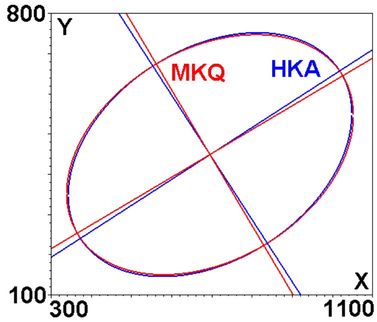
Elliptische Regression von Datenpunkten



über die Hauptkomponentenanalyse

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 03. September 2016 – Letzte Revision: 7. Januar 2024

Inhaltsverzeichnis

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

[Dip] Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Reduzierte Lineare Regression - Fehlen von Anstieg oder Inhomogenität, Hinzufügen eines definierten Punktes. www.Zenithpoint.de.

---

1 Durchführung der Elliptischen Regression über die Hauptkomponentenanalyse

1.1 Ermittlung der Haupt- und Nebenachse der zu regressierenden Ellipse

Gegeben sei der Datensatz aus der Elliptischen Regression mittels Bestimmung der Achsen- und Ellipsenfunktion nach der Methode der kleinsten Quadrate. [001]

Die Durchführung der Elliptischen Regression soll anhand dieses Beispiels mittels der Hauptkomponentenanalyse erfolgen. Durchführung

i	X_i	Y_i	$X_i - \bar{X}$	$Y_i - \bar{Y}$	$\left(X_i - \bar{X}\right)^2$	$\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2$	$\left(X_i - \bar{X}\right) \cdot \left(Y_i - \bar{Y}\right)$
1	128	100	-567	-349	321 489	121 801	+197 883
2	256	250	-439	-199	192 721	39 601	+87 361
3	440	510	-255	+61	65 025	3 721	-15 555
4	640	160	-55	-289	3 025	83 521	+15 895
5	768	400	+73	-49	5 329	2 401	-3 577
6	896	520	+201	+71	40 401	5 041	+14 271
7	1152	750	+457	+301	208 849	90 601	+137 557
8	1280	900	+585	+451	342 225	203 401	+263 835
Σ	5560	3590	0	0	1 179 064	550 090	+697 670

Mit:

$$\bar{X} = \frac{\{X_i\}}{n} \qquad \bar{Y} = \frac{\{Y_i\}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{X} = \frac{5560}{8} = 695 \qquad \bar{Y} = \frac{3590}{8} = 449$$

Ergeben sich folgende Varianzen und Kovarianzen:

$$V_{XX} = \left\{\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right\} \qquad V_{YY} = \left\{\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2\right\}$$

$$C = C_{XY} = C_{YX} = \left\{\left(X_i - \bar{X}\right) \cdot \left(Y_i - \bar{Y}\right)\right\}$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 1179064 \qquad C_{XY} = C_{YX} = 697670 \qquad V_{YY} = 550090$$

Im weiteren Verlauf kann auch mit den reduzierten Varianzen oder Kovarianzen gerechnet werden:

$$\tilde{V}_{XX} = \frac{1179064}{Min\left(V_{XX}; C; V_{YY}\right)} \qquad \tilde{V}_{YY} = \frac{550090}{Min\left(V_{XX}; C; V_{YY}\right)}$$

$$\tilde{C}_{XY} = C_{YX} = \frac{697670}{Min\left(V_{XX}; C; V_{YY}\right)}$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{V}_{XX} = \frac{1179064}{550090} \qquad \tilde{C}_{XY} = \tilde{C}_{YX} = \frac{697670}{550090} \qquad \tilde{V}_{YY} = \frac{550090}{550090}$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{V}_{XX} = 2,144 \qquad \tilde{C}_{XY} = \tilde{C}_{YX} = 1,268 \qquad \tilde{V}_{YY} = 1,000$$

