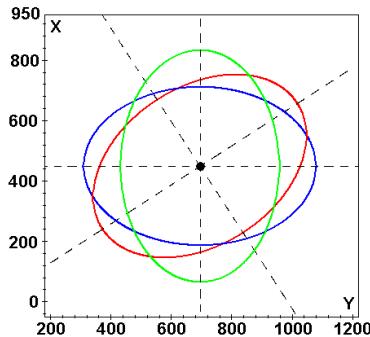


# Ermittlung der abszissen- und ordinatenparallelen Ellipse über die Singulärwertzerlegung



Determination of the abscissa and ordinate parallel  
ellipse via singular value decomposition

Dipl.- Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc.

[www.Zenithpoint.de](http://www.Zenithpoint.de)

Erstellt: 07. Oktober 2016 – Letzte Revision: 20. März 2025

## Inhaltsverzeichnis

<b>1 Durchführung der Regression</b>	<b>3</b>
1.1 Einleitung zur Singulärwertzerlegung . . . . .	3
1.2 Herleitung der Singulärwertzerlegung . . . . .	5
1.3 Durchführung der Singulärwertzerlegung . . . . .	7
<b>2 Zusammenfassung</b>	<b>11</b>
2.1 Zusammenfassung der Singulärwertzerlegung - I . . . . .	11
2.2 Erweiterungen der Berechnungsgrundlagen . . . . .	12
2.3 Zusammenfassung der Singulärwertzerlegung - II . . . . .	14
<b>3 Beispiel</b>	<b>15</b>
3.1 Beispiel - I . . . . .	15
3.2 Beispiel - II . . . . .	17

---

## Literatur

[001] Keine für vorliegenden Text.

[Dip] Dipl.-Ing. Björnstjerne Zindler, M.Sc. Elliptische Regression von Datenpunkten über die Hauptkomponentenanalyse. [www.Zenithpoint.de](http://www.Zenithpoint.de).

[Rol] Roland Weingärtner, Leon Schiller, Alexander Kinstler, Richard Neumann, Frank Brunner, Eldad Bahat Treidel, Enrico Brusaterra, Matthias Marx, Sven Besendorfer. Impact of Dislocation Networks on Leakage Currents of GaN-on-GaN pn-Diodes: A Statistical Approach Comparing X-Ray Topography with Electrical Characteristics.

---

# 1 Durchführung der Regression

## 1.1 Einleitung zur Singulärwertzerlegung

Ziel ist es, aus der allgemeinen Berechnungsgrundlage der verschobenen und gedrehten Ellipse die [001] (Ko)Varianzen der ungedrehten Ellipse zu ermitteln.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot (X - \bar{X}) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - (X - \bar{X})^2}$$

Im übertragenen Sinne, die Elliptische Regression rückgängig machen, wobei in obiger Ellipsenfunktion die Varianz  $V_{XX}^{(\varphi)}$  nicht explizit vorkommt.

Einleitung

Gleichzeitig können die Funktionsgleichungen der verschobenen abszissen- und ordinatenparallelen Ellipsen ermittelt werden.

$$\begin{aligned} Y_{1;2}^{(\varphi=0^\circ)} &= \bar{Y} \pm \sqrt{V_{YY}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{(X - \bar{X})^2}{V_{XX}}} \\ Y_{1;2}^{(\varphi=90^\circ)} &= \bar{Y} \pm \sqrt{V_{XX}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{(X - \bar{X})^2}{V_{YY}}} \end{aligned}$$

Grundlage ist die Singulärwertzerlegung.

Die Gleichungen zur Ermittlung der gedrehten (Ko)Varianzen  $V_{XX}^{(\varphi)}, V_{YY}^{(\varphi)}$  und  $C^{(\varphi)}$  sind bekannt.

$$\begin{aligned} V_{XX}^{(\varphi)} &= \frac{V_{YY}}{n} \cdot \cos^2 \varphi + \frac{V_{XX}}{n} \cdot \sin^2 \varphi \\ V_{YY}^{(\varphi)} &= \frac{V_{YY}}{n} \cdot \sin^2 \varphi + \frac{V_{XX}}{n} \cdot \cos^2 \varphi \\ C^{(\varphi)} &= \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \left( \frac{V_{YY}}{n} - \frac{V_{XX}}{n} \right) \end{aligned}$$

Unbekannt sind der Drehwinkel  $\varphi$  der Ellipse, sowie die Varianzen  $V_{XX}$  und  $V_{YY}$ .

- Für einen **Einheitskreis** gilt notwendigerweise  $V_{XX} = V_{YY} = 1$

$$\begin{aligned} n \cdot V_{XX}^{(\varphi)} &= \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \\ n \cdot V_{YY}^{(\varphi)} &= \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 \\ n \cdot C^{(\varphi)} &= 0 \end{aligned}$$

⇒

$$V_{XX}^{(\varphi)} = V_{YY}^{(\varphi)}$$

- Für einen **Kreis** gilt mindestens  $V_{XX} = V_{YY} = V$

$$\begin{aligned} n \cdot \frac{V_{XX}^{(\varphi)}}{V} &= \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \\ n \cdot \frac{V_{YY}^{(\varphi)}}{V} &= \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 \\ n \cdot C^{(\varphi)} &= 0 \end{aligned}$$

⇒

$$V_{XX}^{(\varphi)} = V_{YY}^{(\varphi)}$$

- Für die **Ellipse** dann letztendlich:

$$\begin{aligned} V_{XX}^{(\varphi)} &= \frac{V_{YY}}{n} \cdot \cos^2 \varphi + \frac{V_{XX}}{n} \cdot \sin^2 \varphi \\ V_{YY}^{(\varphi)} &= \frac{V_{YY}}{n} \cdot \sin^2 \varphi + \frac{V_{XX}}{n} \cdot \cos^2 \varphi \\ C^{(\varphi)} &= \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \left( \frac{V_{YY}}{n} - \frac{V_{XX}}{n} \right) \end{aligned}$$

Es werden die reduzierten Varianzen eingeführt und umgestellt.

$$n \cdot \frac{V_{XX}^{(\varphi)}}{V_{YY}} = \cos^2 \varphi + \frac{V_{XX}}{V_{YY}} \cdot \sin^2 \varphi \quad n \cdot \frac{V_{YY}^{(\varphi)}}{V_{YY}} = \sin^2 \varphi + \frac{V_{XX}}{V_{YY}} \cdot \cos^2 \varphi$$

$$\Rightarrow$$

$$n \cdot \frac{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY} - V_{YY}^{(\varphi)} \cdot V_{XX}}{V_{YY}^2 - V_{XX}^2} = \cos^2 \varphi \quad n \cdot \frac{V_{YY}^{(\varphi)} \cdot V_{YY} - V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{XX}}{V_{YY}^2 - V_{XX}^2} = \sin^2 \varphi$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{V_{XX} \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - V_{YY} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{V_{XX} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - V_{YY} \cdot V_{XX}^{(\varphi)}} = \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = \tan^2 \varphi$$

Im Anstieg der Ellipse steckt nicht  $n$ , die Anzahl der Datenpaare der Urliste, jedoch in der Größe der Ellipse, bzw. in den (Ko)Varianzen.

