

---

# Aufbau von faserbasierten Interferometern für die Quantenkryptografie

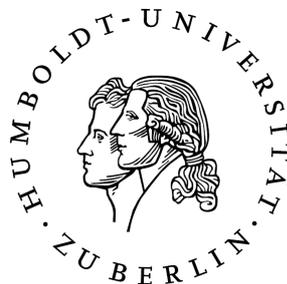
**- Gehäuse, Phasenstabilisierung, Fasereinbau -**

Masterarbeit  
im Studiengang Elektrotechnik und  
Informationstechnik  
Vertiefungsrichtung Photonik

an der



in Kooperation mit der



vorgelegt von

**Björnstjerne Zindler**

geboren am 13. November 1966 in Görlitz

eingereicht am 21. November 2011

Erstgutachter: Herr Professor Dr. A. Richter  
Zweitgutachter: Herr Professor Dr. O. Benson

---

**Meiner Mutter gewidmet**

\*03. Juli 1940

+22. September 2010

# Dimensionierungsvorschlag eines Regelkreises zur Grobabstimmung des piezoelektrischen Stabilisators.

## - Teil 1: Analyse -

- **Basierend auf:**

- „Berechnung der benötigten Faserlängenänderung und Spannung für eine Phasenverschiebung von  $\varphi = \pm\pi$  bei Nutzung eines Piezorohres.“
- „Berechnung ausgewählter Parameter für eine beliebige Faserlängenänderung unter Nutzung eines Piezorohres.“
- „Messwertabnahme der piezoelektrischen Verformung mittels Dehnungsmessstreifen am Piezorohr 74x20x4.“

- **Ziel des Regelkreises:**

Das Ziel des Regelkreises ist es, eine Phasentreue des aufzubauenden Interferometers von  $-\pi$  bis  $+\pi$  zu erreichen. Innerhalb dieses Intervalls wird ein zweiter Regelkreis (wahrscheinlich auf optischen Wege) ein Feintuning vornehmen, der das Interferometer stabil hält. Dieser Regelkreis ist nicht Inhalt dieses Arbeitsblattes.

- **Grundgedanke:**

Der piezoelektrische Stabilisator besitzt eine ausgemessene also bekannte individuelle Spannungs- Durchmesserkenlinie, welche zu einer Phasenverschiebung „ $\Delta\varphi$ “ führt infolge Längung der Faser. Ein Widerstandsnetzwerk aus Dehnungsmessstreifen wandelt den aktuellen Durchmesser in ein elektrisches Signal um, welches mit einem Sollwert verglichen wird. Weichen Ist- und Sollwert dieser Spannung voneinander ab, wird eine Differenzspannung generiert, welche eine Veränderung der Spannung am Piezo bewirkt, so dimensioniert, dass die Differenz zwischen Ist und Soll ausgeregelt wird. Der grundsätzliche Aufbau des Regelkreises:

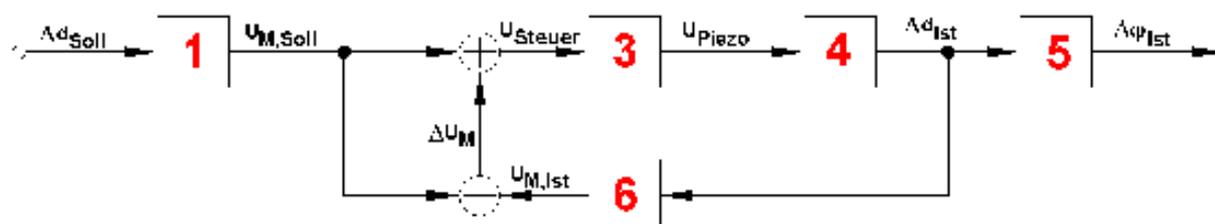


Abbildung 1: Der Regelkreis zur Grobabstimmung des piezoelektrischen Stabilisators.

Das Netzwerk zwischen den Regelgliedern 1, 3 und 6 ist für eine weitere Betrachtung nicht geeignet, daher wird das Netzwerk eliminiert durch ein Regelglied „2“.



Abbildung 2: Der Regelkreis nun regelungstechnisch konform.

