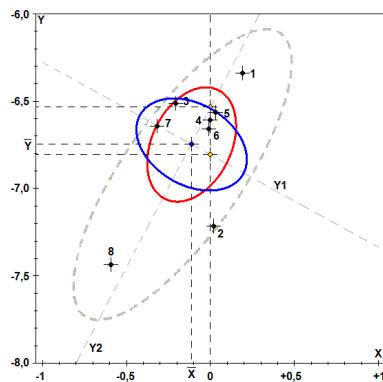


Elliptische Regression von Datenpunkten über die Hauptkomponentenanalyse



Elliptic regression of data points using principal component analysis

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

www.Zenithpoint.de

Erstellt: 03. September 2016 – Letzte Revision: 19. März 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Durchführung der Regression	3
1.1 Ermittlung der Haupt- und Nebenachse	3
1.2 Herleitung einer allgemeinen Berechnungsmöglichkeit	6
1.3 Vereinfachung der Ellipsenfunktion - I	8
1.4 Vereinfachung der Ellipsenfunktion - II	9
2 Zusammenfassung	11
2.1 Durchführung der Elliptischen Regression	11
2.2 Erweiterungen vorhandener Berechnungsgrundlagen	12
3 Anhang	13
3.1 Beispiel - I	13
3.2 Beispiel - II	15

Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

[Dipa] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten - MKQ.
www.Zenithpoint.de.

[Dipb] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Reduzierte Lineare Regression - Fehlen von Anstieg oder Inhomogenität, Hinzufügen eines definierten Punktes. www.Zenithpoint.de.

- [Rol] Roland Weingärtner, Leon Schiller, Alexander Kinstler, Richard Neumann, Frank Brunner, Eldad Bahat Treidel, Enrico Brusaterra, Matthias Marx, Sven Besendörfer. Impact of Dislocation Networks on Leakage Currents of GaN-on-GaN pn-Diodes: A Statistical Approach Comparing X-Ray Topography with Electrical Characteristics.
-

1 Durchführung der Elliptischen Regression über die Hauptkomponentenanalyse

1.1 Ermittlung der Haupt- und Nebenachse der zu regressierenden Ellipse

Gegeben sei der Datensatz aus der Elliptischen Regression mittels Bestimmung der Achsen- und Ellipsenfunktion nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Die Durchführung der Elliptischen Regression soll anhand dieses Beispiels mittels der Hauptkomponentenanalyse erfolgen.

[001]

Durchführung

i	X_i	Y_i	$X_i - \bar{X}$	$Y_i - \bar{Y}$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(Y_i - \bar{Y})^2$	$(X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})$
1	128	100	-567	-349	321 489	121 801	+197 883
2	256	250	-439	-199	192 721	39 601	+87 361
3	440	510	-255	+61	65 025	3 721	-15 555
4	640	160	-55	-289	3 025	83 521	+15 895
5	768	400	+73	-49	5 329	2 401	-3 577
6	896	520	+201	+71	40 401	5 041	+14 271
7	1152	750	+457	+301	208 849	90 601	+137 557
8	1280	900	+585	+451	342 225	203 401	+263 835
Σ	5560	3590	0	0	1 179 064	550 090	+697 670

Mit:

$$\bar{X} = \frac{\{X_i\}}{n} \quad \bar{Y} = \frac{\{Y_i\}}{n}$$

\Rightarrow

$$\bar{X} = \frac{5560}{8} = 695 \quad \bar{Y} = \frac{3590}{8} = 449$$

Ergeben sich folgende Varianzen und Kovarianzen:

$$V_{XX} = \{(X_i - \bar{X})^2\} \quad V_{YY} = \{(Y_i - \bar{Y})^2\}$$

$$C = C_{XY} = C_{YX} = \{(X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})\}$$

\Rightarrow

$$V_{XX} = 1179064 \quad C_{XY} = C_{YX} = 697670 \quad V_{YY} = 550090$$

Im weiteren Verlauf kann auch mit den reduzierten Varianzen oder Kovarianzen gerechnet werden:

$$\tilde{V}_{XX} = \frac{1179064}{\text{Min}(V_{XX}; C; V_{YY})} \quad \tilde{V}_{YY} = \frac{550090}{\text{Min}(V_{XX}; C; V_{YY})}$$

$$\tilde{C}_{XY} = C_{YX} = \frac{697670}{\text{Min}(V_{XX}; C; V_{YY})}$$

\Rightarrow

$$\tilde{V}_{XX} = \frac{1179064}{550090} \quad \tilde{C}_{XY} = \tilde{C}_{YX} = \frac{697670}{550090} \quad \tilde{V}_{YY} = \frac{550090}{550090}$$

