}$$

In y' kann y eingesetzt werden.

$$y - y_M = \pm\frac{e}{f} \cdot \sqrt{f^2 - (x - x_M)^2}$$

Somit ergibt sich dann für y'.

$$y' = \frac{x_M - x}{y - y_M}$$

⇒

$$y^E = \pm\frac{e}{f} \cdot \sqrt{f^2 - (x - x_M)^2} + y_M$$

1.5 Die Ermittlung der Regressionsparameter f und e

1.5.1 Hauptachsenparameter f

Parameter f

Die Ermittlung von f erfolgt über das Nullsetzen der ersten Ableitung von F.

$$F\left(e\right) = \left\{x^2\right\} - 2x \cdot \{x\} + n \cdot x^2 + \left\{y^2\right\} - 2y \cdot \{y\} + n \cdot y^2$$

$\Rightarrow$

$$F\left(e\right)' = 0 = \begin{cases} +n \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{f^2 - (x - x_M)^2} \cdot \left(e \cdot \sqrt{f^2 - (x - x_M)^2} + y_M \cdot f\right)}{f^2} \\ -2 \cdot \frac{\sqrt{f^2 - (x - x_M)^2}}{f} \cdot \{y\} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$e \cdot \sqrt{f^2 - \left(x - x_M\right)^2} + y_M \cdot f - \frac{\{y\}}{n} \cdot f = 0$$

$\Rightarrow$

$$f^2 = \left(x - x_M\right)^2$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_X^2 = \frac{\left\{f^2\right\}}{n} = \frac{\left\{\left(x - x_M\right)^2\right\}}{n}$$

1.5.2 Nebenachsenparameter e

Die Ermittlung eines nichttrivialen Wertes von e erfolgt über die Evolute. Dabei wird der Mittelpunkt der Abrollfunktion festgehalten in $P_M\left(x_M;y_M\right)$. Parameter e

$$F\left(x\right)=\left\{x^2\right\}-2x\cdot\left\{x\right\}+n\cdot x^2+\left\{y^2\right\}-2y\cdot\left\{y\right\}+n\cdot y^2$$

$\Rightarrow$

$$F'=-2\cdot\left\{x\right\}+2n\cdot x-2y'\cdot\left\{y\right\}+2n\cdot y\cdot y'=0$$

$\Rightarrow$

$$F''=0+2n-2y''\cdot\left\{y\right\}+2n\cdot\left(y\cdot y''+y'\cdot y'\right)=0$$

$\Rightarrow$

$$1+y\cdot y''-y''\cdot\frac{\left\{y\right\}}{n}+y'^2=0$$

$\Rightarrow$

$$1+y''\cdot\left(y-y_M\right)+y'^2=0$$

Wenn $f=x-x_M$ dann ist $y-y_M$ das gesuchte e und es wird substituiert.

$$1+y''\cdot e+y'^2=0$$

$\Rightarrow$

$$e=-\frac{1+y'^2}{y''}$$

Ist die Vermutung von $e=y-y_M$ richtig, dann muss obiger Ausdruck wahr sein. Dieser Nachweis kann leicht über die Funktionsgleichung der Evolute einer Funktion erbracht werden.

Bei der parametrischen Evolutenfunktion gilt, für den Wert x_M:

$$x_M=x-\frac{1+y'^2}{y''}\cdot y'$$

$\Rightarrow$

$$\frac{x_M-x}{y'}=-\frac{1+y'^2}{y''}$$

Der rechte Term ersetzt den rechten Term von e.

$$\frac{x_M-x}{y'}=e$$

$\Rightarrow$

$$e=\frac{x_M-x}{\frac{x_M-x}{y-y_M}}=y-y_M$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_Y^2=\frac{\left\{e^2\right\}}{n}=\frac{\left\{\left(y-y_M\right)^2\right\}}{n}$$

1.6 Die Nachweise der erfolgreichen Minimierung von F

1.6.1 Nachweis, dass die Nebenachse die Fehlerfunktion F minimiert

Bedingung I

Der Nachweis, dass F für ermitteltes d ein Minimum ist.

$$F\left(d\right)' = 0 - 0 + 2 \cdot n \cdot \frac{1}{c^2} > 0$$

Da gilt, $F\left(d\right)'$ ist immer größer Null, ist die Fehlerfunktion im Minimum für d und $y^{\perp}$ ermittelt.