Kurz sollen die einzelnen Regelglieder beschrieben werden:

**- 1:**

Eingangssignal - „ $\Delta d_{Soll}$ “ - „Einzustellende Durchmesseränderung“ - Einheit „ $\mu m$ “ - Definitionsbereich 0 bis 5 (entspricht dem Piezorohr 74x20x4)

Ausgangssignal - „ $U_{M,Soll}$ “ - „Einstellspannung für  $\Delta d_{Soll}$ “ - Einheit „V“ - Definitionsbereich 0 bis +5

Damit besitzt dieses Regelglied folgende Übertragungsfunktion „ $G_1$ “:

$$G_1 \rightarrow U_{M,Soll} = 1 \frac{V}{\mu m} \cdot \Delta d_{Soll}$$

**- 2:**

Eingangssignal - „ $U_{M,Soll}$ “ - „Einstellspannung für  $\Delta d_{Soll}$ “ - Einheit „V“ - Definitionsbereich 0 bis +5

Ausgangssignal - „ $2U_{M,Soll}$ “ - „Doppelte Einstellspannung für  $\Delta d_{Soll}$ “ - Einheit „V“ - Definitionsbereich 0 bis +10

Damit besitzt dieses Regelglied folgende Übertragungsfunktion „ $G_2$ “:

$$G_2 \rightarrow 2U_{M,Soll} = 2 \cdot U_{M,Soll}$$

**- 3:**

Eingangssignal - „ $U_{Steuer}$ “ - „Steuerspannung“ für die nachfolgende Hochspannungsquelle - Einheit „V“ - Definitionsbereich -5 bis +10

Ausgangssignal - „ $U_{Piezo}$ “ - Treiberspannung für das einzusetzende Piezorohr 74x20x4 - Einheit „V“ - Definitionsbereich 0 bis 1000

Damit besitzt dieses Regelglied folgende Übertragungsfunktion „ $G_3$ “:

$$G_3 \rightarrow U_{Piezo} = 100 \frac{V}{V} \cdot U_{Steuer}$$

**- 4:**

Eingangssignal - „ $U_{Piezo}$ “ - „Treiberspannung für das einzusetzende Piezorohr 74x20x4 - Einheit „V“ - Definitionsbereich 0 bis +1000

Ausgangssignal - „ $\Delta d_{Ist}$ “ - „Reale Durchmesseränderung“ - Einheit „ $\mu m$ “ - Definitionsbereich 0 bis 5 (entspricht dem Piezorohr 74x20x4)

Dieses real existierende Regelglied besitzt seine charakteristische Übertragungsfunktion „ $G_4$ “:

$$G_4 \rightarrow \Delta d_{Ist} = \frac{1}{200} \frac{\mu m}{V} \cdot U_{Piezo}$$

**Die genaue Übertragungskennlinie des piezoelektrischen Stabilisators ist zur Zeit noch unbekannt. Diese muss durch Messversuche mit hoher Genauigkeit noch in Kenntnis gebracht werden.**

**- 5:**

Eingangssignal - „ $\Delta d_{Ist}$ “ - „Reale Durchmesseränderung“ - Einheit „ $\mu m$ “ - Definitionsbereich 0 bis 5 (entspricht dem Piezorohr 74x20x4)

Ausgangssignal - „ $\Delta \varphi_{Ist}$ “ - Reale Phasenverschiebung durch „ $\Delta d_{Ist}$ “ - Einheit „ $\pi$ “

Dieses real existierende Regelglied besitzt seine charakteristische Übertragungsfunktion „ $G_5$ “:

$$G_5 \rightarrow \Delta \varphi_{Ist} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot N \cdot \Delta d_{Ist} \cdot \pi$$

Mit:            N        =        Windungszahl um das Piezorohr  
                    $\lambda$         =        Benutzte Wellenlänge

**Die genaue Übertragungskennlinie des piezoelektrischen Stabilisators ist zur Zeit noch unbekannt. Diese muss durch Messversuche mit hoher Genauigkeit noch in Kenntnis gebracht werden.**