\Rightarrow

$$\tilde{V}_{XX} = 2,144 \quad \tilde{C}_{XY} = \tilde{C}_{YX} = 1,268 \quad \tilde{V}_{YY} = 1,000$$

Damit ist die Varianzenmatrix V definiert:

$$V = \begin{pmatrix} \tilde{V}_{XX} & \tilde{C} \\ \tilde{C} & \tilde{V}_{YY} \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte λ dieser Matrix werden gebraucht.

$$\begin{vmatrix} \tilde{V}_{XX} - \lambda & \tilde{C} \\ \tilde{C} & \tilde{V}_{YY} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,144 - \lambda & 1,268 \\ 1,268 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2,144 - \lambda) \cdot (1 - \lambda) - 1,268^2 = \lambda^2 - 3,144 \cdot \lambda + 0,536 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2,963 \quad \lambda_2 = 0,181$$

Der nächste Schritt, die Eigenvektoren.

$$\begin{pmatrix} \tilde{V}_{XX} - \lambda & \tilde{C} \\ \tilde{C} & \tilde{V}_{YY} - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,144 - \lambda & 1,268 \\ 1,268 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (2,144 - \lambda) \cdot X + 1,268 \cdot Y = 0 \quad (1 - \lambda) \cdot Y + 1,268 \cdot X = 0$$

$$\Rightarrow Y = \frac{\lambda - 0,876}{0,268 + \lambda} \cdot X$$

Für λ_1 ergibt sich somit:

$$Y_1 = +0,646 \cdot X$$

Für λ_2 ergibt sich somit:

$$Y_2 = -1,548 \cdot X$$

Die Haupt- und die Nebenachsen der Ellipse sind definiert indem die Eigenvektoren in den Mittelpunkt $P_M(\bar{X}, \bar{Y})$ der Ellipse verschoben werden.

$$\tilde{Y}_{1;2} = Y_{1;2} - \bar{Y} = +0,646 \cdot (X - \bar{X})$$

$$\Rightarrow \tilde{Y}_1 = +0,646 \cdot (X - 695) + 449 \quad \tilde{Y}_2 = -1,548 \cdot (X - 695) + 449$$

$$\Rightarrow \tilde{Y}_1 = +0,646 \cdot X \quad \tilde{Y}_2 = -1,548 \cdot X + 1525$$

Damit ist die Ermittlung der Ellipsenachsen über die Hauptkomponentenanalyse abgeschlossen. Es verbleibt die Angabe der allgemeinen Berechnungsgrundlagen.

Für die Eigenwerte:

$$2 \cdot \lambda_{1;2} = V_{XX} + V_{YY} \pm \sqrt{(V_{XX} - V_{YY})^2 + 4 \cdot C^2}$$

Der Eigenvektoren, die unverschobenen Ellipsenachsen mit $P_M(0; 0)$:

$$Y_{1;2} = \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot X$$

Die verschobenen Ellipsenachsen, also die Haupt- und Nebenachse der Ellipse für den vorliegenden Datensatz:

$$\tilde{Y}_{1;2} = \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot X + \bar{Y} - \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot \bar{X}$$

Wobei der Anstieg a und die Inhomogenität b für beide Achsen vollständig definiert sind.

$$a_{1;2} = \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \quad b_{1;2} = \bar{Y} - \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C}$$

Die Ermittlung der Ellipsenfunktion ist bekannt aus der Methode der kleinsten Quadrate.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} + \frac{B}{A} \cdot (X - \bar{X}) \pm \frac{f \cdot e}{A} \cdot \sqrt{A - (X - \bar{X})^2}$$

Mit:

$$A = \frac{e^2 \cdot a^2 + f^2}{1 + a^2} \quad B = a \cdot \frac{f^2 - e^2}{1 + a^2}$$

Wobei mit a der Anstieg der Hauptachse gefordert ist und für e sowie f gilt:

$$e^2 = \frac{\{(Y - \bar{Y})^2\}}{n} \quad f^2 = \frac{\{(X - \bar{X})^2\}}{n}$$

Der Koeffizient n beinhaltet die Anzahl der Datenpaare $P_i (X_i; Y_i)$ und $\{\bullet\}$ bezeichnet die Summe des Satzes “•”.