- Die **Summe der gedrehten Kovarianzen** ist interessant.

$$V_{XX}^{(\varphi)} = \frac{V_{YY}}{n} \cdot \cos^2 \varphi + \frac{V_{XX}}{n} \cdot \sin^2 \varphi \quad V_{YY}^{(\varphi)} = \frac{V_{YY}}{n} \cdot \sin^2 \varphi + \frac{V_{XX}}{n} \cdot \cos^2 \varphi$$

$$\Rightarrow$$

$$n = \frac{V_{XX} + V_{YY}}{V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)}}$$

- Die **Differenz der gedrehten Kovarianzen** ist interessant.

$$V_{XX}^{(\varphi)} = \frac{V_{YY}}{n} \cdot \cos^2 \varphi + \frac{V_{XX}}{n} \cdot \sin^2 \varphi \quad V_{YY}^{(\varphi)} = \frac{V_{YY}}{n} \cdot \sin^2 \varphi + \frac{V_{XX}}{n} \cdot \cos^2 \varphi$$

$$\Rightarrow$$

$$n = \frac{V_{XX} - V_{YY}}{V_{XX}^{(\varphi)} - V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)$$

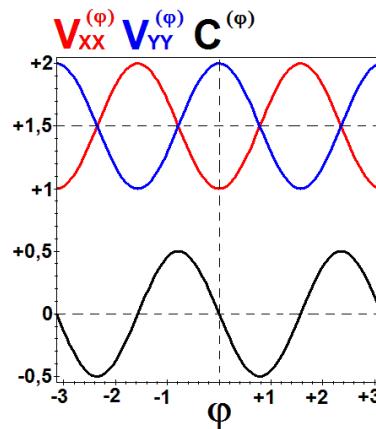
- **Differenz und Summe der gedrehten Kovarianzen** gleichgesetzt.

$$\frac{V_{XX} + V_{YY}}{V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)}} = \frac{V_{XX} - V_{YY}}{V_{XX}^{(\varphi)} - V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{V_{XX} + V_{YY}}{V_{XX} - V_{YY}} \cdot \frac{V_{XX}^{(\varphi)} - V_{YY}^{(\varphi)}}{V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)}} = \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi$$

Grafisch dargestellt mit  $V_{XX} = 2$  und  $V_{YY} = 1$ .



Darstellung der gedrehten (Ko)Varianzen.

## 1.2 Herleitung der Singulärwertzerlegung

Gegeben sei der Datensatz aus der Elliptischen Regression mittels Bestimmung der Achsen- und Ellipsenfunktion nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Die Elliptische Regression wurde anhand dieses Beispiels mittels der Methode der Hauptkomponentenanalyse durchgeführt.

$i$	$X_i$	$Y_i$	$X_i - \bar{X}$	$Y_i - \bar{Y}$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(Y_i - \bar{Y})^2$	$\frac{(X_i - \bar{X})}{(Y_i - \bar{Y})}$
1	128	100	-567	-349	321 489	121 801	+197 883
2	256	250	-439	-199	192 721	39 601	+87 361
3	440	510	-255	+61	65 025	3 721	-15 555
4	640	160	-55	-289	3 025	83 521	+15 895
5	768	400	+73	-49	5 329	2 401	-3 577
6	896	520	+201	+71	40 401	5 041	+14 271
7	1152	750	+457	+301	208 849	90 601	+137 557
8	1280	900	+585	+451	342 225	203 401	+263 835
$\Sigma$	5560	3590	0	0	1 179 064	550 090	+697 670

Mit:

$$\bar{X} = \frac{5560}{8} = 695 \quad \bar{Y} = \frac{3590}{8} = 449$$

Ergeben sich folgende Varianzen und Kovarianzen:

$$V_{XX} = \frac{1179064}{2-1} \quad C_{XY} = C_{YX} = \frac{697670}{2-1} \quad V_{YY} = \frac{550090}{2-1}$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX} = 1179064 \quad C_{XY} = C_{YX} = 697670 \quad V_{YY} = 550090$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{V_{XX}}{n} &= \frac{1179064}{8} = 147383 \\ \frac{C}{n} &= \frac{697670}{8} = 87208,75 \\ \frac{V_{YY}}{n} &= \frac{550090}{8} = 68761,25 \end{aligned}$$

Im weiteren Verlauf wird auch mit den reduzierten Varianzen oder Kovarianzen gerechnet:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{XX} &= \frac{1179064}{\text{Min}(V_{XX}; C; V_{YY})} \\ \tilde{C}_{XY} = C_{YX} &= \frac{697670}{\text{Min}(V_{XX}; C; V_{YY})} \\ \tilde{V}_{YY} &= \frac{550090}{\text{Min}(V_{XX}; C; V_{YY})} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{V}_{XX} = \frac{1179064}{550090} \quad \tilde{C}_{XY} = \tilde{C}_{YX} = \frac{697670}{550090} \quad \tilde{V}_{YY} = \frac{550090}{550090}$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{V}_{XX} = 2,144 \quad \tilde{C}_{XY} = \tilde{C}_{YX} = 1,268 \quad \tilde{V}_{YY} = 1,000$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\tilde{V}_{XX}}{\tilde{V}_{YY}} = 2,144 \quad \frac{\tilde{V}_{YY}}{\tilde{V}_{XX}} = 0,466$$

Damit ist die Varianzenmatrix definiert:

$$V^{(\varphi)} = \begin{pmatrix} V_{XX}^{(\varphi)} & C^{(\varphi)} \\ C^{(\varphi)} & V_{YY}^{(\varphi)} \end{pmatrix}$$

Aus dieser kann die Ellipsenfunktion (gedreht, unverschoben) ermittelt werden.

$$V_{XX}^{(\varphi)} \cdot X^2 + V_{YY}^{(\varphi)} \cdot Y^2 + 2 \cdot C^{(\varphi)} \cdot X \cdot Y - \frac{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{n^2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot (X - \bar{X}) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - (X - \bar{X})^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0,2885 \cdot (X - 695) \pm 0,8101 \cdot \sqrt{124296,42 - (X - 695)^2}$$

Sowie deren Ellipsenachsen.

$$\tilde{Y}_1 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \cdot X \quad \tilde{Y}_2 = -\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} \cdot X + \frac{\bar{X}^2}{\bar{Y}} + \bar{Y}$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{Y}_1 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \cdot X \quad \tilde{Y}_2 = \left( \frac{V_{YY} - V_{XX}}{C} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \right) \cdot X + \frac{V_{XX} - V_{YY}}{C} \cdot \bar{X} + 2 \cdot \bar{Y}$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{Y}_1 = +0,646 \cdot X \quad \tilde{Y}_2 = -1,548 \cdot X + 1525$$

Die Ermittlung der Berechnungsgrundlagen für die gedrehten (Ko)Varianzen  $V_{XX}^{(\varphi)}$ ,  $V_{YY}^{(\varphi)}$  und  $C^{(\varphi)}$  sind aus „Elliptische Regression über die Hauptkomponentenanalyse“ zu entnehmen.