**- 6:**

Eingangssignal - „ $\Delta d_{Ist}$ “ - „Reale Durchmesseränderung“ - Einheit „ $\mu m$ “ - Definitionsbereich 0 bis 5 (entspricht dem Piezorohr 74x20x4)

Ausgangssignal - „ $U_{M,Ist}$ “ - „Reale Einstellspannung für  $\Delta d_{Soll}$ “ - Einheit „V“ - Definitionsbereich 0 bis +5

Damit besitzt dieses Regelglied folgende Übertragungsfunktion „ $G_6$ “:

$$G_6 \rightarrow U_{M,Ist} = \frac{\frac{\Delta d_{Ist}}{d_0} \cdot \frac{k}{2}}{\frac{\Delta d_{Ist}}{d_0} \cdot \frac{k}{2} + 1} \cdot U_E \cdot v_6$$

Mit:  $d_0$  = Ausgangsdurchmesser des Piezorohrs = 74mm  
 $k$  = Empfindlichkeit des Dehnmessstreifens (Datenblatt)  
 $U_E$  = Brückeneingangsspannung (Maxima siehe Datenblatt)  
 $v_6$  = Mögliche nachfolgende Verstärkung

Die vorliegende Übertragungsfunktion ist nichtlinear. Für den weiteren Verlauf der regelungstechnischen Untersuchung ist das äußerst ungünstig. Daher wird angenommen, dass der Wert „ $\Delta d_{Ist}$ “ im Vergleich zu „ $d_0$ “ sehr klein ist (was auch praktisch gegeben ist). Dann ergibt sich ein linearer Zusammenhang:

$$G_6 \rightarrow U_{M,Ist} = \frac{\Delta d_{Ist}}{d_0} \cdot \frac{k}{2} \cdot U_E \cdot v_6$$

**Die genaue Übertragungskennlinie der Messbrücke mit Dehnmessstreifen ist zur Zeit noch unbekannt. Diese muss durch Messversuche mit hoher Genauigkeit noch in Kenntnis gebracht werden.**

- Vereinfachung I:

Zusammenfassen der Regelglieder „ $G_1$ “ und „ $G_2$ “:

Die Regelglieder „ $G_1$ “ und „ $G_2$ “ können durch gegenseitiges Einsetzen einfach zusammen gefasst werden:

$$G_1 \rightarrow U_{M,Soll} = 1 \frac{V}{\mu m} \cdot \Delta d_{Soll} \qquad G_2 \rightarrow 2U_{M,Soll} = 2 \cdot U_{M,Soll}$$

⇒

$$G_{12} \rightarrow 2U_{M,Soll} = 2 \frac{V}{\mu m} \cdot \Delta d_{Soll}$$

Zusammenfassen der Regelglieder „ $G_3$ “ und „ $G_4$ “:

Die Regelglieder „ $G_3$ “ und „ $G_4$ “ können durch gegenseitiges Einsetzen einfach zusammen gefasst werden:

$$G_3 \rightarrow U_{Piezo} = 100 \frac{V}{V} \cdot U_{Steuer} \qquad G_4 \rightarrow \Delta d_{Ist} = \frac{1}{200} \frac{\mu m}{V} \cdot U_{Piezo}$$

⇒

$$G_{34} \rightarrow \Delta d_{Ist} = \frac{1}{2} \frac{\mu m}{V} \cdot U_{Steuer}$$

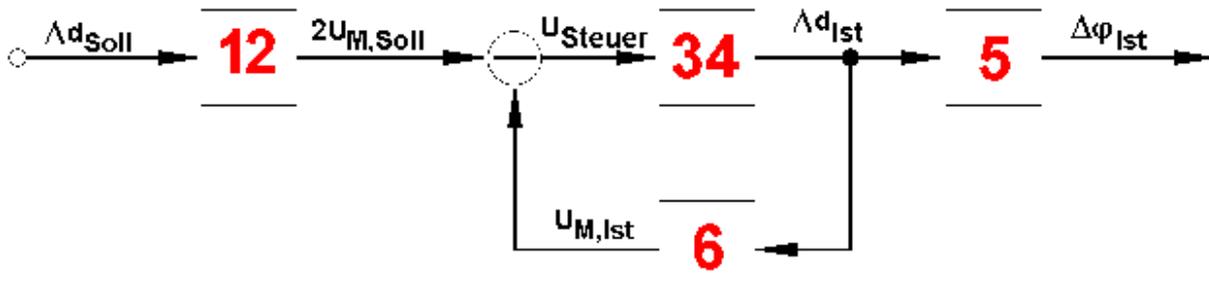


Abbildung 3: Der vereinfachte Regelkreis.