Eingesetzt ergeben sich hier folgende Beispieldswerte:

$$e^2 = \frac{550090}{8} = 68761,25 \quad f^2 = \frac{1179064}{8} = 147383$$

\Rightarrow

$$A = \frac{68761,25 \cdot 0,646^2 + 147383}{1 + 0,646^2} = 124233,53$$

$$B = 0,646 \cdot \frac{147383 - 68761,25}{1 + 0,646^2} = 35835,1$$

\Rightarrow

$$\frac{e \cdot f}{A} = \frac{\sqrt{68761,25 \cdot 147383}}{124233,53} = 0,8103 \quad \frac{B}{A} = \frac{35835,1}{124233,53} = 0,2884$$

\Rightarrow

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0,2884 \cdot (X - 695) \pm 0,8103 \cdot \sqrt{124233,53 - (X - 695)^2}$$

1.2 Herleitung einer allgemeinen Berechnungsmöglichkeit der Ellipsenfunktion $Y_{1;2}^{(\varphi)}$

Es wird von der allgemeine Berechnungsgrundlage der um den Kippwinkel φ gekippten, unverschobenen Ellipse ausgegangen. 5

$$\frac{(X \cdot \cos \varphi + Y \cdot \sin \varphi)^2}{f^2} + \frac{(Y \cdot \cos \varphi - X \cdot \sin \varphi)^2}{e^2} = 1$$

Es wird umgestellt auf folgende Form.

$$0 = \begin{cases} + (e^2 \cdot \cos^2 \varphi + f^2 \cdot \sin^2 \varphi) \cdot X^2 \\ + (e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi) \cdot Y^2 \\ + 2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot (e^2 - f^2) \cdot X \cdot Y \\ - e^2 \cdot f^2 \end{cases}$$

Dabei gilt:

$$\sin^2 \varphi = \frac{a^2}{1+a^2} \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{1+a^2} \quad \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{a}{1+a^2}$$

Wobei mit a der Anstieg der Hauptachse gefordert ist.

Es gibt einen Zusammenhang zwischen Anstieg a_{MKQ} aus der Methode der kleinsten Quadrate und der (Ko)Varianz über die Hauptkomponentenanalyse.

$$C = a_{MKQ} \cdot \frac{V_{XX}}{V_{YY}}$$

\Rightarrow

$$1,268 = 0,5928 \cdot \frac{2,144}{1,000} \approx 1,271$$

Damit sind die (Ko)Varianz(en) und der Koeffizient Z definiert.

$$V_{XX}^{(\varphi)} = e^2 \cdot \cos^2 \varphi + f^2 \cdot \sin^2 \varphi \quad V_{YY}^{(\varphi)} = e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi$$

$$C^{(\varphi)} = \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot (e^2 - f^2) \quad Z = e^2 \cdot f^2$$

Mit:

$$e^2 = \frac{V_{YY}}{n} \quad f^2 = \frac{V_{XX}}{n} \quad Z = \frac{V_{XX} \cdot V_{YY}}{n^2}$$

Die Ellipsenfunktion $Y_{1;2}^{(\varphi)}$ lässt sich jetzt umschreiben.

$$V_{YY}^{(\varphi)} \cdot Y^2 + V_{XX}^{(\varphi)} \cdot X^2 + 2 \cdot C^{(\varphi)} \cdot X \cdot Y - Z = 0$$

$$\Rightarrow Y^2 + \frac{2 \cdot C^{(\varphi)} \cdot X}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot Y + \frac{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot X^2 - Z}{V_{YY}^{(\varphi)}} = 0$$

$$\Rightarrow Y_{1;2}^{(\varphi)} = -\frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot X \pm \frac{1}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{Z \cdot V_{YY}^{(\varphi)} + (C^{(\varphi)})^2 - V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} \cdot X^2}$$

Zum Schluss muss die Ellipse noch verschoben werden auf $P_M (\bar{X}; \bar{Y})$.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot (X - \bar{X}) \pm \frac{1}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{Z \cdot V_{YY}^{(\varphi)} + (C^{(\varphi)})^2 - V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} \cdot (X - \bar{X})^2}$$

\Rightarrow

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot (X - \bar{X}) \pm \frac{\sqrt{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{\frac{Z \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}} - (X - \bar{X})^2}$$

Damit sind die speziellen Terme aus der Methode der kleinsten Quadrate auch für die Hauptkomponentenanalyse definiert.

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= -\frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} & \frac{f \cdot e}{A} &= \frac{\sqrt{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}}}{V_{YY}^{(\varphi)}} & A &= \frac{Z \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}} \\ \Rightarrow \quad A &= \frac{V_{YY}^{(\varphi)}}{n^2} \cdot \frac{V_{XX} \cdot V_{YY}}{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}} & B &= \frac{C^{(\varphi)}}{n^2} \cdot \frac{V_{XX} \cdot V_{YY}}{C^{(\varphi)^2} - V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \\ f \cdot e &= \frac{V_{XX} \cdot V_{YY}}{n^2 \cdot \sqrt{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}}} \end{aligned}$$

Die Beispieldaten eingesetzt.