Damit ist die Varianzenmatrix V definiert:

$$V = \begin{pmatrix} \tilde{V}_{XX} & \tilde{C} \\ \tilde{C} & \tilde{V}_{YY} \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte λ dieser Matrix werden gebraucht.

$$\begin{vmatrix} \tilde{V}_{XX} - \lambda & \tilde{C} \\ \tilde{C} & \tilde{V}_{YY} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,144 - \lambda & 1,268 \\ 1,268 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$

$$(2,144 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) - 1,268^2 = \lambda^2 - 3,144 \cdot \lambda + 0,536 = 0$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1 = 2,963 \qquad \lambda_2 = 0,181$$

Der nächste Schritt, die Eigenvektoren.

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_{XX} - \lambda & \tilde{C} \\ \tilde{C} & \tilde{V}_{YY} - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,144 - \lambda & 1,268 \\ 1,268 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$

$$(2,144 - \lambda) \cdot X + 1,268 \cdot Y = 0 \qquad (1 - \lambda) \cdot Y + 1,268 \cdot X = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y = \frac{\lambda - 0,876}{0,268 + \lambda} \cdot X$$

Für λ_1 ergibt sich somit:

$$Y_1 = +0,646 \cdot X$$

Für λ_2 ergibt sich somit:

$$Y_2 = -1,548 \cdot X$$

Die Haupt- und die Nebenachsen der Ellipse sind definiert indem die Eigenvektoren in den Mittelpunkt $P_M\left(\bar{X}, \bar{Y}\right)$ der Ellipse verschoben werden.

$$\tilde{Y}_{1;2} = Y_{1;2} - \bar{Y} = +0,646 \cdot \left(X - \bar{X}\right)$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{Y}_1 = +0,646 \cdot (X - 695) + 449 \qquad \tilde{Y}_2 = -1,548 \cdot (X - 695) + 449$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{Y}_1 = +0,646 \cdot X \qquad \tilde{Y}_2 = -1,548 \cdot X + 1525$$

Damit ist die Ermittlung der Ellipsenachsen über die Hauptkomponentenanalyse abgeschlossen. Es verbleibt die Angabe der allgemeinen Berechnungsgrundlagen.

Für die Eigenwerte:

$$2 \cdot \lambda_{1;2} = V_{XX} + V_{YY} \pm \sqrt{\left(V_{XX} - V_{YY}\right)^2 + 4 \cdot C^2}$$

Der Eigenvektoren, die unverschobenen Ellipsenachsen mit $P_M\,(0;0)$:

$$Y_{1;2} = \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot X$$

Die verschobenen Ellipsenachsen, also die Haupt- und Nebenachse der Ellipse für den vorliegenden Datensatz:

$$\tilde{Y}_{1;2} = \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot X + \bar{Y} - \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot \bar{X}$$

Wobei der Anstieg a und die Inhomogenität b für beide Achsen vollständig definiert sind.

$$a_{1;2} = \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \qquad b_{1;2} = \bar{Y} - \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C}$$

Die Ermittlung der Ellipsenfunktion ist bekannt aus der Methode der kleinsten Quadrate.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} + \frac{B}{A} \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

Mit:

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} \qquad B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2}$$

Wobei mit a der Anstieg der Hauptachse gefordert ist und für e sowie f gilt:

$$e^2 = \frac{\left\{\left(Y - \bar{Y}\right)^2\right\}}{n} \qquad f^2 = \frac{\left\{\left(X - \bar{X}\right)^2\right\}}{n}$$

Der Koeffizient n beinhaltet die Anzahl der Datenpaare $P_i\left(X_i; Y_i\right)$ und $\{\bullet\}$ bezeichnet die Summe des Satzes "•".