Im weiteren Verlauf soll die Varianzenmatrix so manipuliert werden, dass die achsenparallelen Ellipsen ebenfalls ermittelbar sind. Werkzeug soll dafür die Singulärwertzerlegung sein.

### 1.3 Durchführung der Singulärwertzerlegung

Gegeben ist die Varianzenmatrix  $V^{(\varphi)}$  einer gedrehten aber unverschobenen Ellipse.

Durchführung

$$V^{(\varphi)} = \begin{pmatrix} V_{XX}^{(\varphi)} & C^{(\varphi)} \\ C^{(\varphi)} & V_{YY}^{(\varphi)} \end{pmatrix}$$

Zusätzlich ist der allgemeine Aufbau einer Drehmatrix  $D$  bekannt.

$$D = \begin{pmatrix} A & +B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

Die exakten Werte für  $A$  und  $B$  seien vorerst unbekannt und sollen im Rahmen der Singulärwertzerlegung ermittelt werden.

Die Matrix  $V$  soll eine ungedrehte, unverschobene, das bedeutet zwei achsenparallele Ellipsen beschreiben, welche zu  $V_{1;2}^{(\varphi)}$  äquivalent sind. Die Rückdrehung erfolgt dann über:

$$V = D^T \cdot V^{(\varphi)} \cdot D$$

$\Rightarrow$

$$V = \begin{pmatrix} +\left(A \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - B \cdot C^{(\varphi)}\right) \cdot A & +\left(A \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - B \cdot C^{(\varphi)}\right) \cdot B \\ -\left(A \cdot C^{(\varphi)} - B \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot B & +\left(A \cdot C^{(\varphi)} - B \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot A \\ +\left(B \cdot V_{XX}^{(\varphi)} + A \cdot C^{(\varphi)}\right) \cdot A & +\left(B \cdot V_{XX}^{(\varphi)} + A \cdot C^{(\varphi)}\right) \cdot B \\ -\left(B \cdot C^{(\varphi)} + A \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot B & +\left(B \cdot C^{(\varphi)} + A \cdot V_{YY}^{(\varphi)}\right) \cdot A \end{pmatrix}$$

Die Singulärwertzerlegung ist dann durchgeführt und damit die Werte für  $V$  bekannt, wenn die Matrizenwerte der Nebendiagonale von  $V$  Null sind.

$$\begin{aligned} (B \cdot V_{XX}^{(\varphi)} + A \cdot C^{(\varphi)}) \cdot A - (B \cdot C^{(\varphi)} + A \cdot V_{YY}^{(\varphi)}) \cdot B &= 0 \\ (A \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - B \cdot C^{(\varphi)}) \cdot B + (A \cdot C^{(\varphi)} - B \cdot V_{YY}^{(\varphi)}) \cdot A &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$A^2 + A \cdot \frac{B \cdot (V_{XX}^{(\varphi)} - V_{YY}^{(\varphi)})}{2 \cdot C^{(\varphi)}} - B^2 = 0$$

$\Rightarrow$

$$2 \cdot \frac{C^{(\varphi)}}{B} \cdot A_{1;2} = V_{YY}^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)} \pm \sqrt{(V_{YY}^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)})^2 + 4 \cdot C^{(\varphi)2}}$$

Die Berechnungsgrundlage der Eigenwerte der gekippten Ellipse ist bekannt.

$$2 \cdot \lambda_{1;2}^{(\varphi)} = V_{YY}^{(\varphi)} + V_{XX}^{(\varphi)} \pm \sqrt{(V_{YY}^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)})^2 + 4 \cdot C^{(\varphi)2}}$$

Damit kann der Wurzelwert substituiert werden.

$$2 \cdot \frac{C^{(\varphi)}}{B} \cdot A_{1;2} + V_{XX}^{(\varphi)} = 2 \cdot \lambda_{1;2}^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}$$

$\Rightarrow$

$$A_{1;2} = \frac{\lambda_{1;2}^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}}{C^{(\varphi)}} \cdot B$$

Die triviale Lösung dieses Ausdrucks hilft, obige Bedingung der Nebendiagonale für  $V$  zu erfüllen.

$$B = C^{(\varphi)}$$

$\Rightarrow$

$$A = \lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}$$

$\Rightarrow$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)} & +C^{(\varphi)} \\ -C^{(\varphi)} & \lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$V = \begin{pmatrix} + \left( (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)2} \right) \cdot (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) \\ - \left( (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) \cdot C^{(\varphi)} - C^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} \right) \cdot C^{(\varphi)} \\ + \left( C^{(\varphi)} \cdot V_{XX}^{(\varphi)} + (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) \cdot C^{(\varphi)} \right) \cdot (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) \\ - \left( C^{(\varphi)2} + (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) \cdot V_{YY}^{(\varphi)} \right) \cdot C^{(\varphi)} \\ + \left( (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)2} \right) \cdot C^{(\varphi)} \\ + \left( (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) \cdot C^{(\varphi)} - C^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} \right) \cdot (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) \\ + \left( C^{(\varphi)} \cdot V_{XX}^{(\varphi)} + (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) \cdot C^{(\varphi)} \right) \cdot C^{(\varphi)} \\ + \left( C^{(\varphi)2} + (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) \cdot V_{YY}^{(\varphi)} \right) \cdot (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) \end{pmatrix}$$

Die Nebendiagonale ist tatsächlich dann Null, wenn

$$\begin{aligned} & \left( C^{(\varphi)} \cdot V_{XX}^{(\varphi)} + (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) \cdot C^{(\varphi)} \right) \cdot (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) - \left( C^{(\varphi)2} + (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) \cdot V_{YY}^{(\varphi)} \right) \cdot C^{(\varphi)} = 0 \\ & \left( (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)2} \right) \cdot C^{(\varphi)} + \left( (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) \cdot C^{(\varphi)} - C^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} \right) \cdot (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\lambda^{(\varphi)2} - \lambda^{(\varphi)} \cdot \left( V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)} \right) + V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$2 \cdot \lambda_{1;2}^{(\varphi)} = V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)} \pm \sqrt{\left( V_{XX}^{(\varphi)} - V_{YY}^{(\varphi)} \right)^2 + 4 \cdot C^{(\varphi)2}}$$

der Wert von  $\lambda^{(\varphi)}$  einen Eigenwert der Matrix  $V^{(\varphi)}$  annimmt.