1.6.2 Nachweis, dass die Ellipse die Fehlerfunktion F minimiert

Im vorhergehenden Abschnitt ist die zweite Ableitung der Fehlerfunktion ermittelt worden. Über diese kann der Nachweis geführt werden, dass eine Ellipse mit ihren Parametern e und f die Fehlerfunktion minimiert. Es muss nachgewiesen werden, dass gilt: Bedingung II

$$F'' = n - y'' \cdot \{y\} + n \cdot (y \cdot y'' + y' \cdot y') > 0$$

$\Rightarrow$

$$1 + y'' \cdot (y - y_M) + y'^2 > 0$$

Die Ellipsengleichung ist bekannt und dessen Ableitungen. (Im folgenden wird nur der positive Funktionsterm betrachtet. Für den negativen Teil gilt der Nachweis analog.) Das Quadrat der ersten Ableitung wird ermittelt.

$$y - y_M = \frac{e}{f} \cdot \sqrt{f^2 - (x - x_M)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{y - y_M} \cdot \frac{f}{e} = \frac{1}{\sqrt{f^2 - (x - x_M)^2}}$$

$\Rightarrow$

$$y' = -\frac{e}{f} \cdot \frac{x - x_M}{\sqrt{f^2 - (x - x_M)^2}} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{x_M - x}{y - y_M}$$

$\Rightarrow$

$$y'^2 = \frac{(x_M - x)^2}{(y - y_M)^2}$$

Die zweite Ableitung wird berechnet.

$$y'' = -\frac{e \cdot f}{\sqrt{\left(f^2 - (x - x_M)^2\right)^3}}$$

$\Rightarrow$

$$y'' = -\frac{(x - x_M)^4}{(y - y_M)^5}$$

Die Berechneten Werte werden in die Bedingungsgleichung eingesetzt.

$$1 + y'' \cdot (y - y_M) + y'^2 > 0$$

$\Rightarrow$

$$1 - \frac{(x - x_M)^4}{(y - y_M)^5} \cdot (y - y_M) + \frac{(x_M - x)^2}{(y - y_M)^2} > 0$$

$\Rightarrow$

$$(y - y_M)^4 - (x - x_M)^4 + (y - y_M)^2 \cdot (x_M - x)^2 > 0$$

$\Rightarrow$

$$(y - y_M)^4 + (y - y_M)^2 \cdot (x_M - x)^2 > (x - x_M)^4$$

$\Rightarrow$

$$f^4 + f^2 \cdot e^2 > e^4$$

Da per Definition die Hauptachse f größer ist als die Nebenachse e also gilt:

$$f > e$$

So gilt das auch für die vierte Potenz der Hauptachsen.

$$f^4 > e^4$$

Insbesondere ist diese Aussage richtig, wenn zu f^4 noch positive Werte $f^2 \cdot e^2$ dazu summiert werden. Daher ist obige Relation richtig und die Ellipse ist eine Funktion, welche die Fehlerfunktion F minimiert.

Auch für den Sonderfall der Ellipse $f = e$ was dem Kreis entspricht, ist die Fehlerfunktion F im Minimum.

$$f^4 + f^2 \cdot f^2 > f^4$$

$\Rightarrow$

$$2 \cdot f^4 > f^4$$

2 Die Elliptische Regression im Besonderen

2.1 Die Erweiterung auf eine gekippte Ellipse y^{φ}

Der Kippwinkel φ errechnet sich aus dem Anstieg der Hauptachsenfunktion y. Kippwinkel φ

$$\varphi = \arctan a$$

$\Rightarrow$

$$\varphi = \arctan \frac{\{x\} \cdot \{y\} - n \cdot \{xy\}}{\{x\}^2 - n \cdot \{x^2\}}$$

Dann erweitert sich die regressierte Ellipsenfunktion zu:

$$\frac{(x - x_M)^2}{f^2} + \frac{(y - y_M)^2}{e^2} = 1$$

$\Rightarrow$

$$\frac{((x - x_M) \cdot \cos\varphi + (y - y_M) \cdot \sin\varphi)^2}{f^2} + \frac{((y - y_M) \cdot \cos\varphi - (x - x_M) \cdot \sin\varphi)^2}{e^2} = 1$$