Eingesetzt ergeben sich hier folgende Beispielswerte:

$$e^2 = \frac{550090}{8} = 68761{,}25 \qquad f^2 = \frac{1179064}{8} = 147383$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{68761,25 \cdot 0,646^2 + 147383}{1 + 0,646^2} = 124233{,}53$$

$$B = 0,646 \cdot \frac{147383 - 68761,25}{1 + 0,646^2} = 35835{,}1$$

$\Rightarrow$

$$\frac{e \cdot f}{A} = \frac{\sqrt{68761,25 \cdot 147383}}{124233,53} = 0{,}8103 \qquad \frac{B}{A} = \frac{35835,1}{124233,53} = 0{,}2884$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0,2884 \cdot (X - 695) \pm 0,8103 \cdot \sqrt{124233,53 - (X - 695)^2}$$

1.2 Herleitung einer allgemeinen Berechnungsmöglichkeit der Ellipsenfunktion $Y_{1;2}^{(\varphi)}$

Herleitung

Es wird von der allgemeine Berechnungsgrundlage der um den Kippwinkel φ gekippten, unverschobenen Ellipse ausgegangen. 5

$$\frac{(X \cdot \cos\varphi + Y \cdot \sin\varphi)^2}{f^2} + \frac{(Y \cdot \cos\varphi - X \cdot \sin\varphi)^2}{e^2} = 1$$

Es wird umgestellt auf folgende Form.

$$0 = \begin{cases} +\left(e^2 \cdot \cos^2\varphi + f^2 \cdot \sin^2\varphi\right) \cdot X^2 \\ +\left(e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi\right) \cdot Y^2 \\ +2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \left(e^2 - f^2\right) \cdot X \cdot Y \\ -e^2 \cdot f^2 \end{cases}$$

Dabei gilt:

$$\sin^2\varphi = \frac{a^2}{1+a^2} \qquad \cos^2\varphi = \frac{1}{1+a^2} \qquad \sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{a}{1+a^2}$$

Wobei mit a der Anstieg der Hauptachse gefordert ist.

Es gibt einen Zusammenhang zwischen Anstieg a_{MKQ} aus der Methode der kleinsten Quadrate und der (Ko)Varianz über die Hauptkomponentenanalyse.

$$C = a_{MKQ} \cdot \frac{V_{XX}}{V_{YY}}$$

$\Rightarrow$

$$1,268 = 0,5928 \cdot \frac{2,144}{1,000} \approx 1{,}271$$

Damit sind die (Ko)Varianz(en) und der Koeffizient Z definiert.

$$V_{XX}^{(\varphi)} = e^2 \cdot \cos^2\varphi + f^2 \cdot \sin^2\varphi \qquad V_{YY}^{(\varphi)} = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi$$

$$C^{(\varphi)} = \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \left(e^2 - f^2\right) \qquad Z = e^2 \cdot f^2$$

Mit:

$$e^2 = \frac{V_{YY}}{n} \qquad f^2 = \frac{V_{XX}}{n} \qquad Z = \frac{V_{XX} \cdot V_{YY}}{n^2}$$

Die Ellipsenfunktion $Y_{1;2}^{(\varphi)}$ lässt sich jetzt umschreiben.

$$V_{YY}^{(\varphi)} \cdot Y^2 + V_{XX}^{(\varphi)} \cdot X^2 + 2 \cdot C^{(\varphi)} \cdot X \cdot Y - Z = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y^2 + \frac{2 \cdot C^{(\varphi)} \cdot X}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot Y + \frac{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot X^2 - Z}{V_{YY}^{(\varphi)}} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = -\frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot X \pm \frac{1}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{Z \cdot V_{YY}^{(\varphi)} + \left(C^{(\varphi)^2} - V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot X^2}$$

Zum Schluss muss die Ellipse noch verschoben werden auf $P_M\left(\bar{X}; \bar{Y}\right)$.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \frac{1}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{Z \cdot V_{YY}^{(\varphi)} + \left(C^{(\varphi)^2} - V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot (X - \bar{X}) \pm \frac{\sqrt{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{\frac{Z \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}} - (X - \bar{X})^2}$$