- **Die Übertragungsfunktionen:**

Die Übertragungsfunktionen der Regelglieder sind definiert durch;

$$G(t) = \frac{A(t)}{E(t)}$$

Wobei „E(t)“ die zeitlich veränderliche Eingangsgröße und „A(t)“ die zeitlich veränderliche Ausgangsgröße darstellt. So ergibt sich für die einzelnen Regelglieder:

$$G_{12}(t) = 2 \left[ \frac{V}{\mu m} \right] \quad G_{34}(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\mu m}{V} \right]$$

$$G_5(t) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot N \cdot \pi \left[ \frac{\pi}{\mu m} \right] \quad G_6(t) = \frac{U_E \cdot v}{2 \cdot d_0} \cdot k \left[ \frac{V}{\mu m} \right]$$

- **Laplace- Transformation:**

Die Laplace- Transformation ist definiert durch:

$$G(s) = \int_0^{+\infty} G(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt$$

Die Überführung der Zeitdomäne in die Bilddomäne ergibt folgende Ergebnisse:

$$G_{12}(s) = \frac{2}{s} \quad G_{34}(s) = \frac{1}{2 \cdot s}$$

$$G_5(s) = \frac{2\pi}{\lambda \cdot s} \cdot N \cdot \pi \quad G_6(s) = \frac{U_E \cdot v_6}{2 \cdot d_0} \cdot \frac{k}{s}$$

- **Vereinfachung II:**

In der Bilddomäne können die Regelglieder „G<sub>34</sub>“ und „G<sub>6</sub>“ zusammen gefasst werden. So gilt als Algorithmus:

$$G_{346}(s) = \frac{G_{34}(s)}{1 + G_{34}(s) \cdot G_6(s)}$$

⇒

$$G_{346}(s) = \frac{\frac{1}{2s}}{1 + \frac{1}{2s} \cdot \frac{U_E \cdot v_6 \cdot k}{2 \cdot d_0 \cdot s}}$$

⇒

$$G_{346}(s) = \frac{2 \cdot d_0 \cdot s}{4 \cdot d_0 \cdot s^2 + U_E \cdot v_6 \cdot k}$$

Der Regelkreis ergibt dann folgendes Schaubild:



Abbildung 4: Der nochmals vereinfachte Regelkreis.

Damit liegt der Regelkreis in einem bemessungsfähigen Zustand vor.

## Dimensionierungsvorschlag eines Regelkreises zur Grobabstimmung des piezoelektrischen Stabilisators.

- Teil 2: Synthese -

### • Vorbetrachtungen:

Aus Teil 1 ist der Regelkreis für die Grobabstimmung eines piezoelektrischen Stabilisators bekannt.

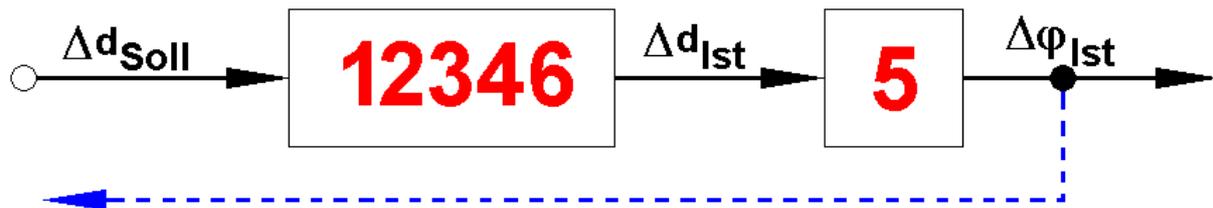


Abbildung 6: Der bekannte vereinfachte Regelkreis.