$\Rightarrow$

$$y^{\varphi} = y_M + \frac{B}{A} \cdot (x - x_M) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (x - x_M)^2}$$

Mit:

$$A = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi$$
$$B = \left(f^2 - e^2\right) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi$$

Wobei:

$$\sin^2\varphi = \sin^2 \arctan a = \frac{a^2}{1 + a^2}$$
$$\cos^2\varphi = \cos^2 \arctan a = \frac{1}{1 + a^2}$$
$$\cos\varphi \cdot \sin\varphi = \cos\arctan a \cdot \sin\arctan a = \frac{a}{1 + a^2}$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2}$$
$$B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B}{A} = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{e^2 \cdot a^2 + f^2}$$

2.2 Der Korrelationskoeffizient ρ_{XY}

Koeffizient ρ

Betrachtet man die ermittelte Ellipse als Höhenlinie einer zweidimensionalen Normalverteilung, dann lässt sich der Korrelationskoeffizient ρ_{XY} ermitteln. So gilt für die Hauptachse:

$$y = a \cdot x + b$$

$\Rightarrow$

$$y = a \cdot (x - x_M) + y_M$$

$\Rightarrow$

$$y - y_M = a \cdot (x - x_M)$$

Transformiert für die zweidimensionale Normalverteilung:

$$y - \mu_Y = \rho_{XY} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} \cdot (x - \mu_X)$$

Damit ist ρ_{XY} ermittelt.

$$\rho_{XY} \cdot \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = a$$

$\Rightarrow$

$$\rho_{XY} = a \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}$$

$\Rightarrow$

$$\rho_{XY} = a \cdot \sqrt{\frac{\{f^2\}}{\{e^2\}}} = a \cdot \sqrt{\frac{\left\{(y - y_M)^2\right\}}{\left\{(x - x_M)^2\right\}}}$$

2.3 Die Exzentrizitäten ϵ

2.3.1 Lineare Exzentrizität ϵ_L

Laut allgemeiner Definition: Exzentrizität ε

$$\varepsilon_L^2 = \left|\left\{e^2\right\} - \left\{f^2\right\}\right|$$

$\Rightarrow$

$$\varepsilon_L = \sqrt{|\{e^2\} - \{f^2\}|}$$

2.3.2 Numerische Exzentrizität ϵ_N

Laut allgemeiner Definition:

$$\varepsilon_N^2 = \frac{\varepsilon_L^2}{MAX\left(\{e^2\};\{f^2\}\right)}$$

⇒

$$\varepsilon_N^2 = \frac{\left|\{e^2\} - \{f^2\}\right|}{MAX\left(\{e^2\};\{f^2\}\right)}$$

⇒

$$\varepsilon_N = \sqrt{\frac{|\{e^2\} - \{f^2\}|}{MAX\left(\{e^2\};\{f^2\}\right)}}$$

3 Ein Beispiel

3.1 Die Datenurliste

Beispiel

x_i	y_i	i	$x_i \cdot x_i$	$x_i \cdot y_i$	$(x_i - x_M)^2$	$(y_i - y_M)^2$
128	100	1	16 384	12 800	321 489	121 627
256	250	2	65 536	64 000	192 721	39 502
440	510	3	193 600	224 400	65 025	3 752
640	160	4	409 600	102 400	3 025	83 376
768	400	5	589 824	307 200	5 329	2 377
896	520	6	802 816	465 920	40 401	5 077
1 152	750	7	1 327 104	864 000	208 849	90 752
1 280	900	8	1 638 400	1 152 000	342 225	203 627
5 560	3 590	8	5 043 264	3 192 720	1 179 064	550 090

Konkretes Beispiel einer Elliptischen Regression.