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi &= \frac{0,646^2}{1 + 0,646^2} = 0,294 & \cos^2 \varphi &= \frac{1}{1 + 0,646^2} = 0,706 \\ \sin \varphi \cdot \cos \varphi &= \frac{0,646}{1 + 0,646^2} = 0,456 \end{aligned}$$

Mit:

$$\begin{aligned} e^2 &= \frac{550090}{8} = 68761,25 & f^2 &= \frac{1179064}{8} = 147383 \\ Z &= \frac{1179064 \cdot 550090}{8^2} = 10134239308,75 \end{aligned}$$

Mit:

$$\begin{aligned} V_{XX}^{(\varphi)} &= 68761,25 \cdot 0,706 + 147383 \cdot 0,294 & V_{YY}^{(\varphi)} &= 68761,25 \cdot 0,294 + 147383 \cdot 0,706 \\ C^{(\varphi)} &= 0,456 \cdot (68761,25 - 147383) & Z &= 68761,25 \cdot 147383 \\ \Rightarrow \quad V_{XX}^{(\varphi)} &= 91876,04 & V_{YY}^{(\varphi)} &= 124268,21 \\ C^{(\varphi)} &= -35851,52 & Z &= 10134239308,75 \end{aligned}$$

Damit ist die Ellipsenfunktion ermittelt.

$$\begin{aligned} Y_{1;2}^{(\varphi)} &= \left\{ \begin{array}{l} +449 + \frac{35851,52}{124268,21} \cdot (X - 695) \\ \pm \frac{1}{124268,21} \cdot \sqrt{\left\{ \begin{array}{l} +10134239308,75 \cdot 124268,21 \\ + (35851,52^2 - 91876,04 \cdot 124268,21) \cdot (X - 695)^2 \end{array} \right\}} \end{array} \right. \\ \Rightarrow \quad Y_{1;2}^{(\varphi)} &= 449 + 0,2885 \cdot (X - 695) \pm 0,81 \cdot \sqrt{124268,21 - (X - 695)^2} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten dazu:

$$\begin{aligned} A &= \frac{124268,21}{8^2} \cdot \frac{1179064 \cdot 550090}{91876,04 \cdot 124268,21 - 35851,52^2} = 124296,42 \\ B &= \frac{-35851,52}{8^2} \cdot \frac{1179064 \cdot 550090}{35851,52^2 - 91876,04 \cdot 124268,21} = 35859,66 \\ f \cdot e &= \frac{1179064 \cdot 550090}{8^2 \cdot \sqrt{91876,04 \cdot 124268,21 - 35851,52^2}} = 100680,38 \end{aligned}$$

Sowie:

$$\frac{B}{A} = \frac{35851,52}{124268,21} = 0,289 \quad \frac{f \cdot e}{A} = \frac{\sqrt{91876,04 \cdot 124268,21 - 35851,52^2}}{124268,21} = 0,81$$

1.3 Vereinfachung der Ellipsenfunktion $Y_{1;2}^{(\varphi)}$ - I

Eine Vereinfachungsmöglichkeit liefert der Term $V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}$ dessen Berechnungsgrundlagen bekannt ist.

$$V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2} = \begin{cases} + (e^2 \cdot \cos^2 \varphi + f^2 \cdot \sin^2 \varphi) \cdot (e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi) \\ - (\sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot (e^2 - f^2))^2 \end{cases}$$

\Rightarrow

$$V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2} = \begin{cases} + e^4 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi \\ + f^4 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi \\ + e^2 \cdot f^2 \cdot \sin^4 \varphi \\ + e^2 \cdot f^2 \cdot \cos^4 \varphi \\ - \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi \cdot (e^2 - f^2)^2 \end{cases}$$

\Rightarrow

$$V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2} = e^2 \cdot f^2$$

Damit kann die Ellipsenfunktion vereinfacht werden.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot (X - \bar{X}) \pm \frac{e \cdot f}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{\frac{Z \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{e^2 \cdot f^2} - (X - \bar{X})^2}$$

Wobei sich nun die Koeffizienten ebenfalls vereinfachen.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot (X - \bar{X}) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - (X - \bar{X})^2}$$

\Rightarrow

$$B = -C^{(\varphi)} \quad A = V_{YY}^{(\varphi)} \quad e^2 \cdot f^2 = \frac{V_{XX} \cdot V_{YY}}{n^2}$$

\Rightarrow

$$A = e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi \quad B = \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot (f^2 - e^2)$$