Störungen, die im Regelglied „G<sub>5</sub>“ auftreten werden nicht vom Regler „G<sub>12346</sub>“ erfasst und können so nicht ausgeglet werden. Das wird dann die Aufgabe einer geplanten Feinabstimmung auf optischer Basis im Abbild 6 schematisch **blau** gekennzeichnet. Diese ist nicht Aufgabe des vorliegenden Arbeitsblattes.

Die Übertragungsfunktion des Reglers wird zur weiteren Bearbeitung umgestellt. Es wird angenommen, dass die Systemübertragungsfunktion „G<sub>346</sub>(s)“ synthetisiert wird aus den Übertragungsfunktionen des „korrigierten Regelkreises“ und der Strecke. In Bild 7 ist dies grafisch dargestellt.

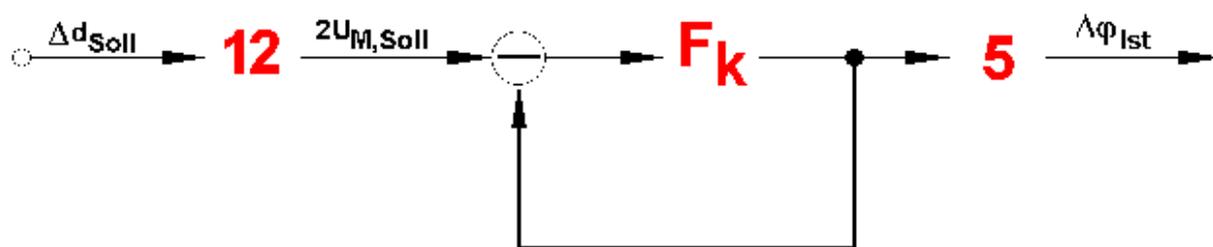


Abbildung 7: Der korrigierte Regelkreis.

Die Übertragungsfunktion des Regelkreises mit „F<sub>K</sub>(s)“ im oberen Pfad ist gegeben durch:

$$G_K(s) = \frac{F_K(s)}{1 + F_K(s)}$$

⇒

$$F_K(s) = \frac{G_K(s)}{1 - G_K(s)}$$

Für „ $G_K(s)$ “ wird „ $G_{346}(s)$ “ eingesetzt:

$$F_K(s) = \frac{\frac{2 \cdot d_0 \cdot s}{4 \cdot d_0 \cdot s^2 + U_E \cdot v_6 \cdot k}}{1 - \frac{2 \cdot d_0 \cdot s}{4 \cdot d_0 \cdot s^2 + U_E \cdot v_6 \cdot k}}$$

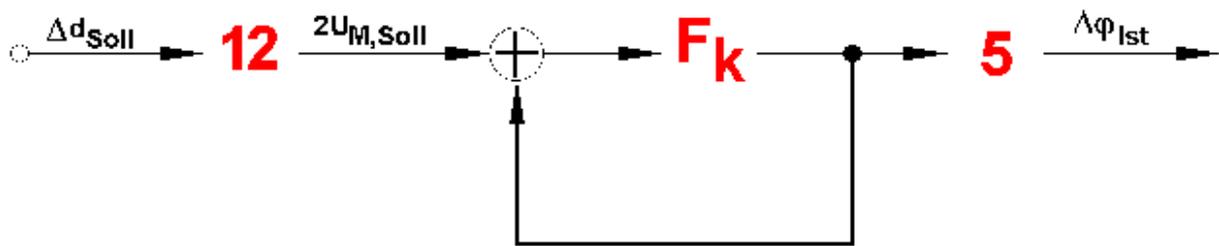
⇒

$$F_K(s) = \frac{2 \cdot d_0 \cdot s}{4 \cdot d_0 \cdot s^2 - 2 \cdot d_0 \cdot s + U_E \cdot v_6 \cdot k}$$

⇒

$$F_K(s) = \frac{2 \cdot \frac{d_0}{U_E \cdot v_6 \cdot k} \cdot s}{4 \cdot \frac{d_0}{U_E \cdot v_6 \cdot k} \cdot s^2 - 2 \cdot \frac{d_0}{U_E \cdot v_6 \cdot k} \cdot s + 1}$$

Der Nenner besitzt im linearen Glied ein negatives Vorzeichen. Das bedeutet, dass der Regelkreis instabil arbeitet (Hurwitz- Kriterium für charakteristische Polynome bis 2. Ordnung). Solch ein Regelkreis ist unbrauchbar. Um dies zu umgehen, wird statt der Gegenkopplung für „ $F_K(s)$ “ eine Mitkopplung generiert.