Damit sind die speziellen Terme aus der Methode der kleinsten Quadrate auch für die Hauptkomponentenanalyse definiert.

$$\frac{B}{A} = -\frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \qquad \frac{f \cdot e}{A} = \frac{\sqrt{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \qquad A = \frac{Z \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}}$$

$\Rightarrow$

$$A = \frac{V_{YY}^{(\varphi)}}{n^2} \cdot \frac{V_{XX} \cdot V_{YY}}{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}} \qquad B = \frac{C^{(\varphi)}}{n^2} \cdot \frac{V_{XX} \cdot V_{YY}}{C^{(\varphi)^2} - V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}$$

$$f \cdot e = \frac{V_{XX} \cdot V_{YY}}{n^2 \cdot \sqrt{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}}}$$

Die Beispielswerte eingesetzt.

$$\sin^2\varphi = \frac{0,646^2}{1 + 0,646^2} = 0{,}294 \qquad \cos^2\varphi = \frac{1}{1 + 0,646^2} = 0{,}706$$

$$\sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{0,646}{1 + 0,646^2} = 0{,}456$$

Mit:

$$e^2 = \frac{550090}{8} = 68761{,}25 \qquad f^2 = \frac{1179064}{8} = 147383$$

$$Z = \frac{1179064 \cdot 550090}{8^2} = 10134239308{,}75$$

Mit:

$$V_{XX}^{(\varphi)} = 68761{,}25 \cdot 0{,}706 + 147383 \cdot 0{,}294 \qquad V_{YY}^{(\varphi)} = 68761{,}25 \cdot 0{,}294 + 147383 \cdot 0{,}706$$

$$C^{(\varphi)} = 0{,}456 \cdot (68761{,}25 - 147383) \qquad Z = 68761{,}25 \cdot 147383$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\varphi)} = 91876{,}04 \qquad V_{YY}^{(\varphi)} = 124268{,}21$$

$$C^{(\varphi)} = -35851{,}52 \qquad Z = 10134239308{,}75$$

Damit ist die Ellipsenfunktion ermittelt.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \begin{cases} +449 + \frac{35851{,}52}{124268{,}21} \cdot (X - 695) \\ \pm \frac{1}{124268{,}21} \cdot \sqrt{\begin{cases} +10134239308{,}75 \cdot 124268{,}21 \\ + \left(35851{,}52^2 - 91876{,}04 \cdot 124268{,}21\right) \cdot (X - 695)^2 \end{cases}} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0{,}2885 \cdot (X - 695) \pm 0{,}81 \cdot \sqrt{124296{,}42 - (X - 695)^2}$$

Die Koeffizienten dazu:

$$A = \frac{124268{,}21}{8^2} \cdot \frac{1179064 \cdot 550090}{91876{,}04 \cdot 124268{,}21 - 35851{,}52^2} = 124296{,}42$$

$$B = \frac{-35851{,}52}{8^2} \cdot \frac{1179064 \cdot 550090}{35851{,}52^2 - 91876{,}04 \cdot 124268{,}21} = 35859{,}66$$

$$f \cdot e = \frac{1179064 \cdot 550090}{8^2 \cdot \sqrt{91876{,}04 \cdot 124268{,}21 - 35851{,}52^2}} = 100680{,}38$$

Sowie:

$$\frac{B}{A} = \frac{35851{,}52}{124268{,}21} = 0{,}289 \qquad \frac{f \cdot e}{A} = \frac{\sqrt{91876{,}04 \cdot 124268{,}21 - 35851{,}52^2}}{124268{,}21} = 0{,}81$$

1.3 Vereinfachung der Ellipsenfunktion $Y_{1;2}^{(\varphi)}$ - I

Vereinfachung

Eine Vereinfachungsmöglichkeit liefert der Term $V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}$ dessen Berechnungsgrundlagen bekannt ist.