3.2 Die numerischen Ergebnisse

Aus den obigen Zahlen folgt:

$$a = \frac{\{x \cdot y\} \cdot n - \{x\} \cdot \{y\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{3192720 \cdot 8 - 5560 \cdot 3590}{5043264 \cdot 8 - 5560^2} = \frac{5581360}{9432512} = 0,5928$$

$\Rightarrow$

$$b = \frac{\{x \cdot x\} \cdot \{y\} - \{x \cdot y\} \cdot \{x\}}{\{x \cdot x\} \cdot n - \{x\} \cdot \{x\}} = \frac{5043264 \cdot 3590 - 3192720 \cdot 5560}{5043264 \cdot 8 - 5560^2} = \frac{353794560}{9432512} = 37,5079$$

$\Rightarrow$

$$c = -\frac{1}{a} = -\frac{9432512}{5591360} = -1,6869$$

$\Rightarrow$

$$d = \frac{\{y\}}{n} - c \cdot \frac{\{x\}}{n} = \frac{3590}{8} + 1,6869 \cdot \frac{5560}{8} = 1621,1455$$

$\Rightarrow$

$$x_M = \mu_X = \frac{5560}{8} = 695 \qquad y_M = \mu_Y = \frac{3590}{8} = 448,75$$

Oder:

$$\mu_X = a \cdot \frac{d-b}{a^2+1} = 0,5928 \cdot \frac{1621,1455 - 37,5079}{0,5928^2 + 1} = 694,666$$

$\Rightarrow$

$$\mu_Y = \frac{b + d \cdot a^2}{1 + a^2} = \frac{37,5079 + 1621,1455 \cdot 0,5928^2}{1 + 0,5928^2} = 449,306$$

Sowie:

$$\sigma_X^2 = \frac{\{f^2\}}{n} = \frac{\left\{(x - x_M)^2\right\}}{n} = \frac{1179064}{8} = 147383$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_X \equiv f = 383,9$$

Und:

$$\sigma_Y^2 = \frac{\{e^2\}}{n} = \frac{\left\{(y - y_M)^2\right\}}{n} = \frac{550090}{8} = 68761,25$$

$\Rightarrow$

$$\sigma_Y \equiv e = 262,22$$

Weiterhin:

$$\varphi = \arctan a = \arctan 0,5928 = 30,66° \equiv 0,535$$

$$\rho_{XY} = a \cdot \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} = 0,5928 \cdot \frac{383,9}{262,22} = 0,868$$

$$\varepsilon_L = \sqrt{|e^2 - f^2|} = \sqrt{|68761,25 - 147383|} = 280,4$$

$$\varepsilon_N = \sqrt{\frac{|e^2 - f^2|}{MAX\,(e^2; f^2)}} = \frac{280,4}{\sqrt{MAX\,(68761,25; 147383)}} = \frac{280,4}{\sqrt{147383}} = 0,73$$

Letztendlich:

$$A = \frac{262,22^2 \cdot 0,5928^2 + 383,9^2}{1 + 0,5928^2} = 126935,44$$

$$B = 0,5928 \cdot \frac{383,9^2 - 262,22^2}{1 + 0,5928^2} = 34486,8$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e \cdot f}{A} = \frac{262,22 \cdot 383,9}{126935,44} = 0,7931$$

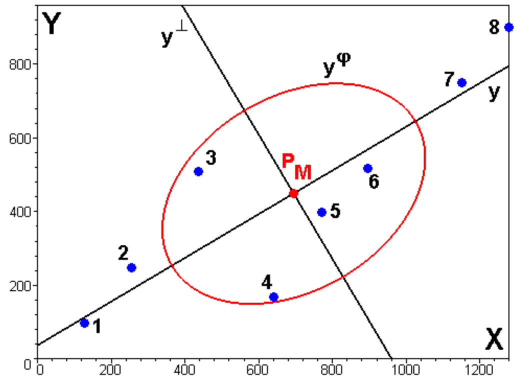
$$\frac{B}{A} = \frac{34486,8}{126935,44} = 0,2717$$

$\Rightarrow$

$$y^\varphi = 448,75 + 0,2717 \cdot (x - 695) \pm 0,7931 \cdot \sqrt{126935,44 - (x - 695)^2}$$

3.3 Die grafischen Ergebnisse

Die grafische Darstellung dazu zeigt, dass vier Punkte innerhalb und 4 außerhalb der Ellipse liegen.



Das Ergebnis der Elliptischen Regression am Beispiel.

Tabellarisch nochmals zusammen gefasst, die Lage der Punkte in Bezug des Funktionsgrafen.

x_i	y_i	i	Test
128	100	1	X
256	250	2	X
440	510	3	O
640	160	4	O
768	400	5	O
896	520	6	O
1 152	750	7	X
1 280	900	8	X

Auswertende Tabelle der Beispielspunkte. (X = Nadirpoint, O = Utopiapoint).

LaTeX 2ε