Abbild 8: Der mitgekoppelte korrigierte Regelkreis.

Die Übertragungsfunktion des Regelkreises mit „ $F_K(s)$ “ im oberen Pfad ist gegeben durch:

$$G_K(s) = \frac{F_K(s)}{1 - F_K(s)}$$

⇒

$$F_K(s) = \frac{G_K(s)}{1 + G_K(s)}$$

Für „ $G_K(s)$ “ wird „ $G_{346}(s)$ “ eingesetzt:

$$F_K(s) = \frac{\frac{2 \cdot d_0 \cdot s}{4 \cdot d_0 \cdot s^2 + U_E \cdot v_6 \cdot k}}{1 + \frac{2 \cdot d_0 \cdot s}{4 \cdot d_0 \cdot s^2 + U_E \cdot v_6 \cdot k}}$$

⇒

$$F_K(s) = \frac{2 \cdot d_0 \cdot s}{4 \cdot d_0 \cdot s^2 + 2 \cdot d_0 \cdot s + U_E \cdot v_6 \cdot k}$$

⇒

$$F_K(s) = \frac{2 \cdot \frac{d_0}{U_E \cdot v_6 \cdot k} \cdot s}{4 \cdot \frac{d_0}{U_E \cdot v_6 \cdot k} \cdot s^2 + 2 \cdot \frac{d_0}{U_E \cdot v_6 \cdot k} \cdot s + 1}$$

Im Nenner besitzen alle Glieder positive Vorzeichen. Das bedeutet, dass der Regelkreis stabil arbeitet. Das entscheidet jedoch nicht, ob der Regler gedämpft einschwingt oder asymptotisch sich seinem stationären Wert annähert. Der Übersichtlichkeit halber wird substituiert:

$$F_K(s) = \frac{2 \cdot \alpha \cdot s}{4 \cdot \alpha \cdot s^2 + 2 \cdot \alpha \cdot s + 1}$$

Mit:

$$\alpha = \frac{d_0}{U_E \cdot v_6 \cdot k}$$

Im Zähler steht ein Proportionalglied „ $2\alpha$ “ und ein Integrator „ $s$ “. Der Nenner stellt ein  $VZ_2$ -Glied dar. Dessen allgemeine Darstellung lautet:

$$VZ_2(s) = \frac{1}{T^2 \cdot s^2 + 2 \cdot D \cdot T \cdot s + 1}$$

Dementsprechend kann die Dämpfung „ $D$ “ und die Einschwingzeit „ $T$ “ des Regelkreises ermittelt werden:

$$T^2 = 4 \cdot \alpha \quad 2 \cdot D \cdot T = 2 \cdot \alpha$$

⇒

$$T = 2 \cdot \sqrt{\alpha} \quad D = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\alpha}$$

Hat „ $D$ “ einen Wert kleiner 1, schwingt der Regler um seinen stationären Wert und hat nach „ $T$ “ diesen (fast) erreicht (5%-Band).

Besitzt „ $D$ “ einen Wert größer 1, nimmt der Regler seinen stationären Wert asymptotisch an und hat diesen nach „ $T$ “ erreicht (5%-Band).

„ $D$ “ = 1 bezeichnet den Grenzfall.

Beispiel: Soll der Regler ein „ $D = 1$ “ besitzen, muss gelten:

$$U_E \cdot v_6 = \frac{d_0}{4 \cdot k} \quad T = 2 \cdot \sqrt{4} = 4$$

Je schneller die Reaktionszeit des Regelkreises sein soll, desto ungedämpfter muss er gestaltet werden.