$$V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2} = \begin{cases} +\left(e^2 \cdot \cos^2\varphi + f^2 \cdot \sin^2\varphi\right) \cdot \left(e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi\right) \\ \\ -\left(\sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \left(e^2 - f^2\right)\right)^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2} = \begin{cases} +e^4 \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi \\ \\ +f^4 \cdot \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi \\ \\ +e^2 \cdot f^2 \cdot \sin^4\varphi \\ \\ +e^2 \cdot f^2 \cdot \cos^4\varphi \\ \\ -\sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi \cdot \left(e^2 - f^2\right)^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2} = e^2 \cdot f^2$$

Damit kann die Ellipsenfunktion vereinfacht werden.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \frac{e \cdot f}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{\frac{Z \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{e^2 \cdot f^2} - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

Wobei sich nun die Koeffizienten ebenfalls vereinfachen.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$B = -C^{(\varphi)} \qquad A = V_{YY}^{(\varphi)} \qquad e^2 \cdot f^2 = \frac{V_{XX} \cdot V_{YY}}{n^2}$$

$\Rightarrow$

$$A = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi \qquad B = \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \left(f^2 - e^2\right)$$

Die Beispielswerte eingesetzt.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \begin{cases} +449 + \frac{35851{,}52}{124268{,}21} \cdot (X - 695) \\ \\ \pm \frac{\sqrt{68761{,}25 \cdot 147383}}{124268{,}21} \cdot \sqrt{\frac{10134239308{,}75 \cdot 124268{,}21}{68761{,}25 \cdot 147383} - (X - 695)^2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0{,}2885 \cdot (X - 695) \pm 0{,}8101 \cdot \sqrt{124268{,}21 - (X - 695)^2}$$

1.4 Vereinfachung der Ellipsenfunktion $Y_{1;2}^{(\varphi)}$ - II

Aus Vereinfachung

$$V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2} = e^2 \cdot f^2 \qquad e^2 \cdot f^2 = \frac{V_{XX} \cdot V_{YY}}{n^2}$$

folgt:

$$n^2 \cdot \left(V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2} \right) = V_{XX} \cdot V_{YY}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{B}{A} = -\frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \qquad \frac{f \cdot e}{A} = \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \qquad A = V_{YY}^{(\varphi)}$$

$\Rightarrow$

$$A = V_{YY}^{(\varphi)} \qquad B = -C^{(\varphi)}$$

Die Beispielswerte eingesetzt.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0{,}2885 \cdot (X - 695) \pm \frac{\sqrt{1179064 \cdot 550090}}{8 \cdot 124268{,}21} \cdot \sqrt{124268{,}21 - (X - 695)^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0{,}2885 \cdot (X - 695) \pm 0{,}8101 \cdot \sqrt{124296{,}42 - (X - 695)^2}$$

2 Zusammenfassung der Durchführung einer Elliptischen Regression

Die Elliptische Regression lässt sich neben der Methode der kleinsten Quadrate ebenfalls über die Hauptkomponentenanalyse bewerkstelligen.

Zusammenfassung

So lassen sich die **Haupt- und die Nebenachse** $\tilde{Y}_1$ oder $\tilde{Y}_2$ der regressierten Ellipse ermitteln über:

$$\tilde{Y}_{1;2}\left(X\right) = \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot X + \bar{Y} - \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot \bar{X}$$

Wobei $\lambda_{1;2}$ **Eigenwerte** darstellen, welche berechnet werden können durch:

$$2 \cdot \lambda_{1;2} = V_{XX} + V_{YY} \pm \sqrt{\left(V_{XX} - V_{YY}\right)^2 + 4 \cdot C^2}$$

Die Werte $\bar{X}$ und $\bar{Y}$ sind die Mittelwerte der Datenpaare $P_i\left(X_i; Y_i\right)$.

$$\bar{X} = \frac{\{X_i\}}{n} \qquad \bar{Y} = \frac{\{Y_i\}}{n}$$

Der Koeffizient n beinhaltet die Anzahl der Datenpaare $P_i\left(X_i; Y_i\right)$ und $\{\bullet\}$ bezeichnet die Summe des Satzes "•".