Damit sind die Elemente  $Z_{11}$  und  $Z_{22}$  der Hauptdiagonale bestimmt.

$$Z_{11} = \left( (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)2} \right) \cdot (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) - \left( (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) \cdot C^{(\varphi)} - C^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} \right) \cdot C^{(\varphi)}$$

$$Z_{22} = \left( C^{(\varphi)} \cdot V_{XX}^{(\varphi)} + (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) \cdot C^{(\varphi)} \right) \cdot C^{(\varphi)} + \left( C^{(\varphi)2} + (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)}) \cdot V_{YY}^{(\varphi)} \right) \cdot (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)})$$

$\Rightarrow$

$$Z_{11} = \left( \lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)} \right)^2 \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - 2 \cdot C^{(\varphi)2} \cdot \left( \lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)} \right) + C^{(\varphi)2} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}$$

$$Z_{22} = \left( \lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)} \right)^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)} + 2 \cdot C^{(\varphi)2} \cdot \left( \lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)} \right) + C^{(\varphi)2} \cdot V_{XX}^{(\varphi)}$$

$\Rightarrow$

$$Z_{11} + Z_{22} = \left( \left( \lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)} \right)^2 + C^{(\varphi)2} \right) \cdot \left( V_{YY}^{(\varphi)} + V_{XX}^{(\varphi)} \right)$$

$\Rightarrow$

$$S = \frac{Z_{11} + Z_{22}}{V_{YY}^{(\varphi)} + V_{XX}^{(\varphi)}} = \left( \lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)} \right)^2 + C^{(\varphi)2}$$

$\Rightarrow$

$$S_1 = \left( \lambda_1^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)} \right)^2 + C^{(\varphi)2} \quad S_2 = \left( \lambda_2^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)} \right)^2 + C^{(\varphi)2}$$

Damit sind zwei Singulärwerte  $S$  bekannt. Die (Rück)Drehung der Ellipse ist beendet. Es existieren nun die Berechnungsgrundlagen für zwei achsenparallele Ellipsen.

Die Umkehrung der Berechnung von  $S$  ergibt für die Matrix  $V$ .

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(\varphi)} + \lambda_2^{(\varphi)} &= V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)} = \frac{Z_{11}}{S} + \frac{Z_{22}}{S} \\ \Rightarrow \quad \lambda_1 + \lambda_2 &= V_{XX} + V_{YY} = \frac{Z_{11}}{S} + \frac{Z_{22}}{S} \\ \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} V_{XX} & 0 \\ 0 & V_{YY} \end{pmatrix} &= \frac{1}{S} \cdot \begin{pmatrix} Z_{11} & 0 \\ 0 & Z_{22} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad V_{XX} &= \frac{Z_{11}}{S} \quad V_{YY} = \frac{Z_{22}}{S} \end{aligned}$$

Die Kovarianz  $C$  zeigt, dass dies auch der Fall ist, verantwortlich für die Drehung einer Ellipse.  $C$  ist bei einer achsenparallelen Ellipse gleich Null. Daher auch die Forderung, dass die Nebendiagonale von  $V$  Null sein muss. Eine Berechnungsgrundlage aus anderen Methoden zeigt dies deutlich mit dem Drehwinkel  $\varphi$  der Ellipse.

$$\begin{aligned} C^{(\varphi)} &= \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot (e^2 - f^2) \\ \Rightarrow \quad C^{(\varphi=0^\circ)} &= 0 \quad C^{(\varphi=90^\circ)} = 0 \end{aligned}$$

Das gilt natürlich auch für die Matrix  $V$ .

$$V_{C=0} = \frac{1}{S} \cdot \begin{pmatrix} (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)})^2 \cdot V_{XX}^{(\varphi)} & 0 \\ 0 & (\lambda^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)})^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{XX} & 0 \\ 0 & V_{YY} \end{pmatrix}$$

Somit ist die Singulärwertzerlegung beendet.

$$\begin{aligned} \frac{V_{XX}}{n} &= \frac{(\lambda - V_{XX}^{(\varphi)})^2 \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - 2 \cdot C^{(\varphi)2} \cdot (\lambda - V_{XX}^{(\varphi)}) + C^{(\varphi)2} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{(\lambda - V_{XX}^{(\varphi)})^2 + C^{(\varphi)2}} \\ \frac{V_{YY}}{n} &= \frac{(\lambda - V_{XX}^{(\varphi)})^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)} + 2 \cdot C^{(\varphi)2} \cdot (\lambda - V_{XX}^{(\varphi)}) + C^{(\varphi)2} \cdot V_{XX}^{(\varphi)}}{(\lambda - V_{XX}^{(\varphi)})^2 + C^{(\varphi)2}} \end{aligned}$$

Und:

$$C = 0$$

Für obiges Beispiel sind folgende ungedrehte (Ko)Varianzen  $V_{XX}$  und  $V_{YY}$  ermittelt.

Grundlage sind folgende gedrehte (Ko)Varianzen.

$$V_{XX}^{(\varphi)} = 91876,04 \quad C^{(\varphi)} = -35851,52 \quad V_{YY}^{(\varphi)} = 124268,21$$

$$\bullet \lambda_1^{(\varphi)} = 147412,24 \quad S_1 = 4369601006$$

$$\Rightarrow \quad V_{XX}^{(\lambda_1^{(\varphi)})} = n \cdot 68732 = 549856 \quad V_{YY}^{(\lambda_1^{(\varphi)})} = n \cdot 147412,24 = 1179298$$

$$\Rightarrow \quad \frac{V_{XX}^{(\lambda_1^{(\varphi)})}}{V_{YY}^{(\lambda_1^{(\varphi)})}} = \frac{68732}{147412,24} = 0,466$$

$$\bullet \lambda_2^{(\varphi)} = 68732$$

$$S_2 = 1820977613$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\lambda_2^{(\varphi)})} = n \cdot 147412,24 = 1179298 \quad V_{YY}^{(\lambda_2^{(\varphi)})} = n \cdot 68732 = 549856$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX}^{(\lambda_2^{(\varphi)})}}{V_{YY}^{(\lambda_2^{(\varphi)})}} = \frac{147412,24}{68732} = 2,144$$

Die Ellipsenfunktion ist berechenbar.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot (X - \bar{X}) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - (X - \bar{X})^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - (X - \bar{X})^2}$$