Es wird das Bodediagramm erstellt des vorliegenden Regelkreises. Dazu wird die bekannte Systemübertragungsfunktion „ $F_K(s)$ “ in den komplexen Raum verschoben:

$$F_K(s) = \frac{2 \cdot \alpha \cdot s}{4 \cdot \alpha \cdot s^2 + 2 \cdot \alpha \cdot s + 1}$$

Mit:

$$\alpha = \frac{d_0}{U_E \cdot v_6 \cdot k}$$

Und:

$$s = j \cdot \omega$$

⇒

$$F_K(j\omega) = \frac{-2 \cdot \alpha \cdot j \cdot \omega}{4 \cdot \alpha \cdot \omega^2 - 2 \cdot \alpha \cdot j \cdot \omega - 1}$$

Es wird der komplexe und der reale Anteil extrahiert:

$$\Im\{F_K(j\omega)\} = 2 \cdot \alpha \cdot \omega \cdot \frac{1 - 4 \cdot \alpha \cdot \omega^2}{(1 - 4 \cdot \alpha \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot \alpha^2 \cdot \omega^2} \quad \Re\{F_K(j\omega)\} = \frac{4 \cdot \alpha^2 \cdot \omega^2}{(1 - 4 \cdot \alpha \cdot \omega^2)^2 + 4 \cdot \alpha^2 \cdot \omega^2}$$

Damit sind die Phase „ $\varphi$ “ und die Intensität „ $I$ “ (Amplitude „ $A$ “) definiert:

$$\varphi = -\arctan \frac{\Im\{F_K(j\omega)\}}{\Re\{F_K(j\omega)\}}$$

⇒

$$\varphi(\alpha, \omega) = \arctan \frac{4 \cdot \alpha \cdot \omega^2 - 1}{2 \cdot \alpha \cdot \omega}$$

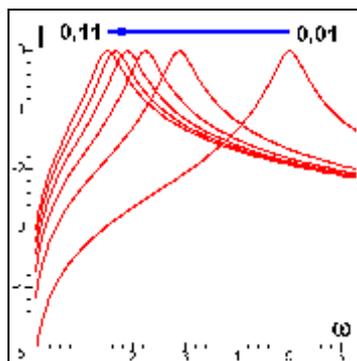
Sowie:

$$I(\alpha, \omega) = A(\alpha, \omega)^2 = \Re\{F_K(j\omega)\}^2 + \Im\{F_K(j\omega)\}^2$$

⇒

$$I(\alpha, \omega) = \frac{4 \cdot \alpha^2 \cdot \omega^2}{4 \cdot \alpha^2 \cdot \omega^2 \cdot (4 \cdot \omega^2 + 1) - 8 \cdot \alpha \cdot \omega^2 + 1}$$

Die Intensität soll grafisch dargestellt werden:



Abbild 9: Die Intensität „ $I$ “ am Ausgang des Regelkreises in Abhängigkeit von „ $\alpha = 0,01 \rightarrow 0,11$ “.

Die Intensität besitzt Extrema, welche sich in Abhängigkeit von „ $\alpha$ “ verschieben. Die Stelle des Maximums wird gesucht:

$$I_{Max}(\omega) \rightarrow \frac{d}{d\alpha} I(\alpha, \omega) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha, \omega) = \frac{8 \cdot \alpha \cdot \omega^2 \cdot (1 - 4 \cdot \alpha \cdot \omega^2)}{(4 \cdot \alpha^2 \cdot \omega^2 \cdot (4 \cdot \omega^2 + 1) - 8 \cdot \alpha \cdot \omega^2 + 1)^2} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\alpha_1 = \frac{1}{4 \cdot \omega^2} \quad \alpha_2 = 0$$

Wobei das Maximum für „ $\alpha_1$ “ gültig ist. Der Ausdruck für „ $\alpha$ “ ist bekannt und wird eingesetzt:

$$\frac{d_0}{U_E \cdot v_6 \cdot k} = \frac{1}{4\omega^2}$$

$\Rightarrow$

$$v_6 = 4 \cdot \frac{d_0}{U_E \cdot k} \cdot \omega^2$$

Da der Ausdruck für beide Terme immer einen positiven Wert ergibt, ist der Regelkreis technisch realisierbar.