Die Symbole V_{XX}, V_{YY} und C definieren die **Varianz**en zwischen XX und YY sowie die **Kovarianz** zwischen XY bzw. YX. Hier und nur hier können diese Werte berechnet werden durch:

$$V_{XX} = \left\{\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right\} \qquad V_{YY} = \left\{\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2\right\}$$

$$C = C_{XY} = C_{YX} = \left\{\left(X_i - \bar{X}\right) \cdot \left(Y_i - \bar{Y}\right)\right\}$$

Die **Ellipsenfunktion** $Y_{1;2}^{(\varphi)}$ der gekippten und verschobenen, regressierten Ellipse lässt sich darstellen durch:

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \left(X - \bar{X}\right) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - \left(X - \bar{X}\right)^2}$$

Die sich geänderten (Ko)Varianzen infolge Kippen der Ellipse sind berechenbar über:

$$n \cdot V_{YY}^{(\varphi)} = \frac{V_{YY} \cdot a^2 + V_{XX}}{1 + a^2} \qquad n \cdot C^{(\varphi)} = \frac{a \cdot \left(V_{YY} - V_{XX}\right)}{1 + a^2}$$

Wobei a der Anstieg der Hauptachse der Ellipse ist.

$$a = \frac{V_{YY} - \lambda}{C}$$

Die trigonometrische Darstellungen von $V_{YY}^{(\varphi)}$ und $C^{(\varphi)}$ sind unter Umständen günstiger zu handhaben.

$$V_{YY}^{(\varphi)} = e^2 \cdot \sin^2\varphi + f^2 \cdot \cos^2\varphi \qquad C^{(\varphi)} = \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \left(e^2 - f^2\right)$$

Mit:

$$\sin^2\varphi = \frac{a^2}{1 + a^2} \qquad \cos^2\varphi = \frac{1}{1 + a^2} \qquad \sin\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{a}{1 + a^2}$$

Und:

$$e^2 = \frac{V_{YY}}{n} \qquad f^2 = \frac{V_{XX}}{n}$$

3 Erweiterungen vorhandener Berechnungsgrundlagen

Der Zusammenhang zwischen den ungedrehten und gedrehten (Ko)Varianzen ist bekannt. Erweiterungen

$$n^2 \cdot \left(V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2} \right) = V_{XX} \cdot V_{YY}$$

Bedingt durch die hier genutzte Methode ist für eine Achse der Ellipse die Inhomogenität $b = 0$, so dass für den Eigenwert dieser Achse gilt:

$$\lambda^{(b=0)} = V_{YY} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \cdot C$$

Weiterhin ist für die Eigenwerte λ_1 und λ_2 ein Zusammenhang bekannt zu den Varianzen.

$$\lambda_1 + \lambda_2 = V_{XX} + V_{YY}$$

Damit dann:

$$\lambda^{(b\neq 0)} = V_{XX} + \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \cdot C$$

Die Berechnungsgrundlage der Haupt- und der Nebenachse der Ellipse verändert sich dahingehend ebenfalls.

$$\tilde{Y}^{(b=0)} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \cdot X \qquad \tilde{Y}^{(b\neq 0)} = \left(\frac{V_{YY} - V_{XX}}{C} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \right) \cdot X + \frac{V_{XX} - V_{YY}}{C} \cdot \bar{X} + 2 \cdot \bar{Y}$$

Zwei für [Dip] fundamentale Zusammenhänge zwischen den Anstiegen der Haupt- und Nebenachse, den Varianzen, der Kovarianz und der Mittelwerte von X und Y sind damit gefunden. Mit

$$a = -\frac{1}{c}$$

und obig gefundenen Berechnungsgrundlagen für $\tilde{Y}^{(b=0)}$ und $\tilde{Y}^{(b\neq 0)}$ ergibt sich:

$$\frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} = \frac{\{y\}}{\{x\}} \qquad \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} = -\frac{\{x\}}{\{y\}}$$