Mit:

$$\rho_{XY} = \frac{87243,76}{\sqrt{10134383851,4}} = 0,867$$

$\Rightarrow$

$$V_{YY}^{(\varphi=0^\circ)} = f^2 = \frac{V_{XX}}{n}$$

$$V_{YY}^{(\varphi=90^\circ)} = e^2 = \frac{V_{YY}}{n}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=0^\circ)} = \bar{Y} \pm \sqrt{V_{YY}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{(X - \bar{X})^2}{V_{XX}}} = 449 \pm 0,6828 \cdot \sqrt{147412 - (X - 695)^2}$$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=90^\circ)} = \bar{Y} \pm \sqrt{V_{XX}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{(X - \bar{X})^2}{V_{YY}}} = 449 \pm 1,4645 \cdot \sqrt{68732 - (X - 695)^2}$$

Der Anstieg der Hauptachse der gedrehten Ellipse:

$$\sqrt{\frac{V_{YY}^{(\varphi)} \cdot V_{YY} - V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{XX}}{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY} - V_{YY}^{(\varphi)} \cdot V_{XX}}} = \sqrt{\frac{549856 \cdot 124268 - 91876 \cdot 1179298}{549856 \cdot 91876 - 124268 \cdot 1179298}} = \tan \varphi = 0,646 \equiv 32,8^\circ$$

Der abschließende Test.

$$\frac{V_{XX}/n + V_{YY}/n}{V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)}} \stackrel{?}{=} \frac{147412 + 68732}{91876 + 124268}$$

$\Rightarrow$

$$1 \stackrel{!}{=} 1$$

## 2 Zusammenfassung

### 2.1 Zusammenfassung der Singulärwertzerlegung - I

Es sind bekannt die (Ko)Varianzen der gedrehten Ellipse ( $V_{XX}^{(\varphi)}, V_{YY}^{(\varphi)}$  und  $C^{(\varphi)}$ ). Dann können die Varianzen der ungedrehten Ellipse berechnet werden aus:

$$\frac{V_{XX}}{n} = \frac{(\lambda - V_{XX}^{(\varphi)})^2 \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - 2 \cdot C^{(\varphi)2} \cdot (\lambda - V_{XX}^{(\varphi)}) + C^{(\varphi)2} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{(\lambda - V_{XX}^{(\varphi)})^2 + C^{(\varphi)2}}$$

$$\frac{V_{YY}}{n} = \frac{(\lambda - V_{XX}^{(\varphi)})^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)} + 2 \cdot C^{(\varphi)2} \cdot (\lambda - V_{XX}^{(\varphi)}) + C^{(\varphi)2} \cdot V_{XX}^{(\varphi)}}{(\lambda - V_{XX}^{(\varphi)})^2 + C^{(\varphi)2}}$$

Wobei  $\lambda$  die Eigenwerte darstellen.

$$2 \cdot \lambda_{1;2}^{(\varphi)} = V_{YY}^{(\varphi)} + V_{XX}^{(\varphi)} \pm \sqrt{(V_{YY}^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)})^2 + 4 \cdot C^{(\varphi)2}}$$

Damit ergeben sich vier Varianzen, jeweils zwei für die abszissenparallele und zwei für die ordinatenparallele Ellipse.

$$\frac{V_{XX}^{(\lambda_1)}}{n} \quad \frac{V_{YY}^{(\lambda_1)}}{n} \quad \frac{V_{XX}^{(\lambda_2)}}{n} \quad \frac{V_{YY}^{(\lambda_2)}}{n}$$

Die Berechnungsgrundlage der originalen, gedrehten, verschobenen Ellipse.

$$V_{XX}^{(\varphi)} \cdot X^2 + V_{YY}^{(\varphi)} \cdot Y^2 + 2 \cdot C^{(\varphi)} \cdot X \cdot Y - \frac{V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{n^2} = 0$$

$$\Rightarrow Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot (X - \bar{X}) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - (X - \bar{X})^2}$$

$$\Rightarrow Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{X} + \alpha \cdot (X - \bar{X}) \pm \beta \cdot \sqrt{\gamma - (X - \bar{X})^2}$$

Die Berechnungsgrundlagen der verschobenen, abszissen- bzw. ordinatenparallelen Ellipsen.

$$Y_{1;2}^{(\varphi=0^\circ)} = \bar{Y} \pm \sqrt{V_{YY}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{(X - \bar{X})^2}{V_{XX}}}$$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=90^\circ)} = \bar{Y} \pm \sqrt{V_{XX}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{(X - \bar{X})^2}{V_{YY}}}$$

$$\Rightarrow Y_{1;2}^{(\varphi=0^\circ)} = \bar{Y} \pm \sqrt{\frac{V_{YY}}{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{V_{XX}} \cdot (X - \bar{X})^2}$$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=90^\circ)} = \bar{Y} \pm \sqrt{\frac{V_{XX}}{n}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{V_{YY}} \cdot (X - \bar{X})^2}$$

Eine Kontrollmöglichkeit ergibt über die inverse Bestimmung von  $n$ .

$$n = \frac{V_{XX} + V_{YY}}{V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)}}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{V_{XX}/n + V_{YY}/n}{V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)}}$$

$$\Rightarrow V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)} = \frac{V_{XX}}{n} + \frac{V_{YY}}{n}$$

## 2.2 Erweiterungen der Berechnungsgrundlagen

Berechnung fehlender Werte.

Erweiterungen

Eine Möglichkeit ist, die fehlenden Werte aus der bekannten Ellipsengleichung zu extrahieren.

- **Ermittlung des Wertes von  $V_{XX}^{(\varphi)}$**

Gegeben ist die Ellipsenfunktionsgleichung, umgestellt in die „Normalform“.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0,2885 \cdot (X - 695) \pm 0,8101 \cdot \sqrt{124296,42 - (X - 695)^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} + \alpha \cdot (X - \bar{X}) \pm \beta \cdot \sqrt{\gamma - (X - \bar{X})^2}$$

Damit gegeben:

$$\alpha = 0,2885 \quad \beta = 0,8101 \quad \gamma = 124296,42$$

Die allgemeine Ellipsengleichung zeigt folgenden Aufbau:

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} - \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot (X - \bar{X}) \pm \frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} \cdot \sqrt{V_{YY}^{(\varphi)} - (X - \bar{X})^2}$$

Damit sind  $V_{YY}^{(\varphi)}$  und  $C^{(\varphi)}$  ablesbar.

$$V_{YY}^{(\varphi)} = \gamma = 124296,42 \quad \frac{C^{(\varphi)}}{V_{YY}^{(\varphi)}} = \alpha = +0,2885$$

$\Rightarrow$

$$C^{(\varphi)} = -\alpha \cdot V_{YY}^{(\varphi)} = -0,2885 \cdot 124296,42 = -35859,52$$

Ein Term ist definiert:

$$\frac{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}}{n \cdot V_{YY}^{(\varphi)}} = \beta = 0,8101$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX} \cdot V_{YY}}{n^2} = \beta^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)2} = 0,8101^2 \cdot 124268,21^2 = 10134383851,4$$