Die Beispieldaten eingesetzt.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \begin{cases} +449 + \frac{35851,52}{124268,21} \cdot (X - 695) \\ \pm \frac{\sqrt{68761,25 \cdot 147383}}{124268,21} \cdot \sqrt{\frac{10134239308,75 \cdot 124268,21}{68761,25 \cdot 147383} - (X - 695)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0,2885 \cdot (X - 695) \pm 0,8101 \cdot \sqrt{124268,21 - (X - 695)^2}$$

1.4 Vereinfachung der Ellipsenfunktion $Y_{1;2}^{(\varphi)}$ - II

Aus

$$V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2} = e^2 \cdot f^2 \quad e^2 \cdot f^2 = \frac{V_{XX} \cdot V_{YY}}{n^2}$$

Vereinfachung

folgt:

$$n^2 \cdot (V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2}) = V_{XX} \cdot V_{YY}$$

\Rightarrow

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot (X - \bar{X}) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - (X - \bar{X})^2}$$

\Rightarrow

$$\frac{B}{A} = -\frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \quad \frac{f \cdot e}{A} = \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \quad A = V_{YY}^{(\varphi)}$$

\Rightarrow

$$A = V_{YY}^{(\varphi)} \quad B = -C^{(\varphi)}$$

Die Beispieldaten eingesetzt.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0,2885 \cdot (X - 695) \pm \frac{\sqrt{1179064 \cdot 550090}}{8 \cdot 124268,21} \cdot \sqrt{124268,21 - (X - 695)^2}$$

\Rightarrow

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0,2885 \cdot (X - 695) \pm 0,8101 \cdot \sqrt{124296,42 - (X - 695)^2}$$

2 Zusammenfassung

2.1 Durchführung der Elliptischen Regression

Die Elliptische Regression lässt sich neben der Methode der kleinsten Quadrate ebenfalls über die Hauptkomponentenanalyse bewerkstelligen.

So lassen sich die **Haupt- und die Nebenachse** \tilde{Y}_1 oder \tilde{Y}_2 der regressierten Ellipse ermitteln über: Zusammenfassung

$$\tilde{Y}_{1;2}(X) = \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot X + \bar{Y} - \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot \bar{X}$$

Wobei $\lambda_{1;2}$ **Eigenwerte** darstellen, welche berechnet werden können durch:

$$2 \cdot \lambda_{1;2} = V_{XX} + V_{YY} \pm \sqrt{(V_{XX} - V_{YY})^2 + 4 \cdot C^2}$$

Die Werte \bar{X} und \bar{Y} sind die Mittelwerte der Datenpaare $P_i(X_i; Y_i)$.

$$\bar{X} = \frac{\{X_i\}}{n} \quad \bar{Y} = \frac{\{Y_i\}}{n}$$

Der Koeffizient n beinhaltet die Anzahl der Datenpaare $P_i(X_i; Y_i)$ und $\{\bullet\}$ bezeichnet die Summe des Satzes “•”.

Die Symbole V_{XX} , V_{YY} und C definieren die **Varianzen** zwischen XX und YY sowie die **Kovarianz** zwischen XY bzw. YX . Hier und nur hier können diese Werte berechnet werden durch:

$$\begin{aligned} V_{XX} &= \{(X_i - \bar{X})^2\} & V_{YY} &= \{(Y_i - \bar{Y})^2\} \\ C &= C_{XY} = C_{YX} = \{(X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})\} \end{aligned}$$

Die **Ellipsenfunktion** $Y_{1;2}^{(\varphi)}$ der gekippten und verschobenen, regressierten Ellipse lässt sich darstellen durch:

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot (X - \bar{X}) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - (X - \bar{X})^2}$$

Die sich geänderten (Ko)Varianzen infolge Kippen der Ellipse sind berechenbar über:

$$n \cdot V_{YY}^{(\varphi)} = \frac{V_{YY} \cdot a^2 + V_{XX}}{1 + a^2} \quad n \cdot C^{(\varphi)} = \frac{a \cdot (V_{YY} - V_{XX})}{1 + a^2}$$

Wobei a der Anstieg der Hauptachse der Ellipse ist.

$$a = \frac{V_{YY} - \lambda}{C}$$

Die trigonometrische Darstellungen von $V_{YY}^{(\varphi)}$ und $C^{(\varphi)}$ sind unter Umständen günstiger zu handhaben.

$$V_{YY}^{(\varphi)} = e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi \quad C^{(\varphi)} = \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot (e^2 - f^2)$$

Mit:

$$\sin^2 \varphi = \frac{a^2}{1 + a^2} \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + a^2} \quad \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{a}{1 + a^2}$$