Wobei es von den Vorzeichenkonventionen der Eigenwerte abhängt, welcher Eigenwert zuständig ist. Für vorliegenden Fall:

$$\frac{V_{YY} - \lambda_2}{C} = \frac{\{y\}}{\{x\}} = a \qquad \frac{V_{YY} - \lambda_1}{C} = -\frac{\{x\}}{\{y\}} = c$$

4 Zusammenfassung des genutzten Beispiels

Beispiel

i	X_i	Y_i	$X_i - \bar{X}$	$Y_i - \bar{Y}$	$\left(X_i - \bar{X}\right)^2$	$\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2$	$\left(X_i - \bar{X}\right) \cdot \left(Y_i - \bar{Y}\right)$
1	128	100	-567	-349	321 489	121 801	+197 883
2	256	250	-439	-199	192 721	39 601	+87 361
3	440	510	-255	+61	65 025	3 721	-15 555
4	640	160	-55	-289	3 025	83 521	+15 895
5	768	400	+73	-49	5 329	2 401	-3 577
6	896	520	+201	+71	40 401	5 041	+14 271
7	1152	750	+457	+301	208 849	90 601	+137 557
8	1280	900	+585	+451	342 225	203 401	+263 835
Σ	5560	3590	0	0	1 179 064	550 090	+697 670

$\Rightarrow$
$$\bar{X} = 695 \qquad \bar{Y} = 449$$

$\Rightarrow$
$$V_{XX} = 1179064 \qquad C_{XY} = C_{YX} = 697670 \qquad V_{YY} = 550090$$

$\Rightarrow$
$$\tilde{V}_{XX} = 2,144 \qquad \tilde{C}_{XY} = \tilde{C}_{YX} = 1,268 \qquad \tilde{V}_{YY} = 1,000$$

$\Rightarrow$
$$\lambda_1 = 2,963 \qquad \lambda_2 = 0,181$$

$\Rightarrow$
$$Y_1 = +0,646 \cdot X \qquad Y_2 = -1,548 \cdot X$$

$\Rightarrow$
$$\tilde{Y}_1 = +0,646 \cdot X \qquad \tilde{Y}_2 = -1,548 \cdot X + 1525$$

$\Rightarrow$
$$e^2 = 68761{,}25 \qquad f^2 = 147383$$

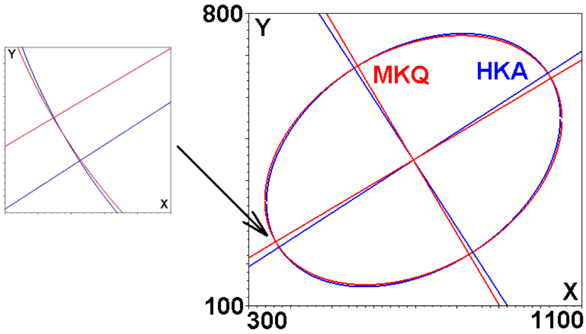
$\Rightarrow$
$$A = 124233{,}53 \qquad B = 35835{,}1$$

$\Rightarrow$
$$\frac{e \cdot f}{A} = 0{,}8103 \qquad \frac{B}{A} = 0{,}2884$$

$\Rightarrow$
$$\sin^2 \varphi = 0{,}294 \qquad \cos^2 \varphi = 0{,}706 \qquad \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 0{,}456$$

$\Rightarrow$
$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0,2884 \cdot (X - 695) \pm 0,8103 \cdot \sqrt{124233,53 - (X - 695)^2}$$

Zum Schluss eine grafische Darstellung der durchgeführten Regression über die Methode der kleinsten Quadrate – **MKQ** und über die Hauptkomponentenanalyse – **HKA**.



LaTeX 2_ε