Mit der in „Elliptische Regression von Datenpunkten über die Hauptkomponentenanalyse“ entwickelten Vorschrift

$$V_{XX} \cdot V_{YY} = n^2 \cdot \left( V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)2} \right)$$

kann weiterentwickelt werden.

$$V_{XX}^{(\varphi)} \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - C^{(\varphi)2} = \beta^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)2}$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\varphi)} = \frac{\beta^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)2} + C^{(\varphi)2}}{V_{YY}^{(\varphi)}} = \beta^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)} + \frac{C^{(\varphi)2}}{V_{YY}^{(\varphi)}} = \beta^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - \alpha \cdot C^{(\varphi)}$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\varphi)} = 0,8101^2 \cdot 124268,21 + 0,2885 \cdot 35859,52 = 81552,51 + 10343,2 = 91895,71$$

- **Ermittlung des Wertes von  $C$**

Die Kovarianz  $C$  der ungedrehten Ellipse ist aus den Anstiegen der Achsen der abszissen- und ordinatenparallelen Ellipsen berechenbar.

$$\tilde{Y}_1 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \cdot X \quad \tilde{Y}_2 = \left( \frac{V_{YY} - V_{XX}}{C} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \right) \cdot X + \frac{V_{XX} - V_{YY}}{C} \cdot \bar{X} + 2 \cdot \bar{Y}$$

$\Rightarrow$

$$-\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = \frac{V_{YY} - V_{XX}}{C} - \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \frac{\bar{X}^2 - \bar{Y}^2}{\bar{X} \cdot \bar{Y}} \cdot \frac{C}{V_{XX} - V_{YY}} = \frac{n}{n} \\
 &\Rightarrow \frac{C}{n} = \frac{\bar{X} \cdot \bar{Y}}{\bar{X}^2 - \bar{Y}^2} \cdot \left( \frac{V_{XX}}{n} - \frac{V_{YY}}{n} \right) \\
 &\Rightarrow \frac{C}{n} = \frac{695 \cdot 449}{695^2 - 449^2} \cdot (147412 - 68732) = 87243,76
 \end{aligned}$$

• **Ermittlung des Wertes von  $\rho_{XY}$**

Der Korrelationskoeffizient  $\rho_{XY}$  lässt sich über die eigene allgemeine Berechnungsgrundlage ermitteln.

$$\begin{aligned}
 &\rho_{XY} = \frac{C}{\sqrt{V_{XX} \cdot V_{YY}}} \\
 &\Rightarrow \rho_{XY} = \frac{C/n}{\sqrt{V_{XX}/n \cdot V_{YY}/n}} \\
 &\Rightarrow \rho_{XY} = \frac{87243,76}{\sqrt{10134383851,4}} = 0,867
 \end{aligned}$$

Eine weitere Möglichkeit ist die Berechnung über den Anstieg der Hauptachse nach der „Methode der kleinsten Quadrate“  $a_{MKQ}$ .

$$\rho_{XY} = a_{MKQ} \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{n} \cdot \frac{n}{V_{YY}}} = a_{MKQ} \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{V_{YY}}} = 0,5928 \cdot \sqrt{\frac{147412}{68732}} = 0,868$$

• **Ermittlung des Wertes von  $n$**

Es gibt keine Möglichkeit  $n$  zu rekonstruieren. Jedoch ist das für die weitere Verwendung kein Problem, da in den Berechnungsgrundlagen der Ellipsenfunktionsgleichung, der Achsenfunktionen und der abszissen- und ordinatenparallelen Ellipsen immer  $V/n$  gefordert wird.

### 2.3 Zusammenfassung der Singulärwertzerlegung - II

Zusammenf. II

Ermittlung von  $V_{XX}^{(\varphi)}$  und  $n$ . Beide sind nicht ablesbar aus den Funktionsgleichungen der Ellipse.

Die Ermittlung der ungedrehten (Ko)Varianzen aus der Normalform der Ellipsenfunktionsgleichung.

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} + \alpha \cdot (X - \bar{X}) \pm \beta \cdot \sqrt{\gamma - (X - \bar{X})^2}$$

$C^{(\varphi)}$  ist berechenbar.

$$C^{(\varphi)} = -\alpha \cdot \gamma$$

$V_{XX}^{(\varphi)}$  kann entwickelt werden.

$$V_{XX}^{(\varphi)} = \beta^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)} - \alpha \cdot C^{(\varphi)} = (\alpha^2 + \beta^2) \cdot V_{YY}^{(\varphi)}$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\varphi)} = (\alpha^2 + \beta^2) \cdot \gamma$$

Die Kovarianz  $C$  der ungedrehten Ellipse ist aus den Anstiegen der Achsen der abszissen- und ordinatenparallelen Ellipsen berechenbar.

$$\frac{C}{n} = \frac{\bar{X} \cdot \bar{Y}}{\bar{X}^2 - \bar{Y}^2} \cdot \left( \frac{V_{XX}}{n} - \frac{V_{YY}}{n} \right)$$

Der Korrelationskoeffizient  $\rho_{XY}$  lässt sich über die eigene allgemeine Berechnungsgrundlage ermitteln.

$$\rho_{XY} = \frac{C/n}{\sqrt{V_{XX}/n \cdot V_{YY}/n}}$$

Eine weitere Möglichkeit ist die Berechnung über den Anstieg der Hauptachse nach der „Methode der kleinsten Quadrate“  $a_{MKQ}$ .

$$\rho_{XY} = a_{MKQ} \cdot \sqrt{\frac{V_{XX}}{n} \cdot \frac{n}{V_{YY}}}$$

### 3 Beispiel

#### 3.1 Beispiel - I

Beispiel - I

$i$	$X_i$	$Y_i$	$X_i - \bar{X}$	$Y_i - \bar{Y}$	$(X_i - \bar{X})^2$	$(Y_i - \bar{Y})^2$	$(X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})$
1	128	100	-567	-349	321 489	121 801	+197 883
2	256	250	-439	-199	192 721	39 601	+87 361
3	440	510	-255	+61	65 025	3 721	-15 555
4	640	160	-55	-289	3 025	83 521	+15 895
5	768	400	+73	-49	5 329	2 401	-3 577
6	896	520	+201	+71	40 401	5 041	+14 271
7	1152	750	+457	+301	208 849	90 601	+137 557
8	1280	900	+585	+451	342 225	203 401	+263 835
$\Sigma$	5560	3590	0	0	1 179 064	550 090	+697 670

 $\Rightarrow$ 

$$\bar{X} = \frac{5560}{8} = 695 \quad \bar{Y} = \frac{3590}{8} = 449$$

 $\Rightarrow$ 

$$V_{XX} = 1179064 \quad C_{XY} = C_{YX} = 697670 \quad V_{YY} = 550090$$

 $\Rightarrow$ 

$$\frac{V_{XX}}{n} = 147383 \quad \frac{C}{n} = 87208,75 \quad \frac{V_{YY}}{n} = 68761,25$$