Und:

$$e^2 = \frac{V_{YY}}{n} \quad f^2 = \frac{V_{XX}}{n}$$

2.2 Erweiterungen vorhandener Berechnungsgrundlagen

Erweiterungen

Der Zusammenhang zwischen den ungedrehten und gedrehten (Ko)Varianzen ist bekannt.

$$n^2 \cdot \left(V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)^2} \right) = V_{XX} \cdot V_{YY}$$

Bedingt durch die hier genutzte Methode ist für eine Achse der Ellipse die Inhomogenität $b = 0$, so dass für den Eigenwert dieser Achse gilt:

$$\lambda^{(b=0)} = V_{YY} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \cdot C$$

Weiterhin ist für die Eigenwerte λ_1 und λ_2 ein Zusammenhang bekannt zu den Varianzen.

$$\lambda_1 + \lambda_2 = V_{XX} + V_{YY}$$

Damit dann:

$$\lambda^{(b \neq 0)} = V_{XX} + \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \cdot C$$

Die Berechnungsgrundlage der Haupt- und der Nebenachse der Ellipse verändert sich dahingehend ebenfalls.

$$\tilde{Y}^{(b=0)} = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \cdot X \quad \tilde{Y}^{(b \neq 0)} = \left(\frac{V_{YY} - V_{XX}}{C} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \right) \cdot X + \frac{V_{XX} - V_{YY}}{C} \cdot \bar{X} + 2 \cdot \bar{Y}$$

Zwei für [Dipb] fundamentale Zusammenhänge zwischen den Anstiegen der Haupt- und Nebenachse, den Varianzen, der Kovarianz und der Mittelwerte von X und Y sind damit gefunden. Mit

$$a = -\frac{1}{c}$$

und obig gefundenen Berechnungsgrundlagen für $\tilde{Y}^{(b=0)}$ und $\tilde{Y}^{(b \neq 0)}$ ergibt sich:

$$\frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} = \frac{\{y\}}{\{x\}} \quad \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} = -\frac{\{x\}}{\{y\}}$$

Wobei es von den Vorzeichenkonventionen der Eigenwerte abhängt, welcher Eigenwert zuständig ist. Für vorliegenden Fall:

$$\frac{V_{YY} - \lambda_2}{C} = \frac{\{y\}}{\{x\}} = a \quad \frac{V_{YY} - \lambda_1}{C} = -\frac{\{x\}}{\{y\}} = c$$

3 Anhang

3.1 Beispiel - I

Beispiel - I

i	X_i	Y_i	$X_i - \bar{X}$	$Y_i - \bar{Y}$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(Y_i - \bar{Y})^2$	$(X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})$
1	128	100	-567	-349	321 489	121 801	+197 883
2	256	250	-439	-199	192 721	39 601	+87 361
3	440	510	-255	+61	65 025	3 721	-15 555
4	640	160	-55	-289	3 025	83 521	+15 895
5	768	400	+73	-49	5 329	2 401	-3 577
6	896	520	+201	+71	40 401	5 041	+14 271
7	1152	750	+457	+301	208 849	90 601	+137 557
8	1280	900	+585	+451	342 225	203 401	+263 835
Σ	5560	3590	0	0	1 179 064	550 090	+697 670

 \Rightarrow

$$\bar{X} = 695 \quad \bar{Y} = 449$$

 \Rightarrow

$$V_{XX} = 1179064 \quad C_{XY} = C_{YX} = 697670 \quad V_{YY} = 550090$$

 \Rightarrow

$$\tilde{V}_{XX} = 2,144 \quad \tilde{C}_{XY} = \tilde{C}_{YX} = 1,268 \quad \tilde{V}_{YY} = 1,000$$

 \Rightarrow

$$\lambda_1 = 2,963 \quad \lambda_2 = 0,181$$

 \Rightarrow

$$Y_1 = +0,646 \cdot X \quad Y_2 = -1,548 \cdot X$$

 \Rightarrow

$$\tilde{Y}_1 = +0,646 \cdot X \quad \tilde{Y}_2 = -1,548 \cdot X + 1525$$

 \Rightarrow

$$e^2 = 68761,25 \quad f^2 = 147383$$

 \Rightarrow

$$A = 124233,53 \quad B = 35835,1$$

 \Rightarrow

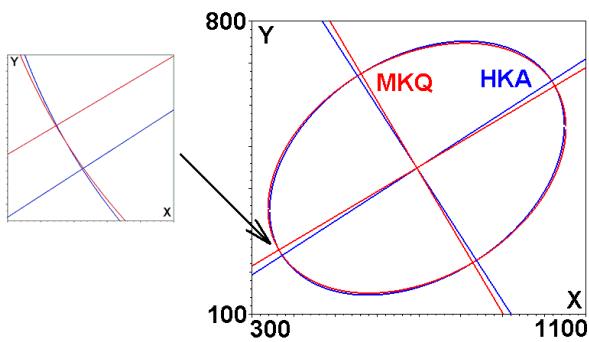
$$\frac{e \cdot f}{A} = 0,8103 \quad \frac{B}{A} = 0,2884$$