 $\Rightarrow$ 

$$\frac{V_{XX}}{V_{YY}} = 2,144 \quad \frac{V_{YY}}{V_{XX}} = 0,466$$

Der Anstieg der Hauptachse.

$$\varphi = \arctan \frac{449}{695} = 0,574 \equiv 32,86^\circ$$

Die Ellipsenachsen.

$$\tilde{Y}_1 = +0,646 \cdot X \quad \tilde{Y}_2 = -1,548 \cdot X + 1525$$

Die gedrehten (Ko)Varianzen.

$$V_{XX}^{(\varphi)} = 91876,04 \quad C^{(\varphi)} = -35851,52 \quad V_{YY}^{(\varphi)} = 124268,21$$

Die rekonstruierten, ungedrehten (Ko)Varianzen.

$$\bullet \lambda_1^{(\varphi)} = 147412,24 \quad Z_{11} = 300 \cdot 10^{12} \quad Z_{22} = 644,1 \cdot 10^{12}$$

 $\Rightarrow$ 

$$S_1 = 4369601006$$

 $\Rightarrow$ 

$$V_{XX} = n \cdot 68732 = 549856 \quad V_{YY} = n \cdot 147412,24 = 1179298$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX}}{V_{YY}} = 0,466$$

•  $\lambda_2^{(\varphi)} = 68732$

$$Z_{11} = 268,4 \cdot 10^{12} \quad Z_{22} = 125,2 \cdot 10^{12}$$

$\Rightarrow$

$$S_2 = 1820977613$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX} = n \cdot 147412,24 = 1179298 \quad V_{YY} = n \cdot 68732 = 549856$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX}}{V_{YY}} = 2,144$$

Die Ellipsenfunktionen sind definiert.

$$Y_{1;2}^{(\varphi=0^\circ)} = 449 \pm 0,6828 \cdot \sqrt{147412 - (X - 695)^2}$$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=90^\circ)} = 449 \pm 1,4645 \cdot \sqrt{68732 - (X - 695)^2}$$

Sowie:

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = 449 + 0,2885 \cdot (X - 695) \pm 0,8101 \cdot \sqrt{124296,42 - (X - 695)^2}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi)} = \bar{Y} + \alpha \cdot (X - \bar{X}) \pm \beta \cdot \sqrt{\gamma - (X - \bar{X})^2}$$

$\Rightarrow$

$$\alpha = 0,2885 \quad \beta = 0,8101 \quad \gamma = 124296,42$$

$\Rightarrow$

$$V_{YY}^{(\varphi)} = 124296,42$$

$\Rightarrow$

$$C^{(\varphi)} = -35859,52$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\varphi)} = 91895,71$$

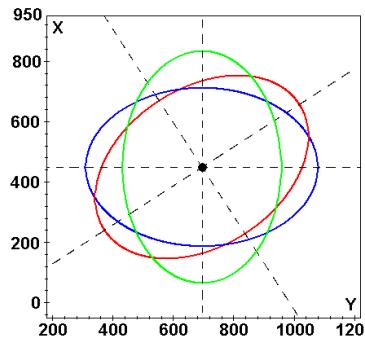
Die Kovarianz  $C$ .

$$\frac{C}{n} = 87243,76$$

Der Korrelationskoeffizient  $\rho_{XY}$ .

$$\rho_{XY} = 0,867$$

Die Ergebnisse grafisch dargestellt.



**Schwarz** Die Ellipsenachsen mit Mittelpunkt,  
**Rot** regressierte verschobene, gedrehte Ellipse,  
**Blau** abszissenparallele Ellipse,  
**Grün** ordinatenparallele Ellipse

### 3.2 Beispiel - II

Mit den Werten aus [Rol] wurde in [Dip] als ein dort genutztes Beispiel zwei Ellipsen ermittelt:

Beispiel - II

$$\begin{aligned} Y_{1;2}^{(\varphi)} &= -6,7032 + 0,400 \cdot x \pm 0,004680 \cdot \sqrt{3591 - 14000 \cdot x - 62500 \cdot x^2} \\ Y_{3;4}^{(\varphi)} &= -6,7770 - 0,259 \cdot x \pm 0,003036 \cdot \sqrt{5966 - 14000 \cdot x - 62500 \cdot x^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} Y_{1;2}^{(\varphi)} &= -6,748 + 0,400 \cdot (x + 0,112) \pm 1,170 \cdot \sqrt{0,070 - (x + 0,112)^2} \\ Y_{3;4}^{(\varphi)} &= -6,748 - 0,259 \cdot (x + 0,112) \pm 0,759 \cdot \sqrt{0,108 - (x + 0,112)^2} \end{aligned}$$

Nach Überführung in die „Normalform“ können die Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma$  und die Mittelwerte  $\bar{X}$  und  $\bar{Y}$  ermittelt werden.

$$Y_{1;2;3;4}^{(\varphi)} = \bar{Y} + \alpha \cdot (X - \bar{X}) \pm \beta \cdot \sqrt{\gamma - (X - \bar{X})^2}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{Y}_{1;2;3;4} = -6,748 \quad \bar{X}_{1;2;3;4} = -0,112$$

Sowie:

$$\begin{aligned} \alpha_{1;2} &= +0,400 & \beta_{1;2} &= \pm 1,170 & \gamma_{1;2} &= +0,070 \\ \alpha_{3;4} &= -0,259 & \beta_{3;4} &= \pm 0,759 & \gamma_{3;4} &= +0,108 \end{aligned}$$

Damit können alle  $V^{(\varphi)}$  und  $C_{XY}^{(\varphi)} = C_{YX}^{(\varphi)} = C^{(\varphi)}$  berechnet werden.

$$\begin{aligned} V_{YY\ 1;2}^{(\varphi)} &= \gamma_{1;2} = +0,070 \\ V_{XX\ 3;4}^{(\varphi)} &= \gamma_{3;4} = +0,108 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} C_{1;2}^{(\varphi)} &= -\alpha_{1;2} \cdot V_{YY\ 1;2}^{(\varphi)} = +0,400 \cdot 0,070 = +0,028 \\ C_{3;4}^{(\varphi)} &= -\alpha_{3;4} \cdot V_{XX\ 3;4}^{(\varphi)} = -0,259 \cdot 0,108 = -0,028 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} V_{XX\ 1;2}^{(\varphi)} &= \beta_{1;2}^2 \cdot V_{YY\ 1;2}^{(\varphi)} - \alpha_{1;2} \cdot C_{1;2}^{(\varphi)} = (\alpha_{1;2}^2 + \beta_{1;2}^2) \cdot V_{YY\ 1;2}^{(\varphi)} \\ V_{YY\ 3;4}^{(\varphi)} &= \beta_{3;4}^2 \cdot V_{XX\ 3;4}^{(\varphi)} - \alpha_{3;4} \cdot C_{3;4}^{(\varphi)} = (\alpha_{3;4}^2 + \beta_{3;4}^2) \cdot V_{XX\ 3;4}^{(\varphi)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{XX\ 1;2}^{(\varphi)} &= (0,400^2 + 1,170^2) \cdot 0,070 = +0,108 \\ V_{YY\ 3;4}^{(\varphi)} &= (0,259^2 + 0,759^2) \cdot 0,108 = +0,070 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$V_{XX}^{(\varphi)} = +0,108 \quad C^{(\varphi)} = \pm 0,028 \quad V_{YY}^{(\varphi)} = +0,070$$

Die Eigenwerte  $\lambda_1^{(\varphi)}$  und  $\lambda_2^{(\varphi)}$ .

$$2 \cdot \lambda_{1;2}^{(\varphi)} = V_{YY}^{(\varphi)} + V_{XX}^{(\varphi)} \pm \sqrt{(V_{YY}^{(\varphi)} - V_{XX}^{(\varphi)})^2 + 4 \cdot C^{(\varphi)2}}$$

$\Rightarrow$

$$\lambda_1^{(\varphi)} = 0,123 \quad \lambda_2^{(\varphi)} = 0,055$$

Wobei gelten muss:

$$\lambda_1^{(\varphi)} + \lambda_2^{(\varphi)} = 0,123 + 0,055 = 0,178 = 0,108 + 0,070 = V_{XX}^{(\varphi)} + V_{YY}^{(\varphi)}$$

Die ungedrehten Varianzen  $V$  und Covarianzen  $C$  sind berechenbar.

$$V_{XX \leftarrow \lambda_1; 1, YY \leftarrow \lambda_2; 1} = \frac{\left(\lambda_{1;2} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 \cdot V_{XX}^{(\varphi)} - 2 \cdot C^{(\varphi)2} \cdot \left(\lambda_{1;2} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) + C^{(\varphi)2} \cdot V_{YY}^{(\varphi)}}{n \left(\lambda_{1;2} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 + C^{(\varphi)2}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX;1}}{n} = \frac{(0,123 - 0,108)^2 \cdot 0,108 - 2 \cdot 0,028^2 \cdot (0,123 - 0,108) + 0,028^2 \cdot 0,070}{(0,123 - 0,108)^2 + 0,028^2}$$

$$\frac{V_{YY;1}}{n} = \frac{(0,055 - 0,108)^2 \cdot 0,108 - 2 \cdot 0,028^2 \cdot (0,055 - 0,108) + 0,028^2 \cdot 0,070}{(0,055 - 0,108)^2 + 0,028^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX;1}}{n} = 0,055 \quad \frac{V_{YY;1}}{n} = 0,123$$

Und:

$$V_{XX \leftarrow \lambda_1; 2, YY \leftarrow \lambda_2; 2} = \frac{\left(\lambda_{1;2} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 \cdot V_{YY}^{(\varphi)} + 2 \cdot C^{(\varphi)2} \cdot \left(\lambda_{1;2} - V_{XX}^{(\varphi)}\right) + C^{(\varphi)2} \cdot V_{XX}^{(\varphi)}}{\left(\lambda_{1;2} - V_{XX}^{(\varphi)}\right)^2 + C^{(\varphi)2}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX;2}}{n} = \frac{(0,123 - 0,108)^2 \cdot 0,070 + 2 \cdot 0,028^2 \cdot (0,123 - 0,108) + 0,028^2 \cdot 0,108}{(0,123 - 0,108)^2 + 0,028^2}$$

$$\frac{V_{YY;2}}{n} = \frac{(0,055 - 0,108)^2 \cdot 0,070 + 2 \cdot 0,028^2 \cdot (0,055 - 0,108) + 0,028^2 \cdot 0,108}{(0,055 - 0,108)^2 + 0,028^2}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{V_{XX;2}}{n} = 0,076 \quad \frac{V_{YY;2}}{n} = 0,101$$

Der Wert für  $n$  ist aus [Dip] bekannt mit  $n = 8$ . Es ist jedoch auch ohne der Kenntnis von  $n$  möglich, weiter zu rechnen.

$$V_{XX;1} = 8 \cdot 0,055 = 0,440$$

$$V_{YY;1} = 8 \cdot 0,123 = 0,984$$

$$V_{XX;2} = 8 \cdot 0,076 = 0,610$$

$$V_{YY;2} = 8 \cdot 0,101 = 0,808$$

Somit können die Funktionsgleichungen der abszissen- und ordinatenparallelen Ellipsen genannt werden.

$$Y_{1;2}^{(\varphi=0^\circ)} = \bar{Y} \pm \sqrt{V_{YY}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{(X - \bar{X})^2}{V_{XX}}}$$

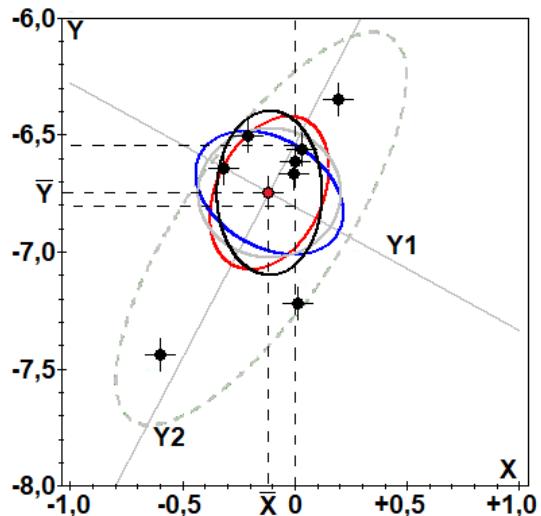
$$Y_{1;2}^{(\varphi=90^\circ)} = \bar{Y} \pm \sqrt{V_{XX}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} - \frac{(X - \bar{X})^2}{V_{YY}}}$$

$\Rightarrow$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=0^\circ)} = -6,748 \pm \sqrt{0,984} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{(X + 0,112)^2}{0,440}}$$

$$Y_{1;2}^{(\varphi=90^\circ)} = -6,748 \pm \sqrt{0,610} \cdot \sqrt{\frac{1}{8} - \frac{(X + 0,112)^2}{0,808}}$$

Grafisch veranschaulicht.



Grau die Ellipsenachsen mit Mittelpunkt aus [Rol],  
Rot regressierte verschobene, gedrehte Ellipse - I aus [Dip],  
Blau regressierte verschobene, gedrehte Ellipse - II aus [Dip],  
Grau abszissenparallele Ellipse, Schwarz ordinatenparallele Ellipse  
Weiterhin eingezeichnet, der originale Datensatz aus [Rol] und grau  
gestrichelt, die dort genutzte Ellipse.

LATEX 2<sub>ε</sub>