 \Rightarrow

$$\sin^2 \varphi = 0,294 \quad \cos^2 \varphi = 0,706 \quad \sin \varphi \cdot \cos \varphi = 0,456$$

 \Rightarrow

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0,2884 \cdot (X - 695) \pm 0,8103 \cdot \sqrt{124233,53 - (X - 695)^2}$$



Grafische Darstellung der durchgeföhrten Regression über
die Methode der kleinsten Quadrate – **MKQ**
und über die Hauptkomponentenanalyse – **HKA**.

3.2 Beispiel - II

Beispiel - II

Beispiel entnommen aus [Rol]. Vergleiche dazu auch unter [Dipa] die dortige Berechnung.

i	X_i	Y_i	$(X_i - X_M)$ · $(Y_i - Y_M)$
1	+0, 192 2	-6, 340 0	+0, 123 957
2	+0, 014 9	-7, 213 8	-0, 058 961
3	-0, 208 7	-6, 511 2	-0, 022 972
4	-0, 001 9	-6, 610 3	+0, 015 107
5	+0, 031 8	-6, 565 2	+0, 026 216
6	-0, 008 3	-6, 662 1	+0, 008 872
7	-0, 320 6	-6, 644 1	-0, 021 696
8	-0, 592 7	-7, 436 8	+0, 331 369
8	-0, 893 3	-53, 983 5	+0, 401 892

$X_i \cdot X_i$	$X_i \cdot Y_i$	$(X_i - X_M)^2$	$(Y_i - Y_M)^2$
+0, 036 941	-1, 218 548	+0, 092 333	+0, 166 413
+0, 000 222	-0, 107 486	+0, 016 018	+0, 217 027
+0, 043 556	+1, 358 889	+0, 009 416	+0, 056 045
+0, 000 004	+0, 012 560	+0, 012 048	+0, 018 944
+0, 001 011	-0, 208 773	+0, 020 582	+0, 033 393
+0, 000 069	+0, 055 295	+0, 010 684	+0, 007 368
+0, 102 784	+2, 130 098	+0, 043 655	+0, 010 782
+0, 351 293	+4, 407 791	+0, 231 397	+0, 474 531
+0, 535 880	+6, 429 826	+0, 436 133	+0, 984 503

Woraus sich folgende Werte ergeben:

$$\bar{X} = \frac{\{X_i\}}{n} = -\frac{0, 8933}{8} = -0, 112 \quad \bar{Y} = \frac{\{Y_i\}}{n} = -\frac{53, 9835}{8} = -6, 748$$

$$V_{XX} = +0, 436133$$

$$C = C_{XY} = C_{YX} = +0, 401892$$

$$V_{YY} = +0, 984503$$

$$e^2 = \frac{V_{YY}}{8} = \frac{0, 984503}{8} = 0, 123$$

 \Rightarrow

$$e = 0, 351$$

Und:

$$f^2 = \frac{V_{XX}}{8} = \frac{0, 436133}{8} = 0, 055$$

 \Rightarrow

$$f = 0, 233$$

$$\rho_{\text{XY}} = C \cdot \frac{V_{YY}}{V_{XX}} \cdot \frac{f}{e} = C \cdot \sqrt{\frac{V_{YY}}{V_{XX}}} = 0,401892 \cdot \sqrt{\frac{0,984503}{0,436133}} = 0,604$$

$$2 \cdot \lambda_{1;2} = V_{XX} + V_{YY} \pm \sqrt{(V_{XX} - V_{YY})^2 + 4 \cdot C^2}$$

\Rightarrow

$$2 \cdot \lambda_{1;2} = 0,436133 + 0,984503 \pm \sqrt{(0,436133 - 0,984503)^2 + 4 \cdot 0,401892^2}$$

\Rightarrow

$$\lambda_1 = 1,197 \quad \lambda_2 = 0,224$$

\Rightarrow

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1,421 = V_{XX} + V_{YY}$$

$$\frac{V_{YY} - \lambda_1}{C} = \frac{0,984503 - 1,197}{0,401892} = -0,529$$

Und:

$$\frac{V_{YY} - \lambda_2}{C} = \frac{0,984503 - 0,224}{0,401892} = +1,892$$

\Rightarrow

$$\frac{V_{YY} - \lambda_1}{C} \cdot \frac{V_{YY} - \lambda_2}{C} = -1 = -0,529 \cdot 1,892$$

$$Y_{1;2}(X) = \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot X + \bar{Y} - \frac{V_{YY} - \lambda_{1;2}}{C} \cdot \bar{X}$$

\Rightarrow

$$Y_1(X) = -0,529 \cdot X - 6,807$$

$$Y_2(X) = +1,892 \cdot X - 6,536$$

• Fall $a = +1,892$

$$\sin^2 \varphi = \frac{a^2}{1+a^2} = \frac{1,892^2}{1+1,892^2} = 0,782$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1+a^2} = \frac{1}{1+1,892^2} = 0,218$$

$$\sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{a}{1+a^2} = \frac{1,892}{1+1,892^2} = 0,413$$

\Rightarrow

$$V_{YY}^{(\varphi)} = e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi \quad C^{(\varphi)} = \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot (e^2 - f^2)$$

$$V_{YY}^{(\varphi)} = 0,123 \cdot 0,782 + 0,055 \cdot 0,218 \quad C^{(\varphi)} = 0,413 \cdot (0,123 - 0,055)$$

$$V_{YY}^{(\varphi)} = 0,108 \quad C^{(\varphi)} = 0,028$$

\Rightarrow

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot (X - \bar{X}) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - (X - \bar{X})^2}$$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = -6,748 - \frac{0,028}{0,108} \cdot (X + 0,112) \pm \frac{\sqrt{0,436133 \cdot 0,984503}}{8 \cdot 0,108} \cdot \sqrt{0,108 - (X + 0,112)^2}$$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = -6,748 - 0,259 \cdot (X + 0,112) \pm 0,759 \cdot \sqrt{0,108 - (X + 0,112)^2}$$

- Fall $a = -0,529$

$$\begin{aligned}\sin^2 \varphi &= \frac{a^2}{1+a^2} = \frac{0,529^2}{1+0,529^2} = 0,218 \\ \cos^2 \varphi &= \frac{1}{1+a^2} = \frac{1}{1+0,529^2} = 0,782 \\ \sin \varphi \cdot \cos \varphi &= \frac{a}{1+a^2} = \frac{-0,529}{1+0,529^2} = -0,413\end{aligned}$$

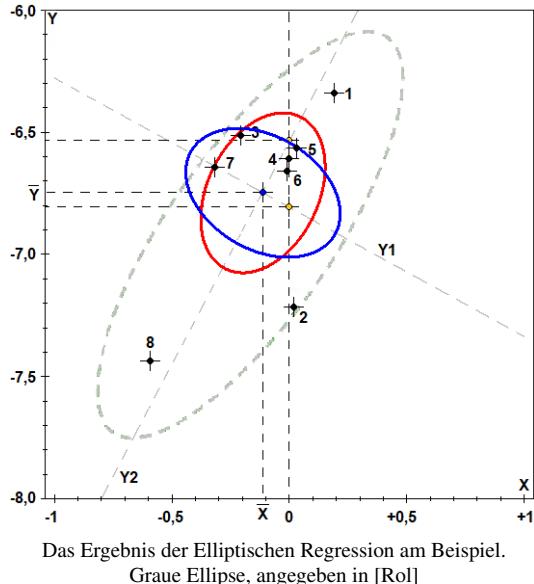
\Rightarrow

$$\begin{aligned}V_{YY}^{(\varphi)} &= e^2 \cdot \sin^2 \varphi + f^2 \cdot \cos^2 \varphi & C^{(\varphi)} &= \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot (e^2 - f^2) \\ V_{YY}^{(\varphi)} &= 0,123 \cdot 0,218 + 0,055 \cdot 0,782 & C^{(\varphi)} &= -0,413 \cdot (0,123 - 0,055) \\ V_{YY}^{(\varphi)} &= 0,070 & C^{(\varphi)} &= -0,028\end{aligned}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned}Y_{1;2}^{(\varphi)} &= \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot (X - \bar{X}) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - (X - \bar{X})^2} \\ Y_{1;2}^{(\varphi)} &= -6,748 + \frac{0,028}{0,070} \cdot (X + 0,112) \pm \frac{\sqrt{0,436133 \cdot 0,984503}}{8 \cdot 0,070} \cdot \sqrt{0,070 - (X + 0,112)^2} \\ Y_{1;2}^{(\varphi)} &= -6,748 + 0,4 \cdot (X + 0,112) \pm 1,17 \cdot \sqrt{0,070 - (X + 0,112)^2}\end{aligned}$$

In grafischer Darstellung:



Das Ergebnis der Elliptischen Regression am Beispiel.
Graue Ellipse, angegeben in [RoI]

